

- //Mechanisms of Ageing and Development. - Elsevier Scientific Publishers Ireland Ltd., 1993. - V. 67. - P. 21-32.
- [28] Zhukotsky A.V., Erenpreisa J., Budylin A. Positional regulation of interphase genome during cytodifferentiation. //The Wilhelm Bernhard Workshop Proceedings, 13th Eur. Workshop on the Cell Nucleus, Balatonaliga, Hungary, 21-25 Jun. 1993 y.: Book of abstr. - Balatonaliga, Hungary, 1993. - P. 27
- [29] Zhukotsky A.V., Erenpreisa J., Kozlov A. The chromatin networks: image analysis of differentiating chick embryo chondrocytes. //Eur. J. Histochem. - 1993. - V. 37- P. 139-147.
- [30] Zhukotsky A.V., Yakubova N.I., Nikulina L.A., Korolev Yu.N., Zubkova S.M. Computer analysis of the ultrastructural and functional parameters of rat liver mitochondria. //Biophysics, 1993, Vol. 38, N 2, - P. 273-275.

Поведение в лабиринтах некоторых автоматов с краской

И.В. Климов

1. Введение

В обзоре [1] работ, посвященных изучению возможностей автоматов по обходу прямоугольных лабиринтов, отмечен факт отсутствия универсального автомата, который обходит все плоские прямоугольные лабиринты (Л. Будах, А.С. Подколзин). Наряду с этим отмечено существование универсальных автоматов для класса всех древовидных лабиринтов, для лабиринтов с "дырами", ограниченными по диаметру, а также для лабиринтов, у которых "дыры" ограничены в одном из конечного числа направлений с рациональным тангенсом угла наклона (А.Н. Зыричев, А.А. Золотых). Также отмечено, что коллективы автоматов типа "два автомата" и "автомат с двумя камнями" могут обойти любой лабиринт, но коллектив типа "автомат с камнем" такой способностью не обладает (М. Блюм, Д. Козен, Г. Килибарда). Для автоматов, оставляющих отметки на ребрах лабиринта, дан положительный ответ на вопрос о способности таких автоматов обходить все плоские прямоугольные лабиринты (при этом достаточно иметь один тип меток) [3]. В работе [4] была решена задача обхода прямоугольных лабиринтов автоматом, оставляющим нестираемые отметки в вершинах лабиринта (автомат с одной краской).

В настоящей работе рассматриваются два класса автоматов с вершинной раскраской: автоматы с исчезающей краской (отметки остаются активными конечное время) и автоматы с периодической

краской (оставленные отметки периодически активизируются на один такт времени). Показано, что первый класс автоматов в определенном смысле ближе по своим возможностям обхода лабиринтов к автоматам без краски, а второй класс — к автоматам с одной краской. Или, более точно, для первого класса автоматов доказана сводимость их поведения в широком классе лабиринтов к поведению автоматов без краски, а для второго класса доказана их способность в любом лабиринте моделировать автомат, оставляющий нестираемые отметки.

2. Базовые понятия и определения

Пусть $D = \{e, n, w, s\}$ — множество направлений на плоскости (от англ. east, north, west, south). Обозначим $e^{-1}=w$, $n^{-1}=s$, $w^{-1}=e$, $s^{-1}=n$. Будем говорить, что ориентированный отрезок \overrightarrow{AB} с координатами (X, Y) на плоскости идет в направлении:

- e , если $X > 0, Y = 0$;
- n , если $X = 0, Y > 0$;
- w , если $X < 0, Y = 0$;
- s , если $X = 0, Y < 0$.

Пусть $L = (V(L), E(L))$ — конечный ориентированный связный граф без петель и кратных ребер, то есть в нем любые две вершины соединены путем, в нем нет ребер вида (v, v) и из любой вершины v выходит в другую вершину u не более одного ориентированного ребра (v, u) . Кроме того, пусть L является симметричным: если ребро $(v, u) \in E(L)$, то и $(u, v) \in E(L)$; множество $\langle v, u \rangle := \{(v, u), (u, v)\}$ будем называть неориентированным ребром. Припишем каждому ребру $\rho \in E(L)$ отметку $|\rho| \in D$ так, чтобы разным ребрам, выходящим из одной вершины, были приписаны разные отметки и чтобы $|(u, v)| = |(v, u)|^{-1}$ для любого $(v, u) \in E(L)$.

Определение 1. Назовем L прямоугольным лабиринтом, если существует такая его укладка на плоскости, что $\forall u, v \in V(L) : (u, v) \in$

$E(L)$, отрезок \overrightarrow{uv} , соответствующий ребру (u, v) , идет на плоскости в направлении $|(u, v)|$.

Множество всех прямоугольных лабиринтов обозначим через \mathcal{L} . Прямоугольный лабиринт L называется *унициальным*, если в нем выделена некоторая вершина v_0 (при этом обход такого лабиринта будет начинаться всегда с этой вершины). Без ограничения общности будем считать, что множество вершин $V(L) \subset \mathbb{Z}^2$: для произвольной укладки L на плоскости, удовлетворяющей определению 1, этого можно добиться перемещением вертикальных и горизонтальных прямых, содержащих ребра L , вдоль соответствующих осей координат. Назовем L *мозаичным*, или *Z-лабиринтом*, если для некоторой его укладки на плоскости все отрезки имеют единичную длину. Обозначим через \mathcal{L}_Z множество всех мозаичных лабиринтов.

