О возможности поимки жертв в квадранте*

Н. Ю. Волков

Изучается процесс преследования коллективом автоматов («хищников») нескольких независимых друг от друга автоматов («жертв»). Преследование происходит в лабиринте, представляющем собой квадрант. Показано, что существует конечный коллектив хищников, который «ловит» любую конечную независимую систему жертв с фиксированными скоростями и обзорами при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников.

1. Введение

Рассматривается автоматный аналог ситуации преследования хищниками своих жертв. В работах [6], [8] показано, что если преследование происходит на целочисленной плоскости, полуплоскости, в полосе или полуполосе произвольной ширины, то существует конечный коллектив хищников, который ловит любую конечную независимую систему жертв с фиксированными скоростями и обзорами при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников. В данной работе установлено, что этот результат имеет место не только для лабиринтов, в которых автомат из независимой системы имеет периодическое поведение. Построен коллектив хищников, осуществляющий в квадранте поимку произвольной конечной независимой системы жертв таких, что их скорость меньше скорости хищников более чем в 3 раза, и их обзор не больше обзора хищников.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00240).

В качестве пространства преследования рассматривается лабиринт, являющийся подмножеством плоскости, разбитой на квадраты целочисленной решеткой и представляющий собой квадрант. Также, как и в работах [6] и [8], хищники и жертвы представляются в виде автоматов, которые, находясь в какой-либо клетке лабиринта, умеют обозревать некоторую ее окрестность, и, в зависимости от вида (конфигурации) этой окрестности (то есть от расположения границы лабиринта и других автоматов в этой окрестности) и своего состояния, способны перемещаться в другую клетку лабиринта. Автоматы-хищники и автоматы-жертвы в начале процесса образуют определенную диспозицию, находясь в своих начальных состояниях. После этого начинается процесс перемещения автоматов. Внутренние логики автоматов в совокупности определяют этот процесс. Жертва считается пойманной, если она оказалась в фиксированной окрестности одного из хищников.

Предполагается, что каждая жертва «не видит» других жертв, но видит хищников, попавших в ее зону обзора. Хищники «видят» и жертв и друг друга на расстоянии своего обзора. Таким образом, жертвы представляют собой независимую систему автоматов, а хищники — коллектив автоматов.

Фиксируются скорости и обзоры хищников и жертв так, чтобы обзор хищников был не меньше обзора жертв, а скорость хищников превосходила скорость жертв более чем в 3 раза.

Решается следующая задача. Существуют ли коллектив хищников K и их начальное расположение в квадранте, такие, что для любой независимой системы жертв S и любого их начального расположения в квадранте, с течением времени все жертвы будут пойманы хищниками?

Показывается, что данная задача решается положительно. Строится в явном виде коллектив хищников, ловящий в квадранте любую конечную независимую систему жертв с фиксированными скоростями и обзорами.

Автор работы выражает признательность В. Б. Кудрявцеву за научное руководство, а также В. С. Половникову, высказавшему ряд ценных замечаний.

2. Постановка задачи и основные результаты

Будем использовать стандартные обозначения для множеств натуральных и целых чисел $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, соответственно. Положим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Множество клеток, на которые плоскость разбивается целочисленной решеткой, обозначим через $\mathbb{Z}^2$, сопоставляя каждой клетке координаты ее нижнего левого угла.

Будем называть две клетки, принадлежащих $\mathbb{Z}^2$, *соседними*, если эти клетки имеют общую сторону. *Оболочкой* произвольного множества $\mathcal{Y} \subset \mathbb{Z}^2$ назовем множество, состоящее из клеток множества $\mathcal{Y}$, а также из всех клеток, которые являются соседними для какой-либо клетки $\mathcal{Y}$. Оболочку множества $\mathcal{Y}$ обозначаем $\overline{\mathcal{Y}}$.