В дальнейшем нам понадобится следующая классификация циклов в прямоугольных лабиринтах (см. рис.):



Тривиальный цикл

Простой цикл

Смешанный цикл

Примеры циклов

- 1) *Тривиальные циклы* — те, в которых каждое неориентированное ребро встречается 2 раза. Соответствующий тривиальному циклу неориентированный подграф связан и не содержит циклов, то есть является деревом.
- 2) *Простые циклы* — те, в которых каждое неориентированное ребро присутствует ровно один раз. Соответствующий простому циклу неориентированный подграф является неориентированным циклом.
- 3) *Смешанные циклы* — все остальные. Нетрудно заметить, что смешанный цикл можно представить в виде объединения некоторых простых и некоторых тривиальных циклов.

Определение 2. Детерминированный конечный инициальный автомат $\mathcal{M}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где входной алфавит A – это все непустые подмножества множества D , выходной алфавит B совпадает с D , множество состояний $Q = \{q_1, \dots, q_m\}$, $\varphi : A \times Q \rightarrow Q$ – функция переходов, $\psi : A \times Q \rightarrow B$ – функция выходов и $q_0 \in Q$ – начальное состояние, называется лабиринтным автоматом (ЛА), если $\forall (a, q) \in A \times Q$ выполнено $\psi(a, q) \in a$.

Так как все рассматриваемые в данной работе автоматы являются инициальными, в дальнейшем будем опускать индекс q_0 в обозначении ЛА. Функционирование \mathcal{M} в инициальном лабиринте L_{v_0} происходит следующим образом:

- в начальный момент времени, $t = 0$, \mathcal{M} находится в $v_0 = v_{i_0}$;
- в момент времени $t \geq 0$ \mathcal{M} находится в v_i в состоянии $q(t)$ и обозревает звезду вершины v_i , так что его вход $a(t)$ есть множество отметок выходящих из v_i ребер;
- в момент времени $t + 1$ автомат \mathcal{M} меняет свое состояние, $q(t) \rightarrow q(t + 1) = \varphi(a(t), q(t))$, и переходит в вершину $v_{i_{t+1}}$, такую что $|(v_i, v_{i_{t+1}})| = b(t)$, где $b(t) = \psi(a(t), q(t))$.

Пусть теперь вершины лабиринта содержат не только отметки исходящих ребер, но также могут быть дополнительно нагружены символами '0' или '1'. Сформулируем определение автомата, оставляющего нестираемые отметки (краску).

Определение 3. Автоматом с одной краской называется инициальный автомат $\mathcal{M}_{p_0} = (A_1, P, B_1, \varphi', \psi', p_0)$, где $A_1 = A \times K$, $B_1 = B \times K$, где $K = \{0, 1\}$, $P = \{p_1, \dots, p_{m_1}\}$, $\varphi' : a(t)k(t)p(t) \rightarrow p(t + 1)$, $\psi' : a(t)k(t)p(t) \rightarrow b(t)k(t + 1)$, где $k(t) \in K$ – раскраска вершины v_i в момент стояния в ней \mathcal{M}_{p_0} , а $k(t + 1)$ – в следующий момент времени. При этом $k(t + 1) \geq k(t)$, то есть краска нестираема.

Функционирование \mathcal{M} происходит аналогично функционированию ЛА без краски \mathcal{M} с той лишь разницей, что \mathcal{M} может красить (нагружать символом '1') ту вершину лабиринта, из которой он выходит, и воспринимать информацию о раскраске вершины, в которой он находится в данный момент времени. В начальный момент все вершины лабиринта не окрашены (имеют отметку '0'). Окра-

шенная вершина остается таковой в любой момент времени после ее раскраски.

Траекторией \mathcal{M} в лабиринте L_{v_0} на t -ом шаге назовем последовательность пройденных им вершин $\pi_t = (v_{i_0}=v_0, v_{i_1}, \dots, v_{i_t})$, а следом \mathcal{M} – множество $s_t = \{v_j | v_j \in \pi_t\}$. Будем говорить, что \mathcal{M} обходит L_{v_0} , если $\bigcup_{t=0}^{\infty} s_t = V(L)$; \mathcal{M} сильно обходит L , если он обходит L_{v_0} для каждого $v_0 \in V(L)$. Пусть $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ – некоторый класс лабиринтов. ЛА \mathcal{M}_u назовем универсальным для \mathcal{L} , если он сильно обходит любой $L \in \mathcal{L}$. В дальнейшем нам понадобятся понятия π - и s -моделирования. Будем говорить, что:

- ЛА \mathcal{M}_2 π -моделирует ЛА \mathcal{M}_1 в L_{v_0} , если $\forall t \geq 0 \pi_t(\mathcal{M}_2) = \pi_t(\mathcal{M}_1)$;
- ЛА \mathcal{M}_2 s -моделирует ЛА \mathcal{M}_1 в L_{v_0} , если $\forall t_1 \geq 0 \exists t_2 \geq t_1$:
 $s_{t_2}(\mathcal{M}_2) = s_{t_1}(\mathcal{M}_1)$ и $\forall t < t_2 s_t(\mathcal{M}_2) \subset s_{t_1}(\mathcal{M}_1)$.

Таким образом, π -моделирующий автомат \mathcal{M}_2 обходит в точности ту же, что и \mathcal{M}_1 , последовательность вершин в инициальном лабиринте, а s -моделирующий автомат обходит те же, что и \mathcal{M}_1 , вершины (возможно, с запаздыванием) и при этом не посещает никакие другие вершины лабиринта. Очевидно, π -моделирование влечет s -моделирование. Скажем, что ЛА \mathcal{M}_2 сильно π - (s -)моделирует \mathcal{M}_1 в L , если $\forall v_0 \in V(L)$ \mathcal{M}_2 π - (s -)моделирует \mathcal{M}_1 в L_{v_0} . Исходя из определения универсального автомата и π - (s -)моделирования, имеем следующие очевидные утверждения:

Лемма 1. Пусть \mathcal{M}_u универсален для некоторого класса лабиринтов \mathcal{L} . Тогда, если \mathcal{M}' сильно π - (или s -)моделирует \mathcal{M}_u в любом $L \in \mathcal{L}$, то \mathcal{M}' также универсален для \mathcal{L} .

Лемма 2. Пусть \mathcal{M}' π -моделирует \mathcal{M} в лабиринте L_{v_0} . Если \mathcal{M}' не обходит L_{v_0} , то и \mathcal{M} лабиринт L_{v_0} не обходит.

3. Автоматы с исчезающей краской

Определение 4. Автоматом с τ -исчезающей краской назовем лабиринтный автомат с одной краской, время жизни у которой равно

τ ($\tau \in \mathbb{N}, \tau \geq 2$), тактов времени, то есть окрашенная в момент времени $t_0 + 1$ вершина остается таковой только при $t \leq t_0 + \tau$. Повторное окрашивание вершин допускается.

Рассмотрим поведение автоматов с τ -исчезающей краской в мозаичных лабиринтах. Напомним, что мозаичным, или Z -лабиринтом называется лабиринт, имеющий плоскую укладку, в которой все отрезки, соответствующие ребрам, имеют единичную длину. Такую укладку Z -лабиринта будем называть правильной.

Пусть $\tilde{c}_r(v_{i_1}, v_{i_2}) = x_1 x_2 \dots x_r$ - слово длины r над алфавитом D , соответствующее в Z -лабиринте некоторому пути длины r , соединяющему вершины v_{i_1} и v_{i_2} (x_i - отметка i -го ребра в этом пути). Обозначим число вхождений в $\tilde{c}_r(v_{i_1}, v_{i_2})$ букв e, w, n, s как m_e, m_w, m_n и m_s соответственно.

Лемма 3 (сбалансированность Z -циклов). *Путь в Z -лабиринте является циклом тогда и только тогда, когда в соответствующем ему слове $m_e = m_w$ и $m_n = m_s$.*

Доказательство. Рассмотрим правильную укладку Z -лабиринта, такую что вершина v_{i_1} , соответствующая началу пути, находится в начале координат. Пусть X_r, Y_r - координаты вершины v_{i_r} , соответствующей концу пути. Найдем условия, при которых путь из v_{i_1} в v_{i_r} является циклом, то есть $v_{i_1} = v_{i_r}$. Из определения Z -лабиринта следует, что $X_r = 1 \cdot m_e - 1 \cdot m_w, Y_r = 1 \cdot m_n - 1 \cdot m_s$. Отсюда $v_{i_1} = v_{i_r} \iff X_r = Y_r = 0 \iff m_e = m_w, m_n = m_s$.

Лемма 4. *Пусть $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ - ЛА с τ -исчезающей краской. Существует ЛА без краски \mathcal{M}_M , сильно π -моделирующий $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ в любом Z -лабиринте.*

Доказательство. Построим автомат $\mathcal{M}_M = (A, Q, B, \varphi, \psi, q')$ по автомату $\hat{\mathcal{M}}_\tau = (A_1, P, B_1, \varphi_1, \psi_1, p')$, где $A_1 = A \times \{0, 1\}, B_1 = B \times \{0, 1\}$.

В дополнение к внутренней памяти P автомата $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ введем для автомата \mathcal{M}_M память $H = (B \times \{0, 1\})^\tau$, в которой сохраняются отметки $b^j, 1 \leq j \leq \tau$, последних τ пройденных им ребер

$(v_{i_{t-1}}, v_{i_t}), (v_{i_{t-2}}, v_{i_{t-1}}), \dots, (v_{i_{t-\tau}}, v_{i_{t-\tau+1}})$ и моделируется раскраска $k^j, 1 \leq j \leq \tau$, вершин $v_{i_{t-j}}$. В начальный момент положим все $k^j = 0$, а $b^j = b_0^j$, где $b_0^j \in B$ произвольны (но фиксированы!). Обозначим $h^j = (b^j, k^j), h = (h_1, \dots, h_\tau)$. Тогда внутренним состоянием $q(t)$ автомата \mathcal{M}_M будет пара $(p_t, h_t) \in Q, Q = P \times H$.

Для определения функции переходов φ и функции выходов ψ автомата \mathcal{M}_M введем вспомогательную функцию $\tilde{k}(h), \tilde{k} : H \rightarrow \{0, 1\}$, которая равна 1 тогда и только тогда, когда $\exists r \leq \tau$, для которого выполняются следующие условия:

- 1°. Для слова $b^1 b^2 \dots b^\tau \quad m_e = m_w, m_n = m_s$.
- 2°. Значение k^τ равно 1.

На содержательном уровне функция $\tilde{k}(h_t)$ определяет по h_t "раскраску" вершины, в которой находится \mathcal{M}_M в момент времени t . (Строго это будет показано ниже.) Представим для \mathcal{M}_M функцию переходов $\varphi : A \times Q \rightarrow Q$ в виде $\varphi(\cdot, \cdot) = (\varphi_p(\cdot, \cdot), \varphi_h(\cdot, \cdot))$, где $\varphi_p : A \times Q \rightarrow P, \varphi_h : A \times Q \rightarrow H$, и определим φ_p, φ_h для произвольных $a \in A, q = (p, h) \in Q$ следующим образом:

$$\varphi_p(a, q) = \varphi_1((a, \tilde{k}(h)), p), \tag{1}$$

$$\varphi_h(a, q) = (\underbrace{\psi_1((a, \tilde{k}(h)), p)}_{\text{новые: } (b^1, k^1)}, \underbrace{(b^2, k^2)}_{(b^2, k^2)}, \dots, \underbrace{(b^{\tau-1}, k^{\tau-1})}_{(b^{\tau-1}, k^{\tau-1})}). \tag{2}$$