Лабиринт, состоящий из клеток с положительными обеими координатами, назовем *квадрантом* и будем обозначать как L_4 ($L_4 = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{N}\}$). Назовем r-окрестностью клетки (x_0, y_0) множество

$$D_{(x_0,y_0),r} = \{(x, y) \,|\, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\,,\, (\,|x - x_0| + |y - y_0|\,) \leqslant r\},$$

где $r \in \mathbb{N}_0$. Будем считать, что задана определенная нумерация клеток множества $D_{(x_0,y_0),r}$.

Под автоматом будем понимать инициальный конечный автомат (см. [2]) вида $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, где A — входной, B — выходной, Q — внутренний алфавиты автомата $\mathcal{A}$, $\varphi : Q \times A \to Q$ и $\psi : Q \times A \to B$ — функции переходов и выходов $\mathcal{A}$, соответственно, $q_0 \in Q$ — его начальное состояние. Алфавит A определяет возможности $\mathcal{A}$ «видеть» происходящее вокруг, а алфавит B — его возможности перемещаться. Алфавит Q и функции φ и ψ задают внутреннюю логику автомата $\mathcal{A}$.

Рассмотрим автомат $\mathcal{A}$, перемещающийся по L_4. Выходным алфавитом $\mathcal{A}$ является множество $B = D_{(0,0),V}$, где параметр $V \in \mathbb{N}$ называется *скоростью автомата* $\mathcal{A}$. Входной алфавит $\mathcal{A}$ зависит от параметра $R \in \mathbb{N}$ ($R \geqslant V$), называемого *обзором автомата* $\mathcal{A}$ и способа взаимодействия $\mathcal{A}$ с другими автоматами. Возможны два случая такого взаимодействия:

1) $\mathcal{A}$ является элементом независимой системы автоматов;

2) $\mathcal{A}$ является элементом коллектива автоматов.

Автомат со скоростью V и обзором R будем обозначать как $\mathcal{A}(R,V)$. Пусть $\mathcal{A}(R,V)$ находится в клетке (x_0,y_0). Множество $D_{(x_0,y_0),V} \cap L_4$ называется *окрестностью хода* $\mathcal{A}$, а множество $\overline{D_{(x_0,y_0),(R-1)} \cap L_4}$ — *зоной обзора* $\mathcal{A}$.

Рассмотрим две системы автоматов $K = (W_1,\dots,W_m)(R,V)$ (хищники) и $S = (U_1,\dots,U_n)(R',V')$ (жертвы), где R и R' — обзоры, а V и V' — скорости хищников и жертв, соответственно. Здесь S — независимая система автоматов, K — коллектив. Пусть каждая жертва U_i находится в клетке (x'_i,y'_i) лабиринта L_4, а каждый хищник W_j находится в клетке (x_j,y_j) лабиринта L_4 в состоянии q_j.

Положим $N' = (R'+1)^2 + (R')^2$ — количество клеток множества $D_{(x_0,y_0),R'}$, то есть, максимально возможный размер зоны обзора жертвы (это число одинаково для всех клеток (x_0,y_0)). Для каждого $i = 1,\dots,n$ определим строку $(a'_1,\dots,a'_{N'})$ следующим образом. Для любого $k = 1,\dots,N'$

$$a'_k = \begin{cases} -1, & \text{если } k\text{-я клетка множества } D_{(x'_i,y'_i),R'} \\ & \text{не принадлежит лабиринту } L_4; \\ 1, & \text{если в } k\text{-й клетке множества } D_{(x'_i,y'_i),R'} \text{ находится} \\ & \text{хотя бы один хищник;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Строку $(a'_1,\dots,a'_{N'})$ назовем *U_i-конфигурацией*. Каждая U_i-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, а также клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники.