Теперь определим для \mathcal{M}_M функцию выходов $\psi : A \times Q \rightarrow B$. Пусть $\psi_1(a_1, p) = (\psi_1^b(a_1, p), \psi_1^k(a_1, p)) \in B \times \{0, 1\} = B_1$, где $a_1 \in A_1, p \in P$. Тогда положим для произвольных $a \in A, q = (p, h) \in Q$

$$\psi(a, q) = \psi_1^b((a, \tilde{k}(h)), p). \tag{3}$$

Итак, мы определили функционирование \mathcal{M}_M канонической системой уравнений:

$$(*) \quad \begin{cases} q(0) & = q', \text{ где } q' = (p', ((b_0^1, 0), \dots, (b_0^\tau, 0))) \\ q(t+1) & = \varphi(a(t), q(t)) - \text{определена в (1) и (2)} \\ b(t) & = \psi(a(t), q(t)) - \text{определена в (3)} \end{cases}$$

Покажем, что определенный таким образом автомат без краски \mathcal{M}_M π -моделирует $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ в произвольном инициальном Z -лабиринте. Доказательство проведем индукцией по $t \geq 0$; параллельно в качестве вспомогательного факта докажем, что в $\mathcal{M}_M \tilde{k}(h_t)$ моделирует раскраску вершины, в которой тот находится в момент времени t .

I. База индукции, $t = 0$.

По определению функционирования ЛА в инициальном лабиринте автоматы $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ и \mathcal{M}_M при $t = 0$ находятся в начальной вершине v_0 , то есть $\pi_0(\hat{\mathcal{M}}_\tau) = v_0 = \pi_0(\mathcal{M}_M)$. Также при $t = 0$ вершина v_0 имеет отметку 0 (не окрашена), что совпадает с $\tilde{k}(h_0)$, так как при $t = 0$ все $k^j = 0$. База индукции проверена.

II. Индуктивное предположение, t .

Предположим, что $\pi_t(\hat{\mathcal{M}}_\tau) = \pi_t(\mathcal{M}_M)$ и что $\tilde{k}(h_{t'})$ правильно моделирует раскраску текущих вершин при $0 \leq t' \leq t$.

(Заметим, что из этих предположений в силу (1), (2) и (3) следует, что:

- а) если вход $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ есть $a_1(t) = (a_t, k_t)$, то вход \mathcal{M}_M есть $a(t) = a_t$, так как a_t — множество отметок выходящих из v_t ребер;
- б) если состояние \mathcal{M}_M есть $q(t) = (p_t, h_t)$, то состояние $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ есть $p(t) = p_t$;
- в) если в момент времени t некоторые вершины лабиринта с номерами $i_{t-\tau_1}, \dots, i_{t-\tau_s}$, $1 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_s \leq \tau$, окрашены в результате функционирования $\hat{\mathcal{M}}_\tau$, то в момент времени t состояние \mathcal{M}_M таково, что $k^{\tau_1} = \dots = k^{\tau_s} = 1$ и $k^l = 0$ для остальных l ;

г) при $t \geq \tau$ переменные b^j являются отметками последних τ пройденных автоматом \mathcal{M}_M (и $\hat{\mathcal{M}}_\tau$) ребер; в противном случае, в силу произвольности b_0^j , несколько последних переменных могут не быть отметками реально пройденных ребер.)

III. Индуктивный переход, $t \rightarrow t + 1$.

Пусть b_t — отметка ребра, по которому $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ переходит в очередную вершину $v_{i_{t+1}}$, а \hat{b}_t — отметка ребра, по которому осуществляет переход \mathcal{M}_M , соответственно, в $\hat{v}_{i_{t+1}}$. Имеем, $\hat{b}_t = b(t) = \psi(a(t), q(t)) = \psi(a_t, (p_t, h_t)) \stackrel{(3)}{=} \psi_1^b((a_t, \tilde{k}(h_t)), p_t) \stackrel{II}{=} \psi_1^b((a(t), k(t)), p(t)) = b_t$, и, по определению лабиринта, $\hat{v}_{i_{t+1}} = v_{i_{t+1}}$, то есть $\pi_{t+1}(\mathcal{M}_M) = \pi_{t+1}(\hat{\mathcal{M}}_\tau)$. Осталось показать, что $\tilde{k}(h_{t+1})$ моделирует раскраску вершины $v_{i_{t+1}}$.

Действительно, пусть $v_{i_{t+1}}$ ОКРАШЕНА автоматом $\hat{\mathcal{M}}_\tau$. Это означает, что для некоторого $r \leq t + 1$, $r \leq \tau$, выполнены два условия:

$$(i) v_{i_{t+1}} = v_{i_{t+1-r}},$$

$$(ii) r \text{ тактов времени назад на выходе } \hat{\mathcal{M}}_\tau \text{ было } k = 1.$$

Но (ii) эквивалентно 2°, а по Лемме 3 равенство (i) $v_{i_{t+1}} = v_{i_{t+1-r}}$ влечет 1° для h_{t+1} . Следовательно, в этом случае $\tilde{k}(h_{t+1}) = 1$.

Пусть теперь $v_{i_{t+1}}$ НЕ ОКРАШЕНА. Покажем, что тогда $\tilde{k}(h_{t+1}) = 0$, то есть выполнение условий 1° и 2° невозможно одновременно. Пусть верно 1°, то есть $\exists r \leq \tau : m_w = m_e, m_n = m_s$ для $b_{i_{t+1}}^1 b_{i_{t+1}}^2 \dots b_{i_{t+1}}^r$. Возможны два варианта: $r \leq t + 1$ и $r > t + 1$. В первом случае $b_{i_{t+1}}^1 b_{i_{t+1}}^2 \dots b_{i_{t+1}}^r$ соответствуют отметкам последних r пройденных ребер (см. II.г)) и по Лемме 3 условие 1° влечет совпадение вершин $v_{i_{t+1}}$ и $v_{i_{t+1-r}}$. Так как $v_{i_{t+1}}$ не окрашена, то $v_{i_{t+1-r}}$ также не окрашена и, следовательно, $k_{i_{t+1}}^r = 0$ — условие 2° не выполнено. Во втором случае, $r > t + 1$, $k_{i_{t+1}}^r = 0$ в силу начального значения h_0 и формулы (2) для функции переходов φ , то есть условие 2° опять не выполнено. Что и завершает доказательство равенства значения $k_{i_{t+1}}^r$ и отметки вершины $v_{i_{t+1}}$. Индукция полностью доказана.

Итак, мы показали, что автомат \mathcal{M}_M , описываемый системой уравнений (*), сильно π -моделирует $\hat{\mathcal{M}}_\tau$ в произвольном Z -лабиринте.

Лемма 4 показывает, что за счет увеличения числа состояний автомата в 8^τ раз можно моделировать способность автомата ставить τ -исчезающие отметки в вершинах любого мозаичного лабиринта. Для нечетных τ эта оценка, в силу четности длины всякого цикла в мозаичном лабиринте, может быть понижена до $8^{\tau-1}$ раз. Заметим, что степень увеличения памяти можно, по-видимому, понизить исходя из детального анализа функций переходов φ_1 и выходов ψ_1 красящего автомата. Так, например, для моделирования автомата, поведение которого не зависит от раскраски вершин (в терминах φ_1 и ψ_1 это означает, что переменная k является фиктивной), совсем не требуется увеличения памяти: достаточно положить $Q = P$, $\varphi(a, p) = \varphi_1((a, 0), p) \equiv \varphi_1((a, 1), p)$, $\psi(a, p) = \psi_1^b((a, 0), p) \equiv \psi_1^b((a, 1), p)$.

Заметим теперь, что из леммы 4, леммы 2 и теоремы Будаха-Подколзина [2] следует:

Теорема 1 (о мозаичной ловушке для \mathcal{M}_τ). Для любого \mathcal{M}_τ , $\tau \in \mathbb{N}$, существует мозаичный лабиринт, который им не обходится.

Рассмотрим теперь поведение автоматов с исчезающей краской в произвольных (не мозаичных) прямоугольных лабиринтах с "достаточно большими дырами". Именно, назовем τ -лабиринтом прямоугольный лабиринт, у которого всякий простой цикл имеет более τ ребер. Обозначим множество всех τ -лабиринтов через \mathcal{L}_τ . Докажем для таких лабиринтов лемму о моделировании в них автоматов с τ -исчезающей краской.

Лемма 5. Для любого автомата с τ -исчезающей краской \mathcal{M}_τ можно построить автомат без краски \mathcal{M}'_M , сильно π -моделирующий \mathcal{M}_τ в произвольном τ -лабиринте.

Доказательство. Если длина любого простого (и, следовательно, любого смешанного) цикла в τ -лабиринте больше τ , то \mathcal{M}_τ не может, вернувшись в вершину по такому циклу, обнаружить закрашенную вершину, — краска успевает исчезнуть за это время. Значит, \mathcal{M}_τ может обнаружить закрашенную вершину только вернувшись в нее по тривиальному циклу (длины меньшей либо равной τ). Легко показать индукцией по числу ребер в цикле, что слово \bar{c} над B , соответствующее отметкам ребер тривиального цикла, приводится к "пустому" слову Λ (обозначим $\bar{c} \sim \Lambda$) путем сокращений вида $xx^{-1} \rightarrow \Lambda$ и $\Lambda\Lambda \rightarrow \Lambda$, где $x \in B$. Ясно, что автомат без краски \mathcal{M}'_M с памятью $Q = P \times H$, $H = (B \times \{0, 1\})^\tau$, где P — память \mathcal{M}_τ , может (по схеме из Леммы 4) по сохраняемым отметкам τ последних пройденных ребер и вершин $(b^1(t), k^1(t)), \dots, (b^\tau(t), k^\tau(t))$ определять раскраску текущей вершины v_i по правилу:
 v_i раскрашена $\iff \exists r \leq \tau : (\text{слово } b^1(t)b^2(t) \dots b^r(t) \sim \Lambda) \& (k^r(t)=1)$.
 Значит, как показано в Лемме 4, автомат \mathcal{M}'_M может сильно π -моделировать \mathcal{M}_τ в любом τ -лабиринте.

Итак, мы показали, что для любого автомата с τ -исчезающей краской \mathcal{M}_τ существует автомат без краски, сильно π -моделирующий \mathcal{M}_τ во всяком лабиринте с "достаточно большими дырами"; при этом достаточно 8^τ -кратного (для четного τ) или $8^{\tau-1}$ -кратного (для нечетного τ) увеличения памяти автомата. Отметим опять же, что для некоторых автоматов с исчезающей краской эта оценка понижается за счет анализа его функций переходов и выходов. Также, в силу равенства $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\tau$ (\mathcal{L} — все прямоугольные лабиринты) при $\tau \leq 3$, любой автомат с 2- или 3-исчезающей краской моделируется автоматом без краски во всех лабиринтах.

С использованием леммы 4 и леммы 5 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2 (Об автоматах с исчезающей краской). Для данного автомата с τ -исчезающей краской \mathcal{M}_τ можно построить автомат без краски с 8^τ -кратным увеличением памяти, который сильно π -моделирует \mathcal{M}_τ в каждом лабиринте из $\mathcal{L}(\tau, f_\tau)$, где $\mathcal{L}(\tau, f_\tau)$ есть множество прямоугольных лабиринтов, удовлетворяющих следующему свойству: существует функция $f_\tau : B^\tau \rightarrow \{0, 1\}$ такая, что всякий путь $S_r = (\rho_1, \dots, \rho_r)$ длины r , $r \leq \tau$, является в лабиринте циклом тогда и только тогда, когда

$$f_\tau(|\rho_1|, \dots, |\rho_r|, x_{\tau+1}, \dots, x_\tau) = 1,$$

где $x_i \in B$ произвольны.