Положим $N = (R+1)^2 + R^2$ — количество клеток множества $D_{(x_0,y_0),R}$, то есть, максимально возможный размер зоны обзора хищника (это число также одинаково для всех клеток (x_0,y_0)). Для каждого $j = 1,\dots,m$ определим строку $(a_1,\dots,a_{N+m})$ следующим образом. Для любого $k = 1,\dots,N$

$$a_k = \begin{cases} -1, & \text{если } k\text{-я клетка множества } D_{(x_j,y_j),R} \\ & \text{не принадлежит лабиринту } L_4; \\ 1, & \text{если в } k\text{-й клетке множества } D_{(x_j,y_j),R} \text{ находится} \\ & \text{хотя бы одна жертва;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим внутренний алфавит W_j как Q_j, а множество всех пар вида $((x,y),q)$, где $(x,y) \in D_{(0,0),R}$, $q \in \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$ — как M. Положим для любого $p = 1,\ldots,m$, $p \neq j$

$$a_{N+p} = \begin{cases} (\,(x_p - x_j,\, y_p - y_j),\, q_p\,), & \text{если } |x_p - x_j| + |y_p - y_j| \leqslant R; \\ \Lambda, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (2)$$

Положим

$$a_{N+j} = \Lambda. \qquad (3)$$

Строку $(a_1,\ldots,a_{N+m})$, определенную равенствами (1) – (3), назовем *W_j-конфигурацией.* Легко видеть, что $a_{N+p} \in (M \cup \{\Lambda\})$ при $p = 1 \ldots m$. Каждая W_j-конфигурация однозначно задает клетки зоны обзора W_j, не принадлежащие лабиринту, клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы, а также расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j.

Расположения в лабиринте L_4 жертв и хищников и состояния хищников однозначно задают все U_i-конфигурации и все W_j-конфигурации. Множества всех U_i-конфигураций и всех W_j-конфигураций при всевозможных расположениях жертв и хищников и состояниях хищников конечны. Обозначим множество всех U_i-конфигураций как F'. Аналогично, множество всех W_j-конфигураций обозначим как F. Входным алфавитом каждой жертвы U_i является множество всех пар вида $(\mathcal{F}'_1,\mathcal{F}'_2)$, где $\mathcal{F}'_1 \in (\{\varnothing\} \cup F')$, а $\mathcal{F}'_2 \in F'$. Входным алфавитом каждого хищника W_j является множество всех пар вида $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$, где $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2 \in F$.

Момент времени 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ называется *τ-моментом хода жертв.* Момент $(2\tau+1)$ называется *τ-моментом хода хищников.* Промежуток времени $[2\tau,(2\tau+1)]$ называется *тактом с номером τ.* Время взаимодействия автоматов будем измерять в тактах.

Преследование коллективом хищников независимой системы жертв происходит так. Фиксируются начальные (в нулевой момент времени) расположения всех хищников и жертв на плоскости. В нулевой момент каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\varnothing,\mathcal{F}'_2)$, где U_i-конфигурация $\mathcal{F}'_2$ задает клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, и клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники. В момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N})$ каждая жертва U_i воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}'_1,\mathcal{F}'_2)$, задающую клетки зоны обзора U_i, не принадлежащие лабиринту, и клетки зоны обзора U_i, в которых находятся хищники в момент $(2\tau - 1)$ и в момент 2τ. В каждый момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ жертва U_i, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\overline{b}$, и перемещается на вектор $\overline{b}$.

В момент $(2\tau + 1)$ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$ хищник W_j воспринимает в качестве входного символа пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, задающую клетки зоны обзора W_j, не принадлежащие лабиринту, расположения и состояния других хищников, находящихся в зоне обзора W_j, а также клетки зоны обзора W_j, в которых находятся жертвы в момент 2τ и в момент $(2\tau+1)$, и, в соответствии со своими функциями переходов и выходов, определяет свое следующее состояние, выходной символ $\overline{b}$, и перемещается на вектор $\overline{b}$.

Будем рассматривать только такие автоматы (жертв и хищников), для которых перемещение на вектор, равный выходному символу $\overline{b}$ никогда не выводит за пределы лабиринта, в котором происходит преследование.