Доказательство теоремы опущено из-за ограничений на объем настоящей статьи.

В качестве примеров, указывающих на отличие поведения в лабиринтах автоматов с исчезающей краской и автоматов без краски, приведем следующие утверждения:

1) Существует автомат \mathcal{M}_τ с τ -исчезающей краской и единственным состоянием, для которого нет автомата без краски, π -моделирующего \mathcal{M}_τ в классе инициальных лабиринтов \mathcal{L}' , состоящем всего из двух 3-лабиринтов.

2) Существует автомат \mathcal{M}_τ с k -исчезающей краской и двумя состояниями, а также счетный класс \mathcal{L} -лабиринтов с одним простым циклом \mathcal{L}'' такой, что для любого автомата без краски существует лишь конечное множество лабиринтов из этого класса, в которых он слабо π -моделирует \mathcal{M}_τ . (Слабое π -моделирование в не инициальном лабиринте L понимается как существование вершины $v \in V(L)$, такой что имеем π -моделирование в инициальном L_v).

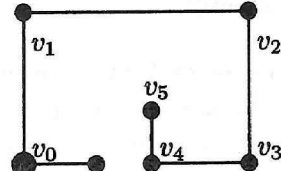
Доказательство. В качестве класса \mathcal{L}' для 1) возьмем лабиринты L'_1 и L'_2 (см. рис.), а в качестве \mathcal{M}_τ – автомат, который красит все пройденные вершины и имеет одно состояние p_0 .

Зададим его следующими инструкциями (p_0 и k для краткости опускаем):

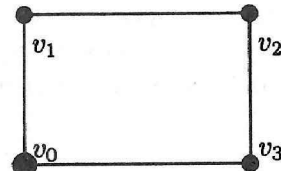
$(\{e, n\}, 0) \rightarrow n$; $(\{s, e\}, 0 \vee 1) \rightarrow e$;
 $(\{w, s\}, 0 \vee 1) \rightarrow s$; $(\{n, w\}, 0 \vee 1) \rightarrow w$;
 $(\{e, n\}, 1) \rightarrow e$; на остальных наборах доопределим произвольно. Рассмотрим произвольный автомат без краски \mathcal{M} ; покажем, что он не может π -моделировать \mathcal{M}_τ одновременно и в L'_1 , и в L'_2 , стартуя из v_0 . Действительно, \mathcal{M}_τ в L'_1 проходит вершины $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_4, v_3, \dots$ и, если \mathcal{M} π -моделирует \mathcal{M}_τ в L'_1 , то он имеет на входе $(|v_0| = \{e, n\}, |v_1| = \{s, e\}, |v_2| = \{w, s\}, |v_3| = \{n, w\}, |v_4| = \{e, n\}, \dots)$, а на выходе – (n, e, s, w, n, \dots) .

Это означает, что в L'_2 автомат \mathcal{M} пройдет последовательно вершины $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0, v_1, \dots)$, но не $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_0, v_3, \dots)$, которые проходит в L'_2 \mathcal{M}_τ . Что и требовалось показать.

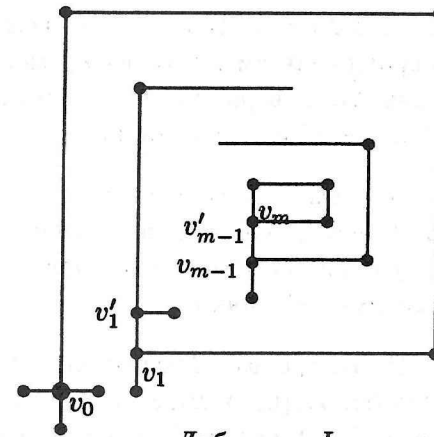
Для доказательства 2) рассмотрим семейство лабиринтов $\mathcal{L}'' = \{L_m\}_{m=1}^\infty$, где L_m имеет m витков (см. рис. ниже). Рядом с рисунком лабиринта описаны инструкции \mathcal{M}_τ . Недостающие строки (для $\downarrow, \uparrow, \dots$), а также *, соответствуют инструкциям, доопределяемым произвольно; знак '–' означает $0 \vee 1$. Автомат \mathcal{M}_τ красит только



Лабиринт L'_1



Лабиринт L'_2



Лабиринт L_m

Вход \ сост.:	q_0	q_1
$\uparrow, -$	$\uparrow q_0$	*
$\leftarrow, -$	$\leftarrow q_0$	*
$\lceil, -$	$\downarrow q_0$	$\rightarrow q_1$
$\rceil, -$	$\leftarrow q_0$	$\downarrow q_1$
$\downarrow, -$	$\uparrow q_0$	$\leftarrow q_1$
$\updownarrow, -$	$\downarrow q_0$	$\uparrow q_1$
$\vdash, 0$	$\rightarrow q_0$	$\uparrow q_1$
$\vdash, 1$	$\downarrow q_0$	$\rightarrow q_0$
$\vdash, -$	$\uparrow q_1$	$\uparrow q_1$

вершины с отметкой '†', то есть v_i и $v'_i, i = 1, \dots, m$. Из определения \mathcal{M}_τ видно, что в L_m он, начиная с произвольной вершины, приходит в v_0 и из нее совершает периодическое движение по лабиринту, проходя до $v_m = v'_{m-1}$ и обратно в v_0 .