Система хищников K «ловит» жертву, если жертва в некоторый момент времени оказалась в окрестности хода одного из хищников. Пойманная жертва исчезает из лабиринта. K «ловит» независимую систему жертв, если в процессе преследования K ловит каждую жертву.

Ставится вопрос: существуют ли коллектив хищников K и их начальное расположение в лабиринте L_4, такие, что для любой независимой системы жертв S и любого их начального расположения в L_4, коллектив K ловит S.

Расположение системы автоматов в лабиринте, при котором все эти автоматы находятся в одной клетке, назовем *каноническим.* Зафиксируем $R, V \in \mathbb{N}$, такие что $4 \leqslant V \leqslant R$. Получен следующий результат.

Теорема 1. *При $V > 3 \cdot V'$, существует коллектив хищников $K(R,V)$, который, стартуя из любого канонического расположения в L_4, ловит любую конечную независимую систему жертв $S(R,V')$, при любом их начальном расположении в L_4.*

3. Доказательство возможности поимки всех периодических жертв

Лабиринт, состоящий из всех клеток целочисленной плоскости $\mathbb{Z}^2$ назовем *плоскостью* и будем обозначать как L_0 $(L_0 = \{(x, y)\,|\,x, y \in \mathbb{Z}\})$, лабиринт, состоящий из клеток с положительной второй координатой, назовем *полуплоскостью* и будем обозначать как L_1 $(L_1 = \{(x, y)\,|\,x \in \mathbb{Z},\, y \in \mathbb{N}\})$, лабиринты $L_2(l) = \{(x, y)\,|\,0 < y \leqslant l,\, x, y \in \mathbb{Z}\}$ и $L_3(l) = \{(x, y)\,|\,0 < y \leqslant l,\, x, y \in \mathbb{N}\}$ назовем *l-полосой* и *l-полуполосой*, соответственно. В дальнейшем будем считать, что лабиринт L является одним из вышеописанных лабиринтов, то есть $L \in \{L_0, L_1, L_4\} \cup \{L_2(l)\,|\,l \in \mathbb{N}\} \cup \{L_3(l)\,|\,l \in \mathbb{N}\}\,|\,l \in \mathbb{N}\}$.

В работах [6] и [8], аналогично предыдущему разделу, определены правила, по которым хищники и жертвы могут перемещаться в вышеописанных лабиринтах. Ниже мы будем использовать некоторые леммы, доказанные в [6] и [8].

Множества $\{(x, y)\,|\,y = 0,\, x \in \mathbb{N}_0\}$ и $\{(x, y)\,|\,x = 0,\, y \in \mathbb{N}_0\}$ назовем, соответственно, *нижним* и *левым бортами* лабиринта L_4. Клетку $(0, 0)$ назовем *углом* лабиринта L_4.

Будем говорить, что *автомат $\mathcal{A}(R, V)$ видит некоторый борт лабиринта на расстоянии* h $(h \in \mathbb{N},\, h \leqslant R)$, если хотя бы одна клетка этого борта находится в h-окрестности клетки, в которой находится $\mathcal{A}$, причем ни одна клетка этого борта не находится в $(h-1)$-окрестности клетки, в которой находится $\mathcal{A}$. Если существует $h \in \mathbb{N},\ h \leqslant R$, такое, что автомат $\mathcal{A}$ видит некоторый борт лабиринта на расстоянии h, будем говорить, что $\mathcal{A}$ *видит* этот борт.

Аналогично определяются ситуации, в которых будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_1$ видит автомат $\mathcal{A}_2$ на расстоянии h $(h \leqslant R)$, или $\mathcal{A}_1$ видит автомат $\mathcal{A}_2$.

Будем говорить, что *автомат $\mathcal{A}$ видит угол лабиринта*, если $\mathcal{A}$ видит одновременно левый и нижний борта.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ перемещается в лабиринте L и его выходные символы в такты $\tau_1, \tau_1 + 1, \ldots, \tau_2$ равны $\overline{b}_{\tau_1}, \overline{b}_{\tau_1+1}, \ldots, \overline{b}_{\tau_2}$, соответственно. *Вектором перемещения* (или просто *перемещением*) *автомата $\mathcal{A}$ за промежуток времени* $[\tau_1, \tau_2]$ называется вектор $\vec{s} = \overline{b}_{\tau_1} + \overline{b}_{\tau_1+1} + \ldots + \overline{b}_{\tau_2}$. Пусть вектор $\vec{s}$ имеет координаты s_1 и s_2 $(\vec{s} = (s_1, s_2))$. Положим $|\vec{s}| = |s_1| + |s_2|$.

Если существует $d \in \mathbb{N}$, такое что, для любого $\tau_0 \in \mathbb{N}_0$, перемещение автомата $\mathcal{A}$ за промежуток времени $[\tau_0, \tau_0 + d]$ равно 0, будем говорить, что траектория автомата $\mathcal{A}$ — *периодическая.*

Определим схему функционирования системы автоматов так же, как в работе [6]. *Схема функционирования системы автоматов* это набор записей следующего вида. Первая запись содержит пары вида (наименование автомата, внутренний алфавит) для каждого автомата системы. Например,

1) $(U_1, \{q_1, q_2\})$, $(U_2, \{q\})$.

Остальные записи содержат наименование автомата (например, U_1), условия, в которых он может находиться, и его поведение в этих условиях (между условиями и поведением автомата ставится разделяющий символ $\to$). Условия — это некоторое подмножество декартова произведения внутреннего и входного алфавитов U_1. Поведение — это элемент декартова произведения внутреннего и выходного алфавитов U_1. Такая запись означает, что автомат U_1 в данном состоянии, получив данный входной символ, перейдет в соответствующее следующее состояние и выдаст соответствующий выходной символ. Если для какого-то автомата нет записи, соответствующей некоторым условиям, в которых он может находиться, подразумевается, что в этих условиях автомат не меняет состояние и стоит на месте. Например,

2) U_1, (q_1), $\to (q_2, (1, 0))$.

3) U_1, (q_2), $\to (q_1, (-1, 0))$.

Схема функционирования из строк 1)–3) задает систему автоматов (U_1, U_2), такую что U_1 в четные такты делает шаг вправо, а в нечетные — шаг влево, а U_2 стоит на месте. Как в этом примере, везде далее в случае, когда берется декартово произведение собственного подмножества внутреннего алфавита на входной алфавит, или декартово произведение собственного подмножества входного алфавита на внутренний алфавит, в схеме функционирования указывается только собственное подмножество. Схема функционирования системы автоматов корректна, если для каждого автомата каждый элемент декартова произведения его внутреннего и входного алфавитов встречается не более чем в одной записи. Корректно записанная схема функционирования однозначно задает систему автоматов. Если в первой строке схемы функционирования системы автоматов алфавиты автоматов заданы при помощи перечисления, то, если не оговорено противное, начальным состоянием каждого автомата является первый (в порядке перечисления) символ его внутреннего алфавита.

Пусть даны системы автоматов $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m) = (W_1, \ldots, W_m)(R, V)$ и $(\mathcal{A}_{m+1}, \ldots, \mathcal{A}_{m+n}) = (U_1, \ldots, U_n)(R', V')$, и заданы расположения этих автоматов в лабиринте L_4 и их состояния в текущий момент $(2\tau + 1)$ и предыдущий момент 2τ $(\tau \in \mathbb{N}_0)$. Введем следующие предикаты.

1) $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau+1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, 0 — иначе.

2) $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$ равен 1, если $\mathcal{A}_j$ в момент $(2\tau + 1)$ находится в h-окрестности $\mathcal{A}_i$, и $\mathcal{A}_j$ находится в состоянии q, и 0 — иначе.