Пусть \mathcal{M} – автомат без краски. Обозначим для него через $V_\pi(L_m)$ множество всех вершин $u \in V(L_m)$, таких что в инициальном лабиринте $L_{m,u}$ он π -моделирует \mathcal{M}_τ . Обозначим через $Q'(L_m)$ множество состояний, в которых \mathcal{M} приходит в v_0 , стартуя со всевозможных u из $V_\pi(L_m)$. Аналогично показанному при доказательстве 1) легко показать, что если \mathcal{M} π -моделирует \mathcal{M}_τ в L_m , стартуя из v_0 , то он не моделирует его в $L_l, l > m$, стартуя из v_0 в том же состоянии ("сбой" происходит в v_m). Отсюда $Q'_m \cap Q'_l = \emptyset$, если $m \neq l$; значит, в силу конечности памяти автомата \mathcal{M} , существует лишь конечное число индексов m , таких что $Q'_m \neq \emptyset$. А это и означает, что \mathcal{M} только в конечном числе лабиринтов из \mathcal{L}'' может слабо π -моделировать автомат \mathcal{M}_τ .

4. Автоматы с периодической краской

Введем формальное определение автомата с периодической краской.

Определение 5. Автомат \mathcal{M}_γ является лабиринтным автоматом с γ -периодической краской, если раскрашенная им в момент времени $t_0 + 1$ вершина (t_0 – момент стояния \mathcal{M}_γ в вершине) будет иметь отметку '1' при $t = t_0 + 1 + k\gamma$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и '0' в остальное время.

Лемма 6. Пусть \mathcal{M}_0 — ЛА с одной краской, тогда для любого $\gamma \in \mathbb{N}$ существует ЛА с γ -периодической краской и с возможностью задержки в вершинах лабиринта на 1 такт времени, s -моделирующий \mathcal{M}_0 в любом инициальном лабиринте.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}_0 = (A_1, Q, B_1, \varphi, \psi, q_0)$. Тогда определим автомат $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ как шестерку $(A_1, Q \times B \times G \times \{0, 1\}, B_1, \varphi', \psi', q'_0)$, где $G = \{0, \dots, 3\gamma\}$ и $q'_0 = (q_0, b_0, 0, 0)$, $b_0 \in D$. Покажем, что его можно определить так, чтобы, переходя из любой вершины v_s в соседнюю v_f , он умел бы распознавать не только текущую раскраску v_f , но и ее раскраску вообще; параллельно на уровне алгоритма опишем один шаг s -моделирования им автомата \mathcal{M}_0 .

Пусть автомат $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ находится в состоянии $q' = (q_s, b, 0, x)$ в вершине v_s (x соответствует раскраске вершины v_s , как ее определил $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ на предыдущем шаге). Тогда он, на основании инструкций \mathcal{M}_0 , вычисляет и запоминает метку \bar{b} ребра (v_s, v_f) , а также определяет новую раскраску \bar{k} вершины v_s и новое состояние q_f : $(\bar{b}, \bar{k}) = \psi(|v_s|, x, q_s)$, $q_f = \varphi(|v_s|, x, q_s)$; переходит в v_f по ребру с меткой \bar{b} , раскрашивает v_s соответственно \bar{k} и меняет свое состояние на $q' = (q_f, \bar{b}, 1, 0)$. Далее $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ осуществляет поиск краски в v_f в два этапа:

1) перемещается из v_f в v_s (по ребру с меткой \bar{b}^{-1}) и обратно (по ребру с меткой \bar{b}) γ раз, исследуя при этом текущую раскраску v_f ; для этого на каждой итерации $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ меняет состояние "счетчика" g на $g + 1$, если краска не обнаружена, и останавливается, переходя в состояние $q' = (q_f, \bar{b}, 0, 1)$, если краска обнаружена (на этом заканчивается один шаг s -моделирования).

2) Если краска в v_f на предыдущем этапе не обнаружена ($g = 2\gamma - 1$), то $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ ждет 1 такт в v_f , после чего перемещается в v_s и обратно еще $[\gamma/2]$ ($[\cdot]$ – целая часть) раз, исследуя раскраску v_f ,

как на первом этапе. Если в конце этого этапа краска в v_f не обнаружена (то есть, $q' = (q_f, \bar{b}, 2\gamma + 2[\gamma/2], 0)$), то автомат $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ завершает шаг s -моделирования, оставаясь в v_f и меняя свое состояние на $q' = (q_f, \bar{b}, 0, 0)$.

Докажем, что (1)-(2) дает распознавание раскраски вершины v_f .

Пусть вершина v_f РАСКРАШЕНА. Обозначим через t_s момент начала одного шага моделирования (\mathcal{M}_γ находится в v_s), а через $t_i = t_s + \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$ – моменты i -го появления краски в v_f ; при этом ясно, что $1 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq 2\gamma < \gamma_3 \leq 3\gamma$.

Рассмотрим случай, когда γ четно. Пусть odd – функция четности; тогда $\text{odd}(\gamma_1) = \text{odd}(\gamma_2) = \text{odd}(\gamma_3)$. Из описания (1)-(2) следует, что на этапе (1) автомат \mathcal{M}_γ появляется в v_f в моменты времени $t_s + t'$, где $t' = 1, 3, \dots, 2\gamma - 1$ (то есть все нечетные, меньшие 2γ), а на втором этапе – при $t_s + t'$, где $t' = 2\gamma, 2\gamma + 2, 2\gamma + 4, \dots, 2\gamma + 2[\gamma/2]$ (то есть все четные из интервала $[2\gamma; 3\gamma]$). Поэтому, если γ_1 нечетно, то \mathcal{M}_γ увидит краску в момент $t_1 = t_s + \gamma_1$ – на этапе (1); а если γ_1 четно (а значит γ_2 и γ_3 тоже), то в момент t_3 – на этапе (2).

Пусть теперь γ нечетно. Тогда $\text{odd}(\gamma_1) \neq \text{odd}(\gamma_2)$; следовательно, либо γ_1 , либо γ_2 нечетно, и поэтому \mathcal{M}_γ обнаружит краску на этапе (1).

Если, теперь, вершина v_f НЕ РАСКРАШЕНА, то ясно, что на выходе (1)-(2) будет $q' = (q_f, \bar{b}, 0, 0)$, что и означает в терминах автомата $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ отсутствие краски в v_f . Что и требовалось доказать.

Наконец, докажем по индукции, что автомат, один шаг работы которого описан выше, будет s -моделировать \mathcal{M}_0 в любом инициальном лабиринте L_{v_0} . Пусть траектория \mathcal{M}_0 в L_{v_0} есть $(u_0 = v_0, u_1, u_2, \dots)$.

I. База индукции, $u_0 \rightarrow u_1$.

Из описания одного шага работы $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ и его начального состояния q'_0 следует, что он перейдет в ту же, что и \mathcal{M}_0 , вершину u_1 , правильно определит ее раскраску и правильно раскрасит u_0 .

II. Индуктивное предположение, u_i .

Заключается в том, что все пройденные вершины одинаково окрашены \mathcal{M}_0 и $\mathcal{M}_{\gamma,1}$, $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ не заходил в вершины, которые \mathcal{M}_0 не посе-

шал, и $\mathcal{M}_{\gamma,1}$ правильно распознал раскраску вершины u_i .

III. **Индуктивный переход**, $u_i \rightarrow u_{i+1}$.

Непосредственно доказывается из обоснования одного шага моделирования (заменой u_i, u_{i+1} на v_s, v_f).

Следствием теоремы 1 из [4] и Леммы 6 является

Теорема 3. *Для любого $\gamma \in \mathbb{N}$ существует ЛА с γ -периодической раскраской и возможностью задержки на один такт времени, сильно обходящий любой прямоугольный лабиринт.*

Теперь сформулируем критерий обходимости для автоматов без задержки.

Теорема 4. (Критерий для автоматов с периодической раскраской). *В классе автоматов без задержки с γ -периодической раскраской существует универсальный для \mathcal{L} автомат тогда и только тогда, когда γ нечетно.*

Доказательство. (\Leftarrow) Пусть γ нечетно. Тогда автомат из Леммы 6 с циклом проверки, равным 2γ , и без задержки s -моделирует автомат с раскраской в произвольном лабиринте; в том числе и универсальный обходящий автомат из [4]. Следовательно он по лемме 1, будет также универсальным для \mathcal{L} .

(\Rightarrow) Покажем, что в классе автоматов без задержки с четнопериодической раскраской нет универсального автомата. Для этого по произвольному автомату \mathcal{M}_γ из этого класса построим лабиринт, который \mathcal{M}_γ не обходит. Рассмотрим автомат без краски \mathcal{M}_0 , получающийся из \mathcal{M}_γ путем замены функции $\varphi(a_i, k, q_j)$ на $\varphi_0(a_i, q_j) := \varphi(a_i, 0, q_j)$ и функции $\psi(a_i, k, q_j)$ на $\psi_0(a_i, q_j) := b_r$, если $\psi(a_i, 0, q_j) = (b_r, k')$. Ясно, что \mathcal{M}_0 π -моделирует \mathcal{M}_γ , как если бы тот "не видел" раскраску вершин, в которые он возвращается.

Для \mathcal{M}_0 существует мозаичный лабиринт \tilde{L} , который он не обходит ([2]). Используя то, что любой простой цикл в \tilde{L} состоит из четного числа ребер, покажем, что траектория \mathcal{M}_γ в нем будет совпадать с траекторией \mathcal{M}_0 (тогда по лемме 2 автомат \mathcal{M}_γ

также не обходит \tilde{L}). Для этого достаточно доказать, что выходя из любой вершины v_h в момент времени t_h , \mathcal{M}_γ будет возвращаться в нее в моменты времени $t_j^{(r)}(v_h) = t_h + 2d_j$, $d_j \in \mathbb{N}$ и, следовательно, не сможет увидеть в v_h раскраску, которая появляется там при $t_i^{(k)}(v_h) = t_h + 1 + \gamma \cdot i$, $i \in \mathbb{N}$ (из-за четности $2d$ и нечетности $1 + \gamma \cdot i$). Действительно, если \mathcal{M}_γ возвращается в v_h по тривиальному циклу, то каждое ребро в нем проходится четное число раз (один или несколько раз "туда-обратно"). То есть длина такого цикла четна и, значит, \mathcal{M}_γ проходит его за $2d$ тактов времени, где d – некоторое натуральное число. Если же \mathcal{M}_γ возвращается в v_h по простому циклу, то каждое ребро в нем он проходит нечетное число раз: ("туда-обратно") $\times n$ + "туда". По построению \tilde{L} каждый простой цикл в нем содержит четное число ребер, следовательно, и по простому циклу \mathcal{M}_γ возвращается в v_h за четное число тактов времени. Смешанный же цикл является объединением некоторого числа циклов первых двух типов. Таким образом, автомат \mathcal{M}_γ , выходя из любой вершины v_h , будет возвращаться в нее только через четное число тактов времени, что и доказывает совпадение траекторий в \tilde{L} двух автоматов \mathcal{M}_0 и \mathcal{M}_γ . Поэтому \mathcal{M}_γ также не обходит лабиринт \tilde{L} , то есть не является универсальным.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах. // Дискретная математика. 1992. Том 4. Вып. 3. С. 3–28.
- [2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М. Наука. 1985.
- [3] Кудрявцев Г.Ю. О времени решения лабиринтных задач конечными автоматами. Дис. канд. физ.-мат. наук. Саратов. 1990.
- [4] Насыров А.З. Об обходе лабиринтов автоматами, оставляющими нестираемые отметки. // Дискретная математика. 1997. Том 9. Вып. 1. С. 123–133.