3) $P''_h(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если существует натуральное число k, такое что $m+1 \leqslant k \leqslant m+n$ и $\mathcal{A}_k$ находился в h-окрестности $\mathcal{A}_i$ хотя бы в один из моментов $\{2\tau, (2\tau + 1)\}$, и $P''_h(\mathcal{A}_i) = 0$ — иначе.

4) $P^1_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau + 1)$ видит нижний борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.

5) $P^2_{bort}(\mathcal{A}_i)$ равен 1, если $\mathcal{A}_i$ в момент $(2\tau + 1)$ видит левый борт на расстоянии 1 от себя, и 0 — иначе.

При любых $h = 0, \ldots, R$, $i, j = 1, \ldots, m$, $q \in Q_j$ (Q_j — внутренний алфавит $\mathcal{A}_j$), входной символ автомата $\mathcal{A}_i$ однозначно определяет значение предикатов $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j)$, $P'_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j, q)$, $P''_h(\mathcal{A}_i)$, P^1_{bort} и P^2_{bort}. То есть каждый хищник $\mathcal{A}_i$ в каждый момент хода «знает» значение этих предикатов.

Если $P_h(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$ *в своей h-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит* $\mathcal{A}_j$). Если $P''_h(\mathcal{A}_i) = 1$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв в своей h-окрестности* (при $h = R$, будем говорить, что $\mathcal{A}_i$ *видит жертв*).

Будем говорить, что клетка (x, y) *расположена правее* клетки (x', y'), если $x - x' > 0$, и будем говорить, что клетка (x, y) *расположена левее* клетки (x', y'), если $x - x' < 0$. Аналогично, будем говорить, что клетка (x, y) *расположена выше* клетки (x', y'), если $y - y' > 0$, и будем говорить, что клетка (x, y) *расположена ниже* клетки (x', y'), если $y - y' < 0$.

Клетка (x_2, y_2) называется *ближайшей к клетке* (x_1, y_1) *клеткой*

V*-окрестности* (x_0, y_0) , если $(x_2, y_2) \in D_{(x_0,y_0),V}$, и для любой клетки (x_3, y_3) из $D_{(x_0,y_0),V}$ выполнено $|x_2-x_1|+|y_2-y_1| \leqslant |x_3-x_1|+|y_3-y_1|$, причем (x_2, y_2) является самой верхней среди самых правых клеток, удовлетворяющих данному набору неравенств. Легко видеть, что для любого лабиринта L одного из рассматриваемых типов верно, что если клетки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) принадлежат L, то и клетка (x_2, y_2) принадлежит L. Будем говорить, что автомат $\mathcal{A}(R, V)$, находящийся в клетке (x_0, y_0), сделал *ход к клетке* (x_1, y_1), если он за один такт переместился в клетку (x_2, y_2) — ближайшую к клетке (x_1, y_1) клетку V-окрестности (x_0, y_0) .

Рассмотрим преследование хищниками жертв в квадранте. Если автомат-жертва, стартуя (в отсутствие хищников) из некоторой клетки квадранта в течение своего функционирования бесконечное число раз видит нижний борт и бесконечное число раз видит левый борт, и при этом его траектория не периодическая, будем говорить, что траектория этого автомата при данном начальном расположении имеет *тип* 2, в противном случае будем говорить, что траектория этого автомата при данном начальном расположении имеет *тип* 1.

В работах [6] и [8] доказаны следующие леммы.

Лемма 1. *Произвольный автомат* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$ *с* n *состояниями, перемещающийся по плоскости так, что другие автоматы не попадают в его зону обзора, имеет периодическую последовательность выходных символов и длина периода этой последовательности* d*, длина предпериода* d_0 *и перемещение* $\vec{s}$ *автомата* $\mathcal{A}$ *за период этой последовательности удовлетворяют неравенствам* $d_0 + d \leqslant n$, $|\vec{s}| \leqslant V \cdot d$.

Лемма 2. *Произвольный автомат* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$ *с* n *состояниями, перемещающийся на полуплоскости так, что другие автоматы не попадают в его зону обзора, имеет периодическую последовательность выходных символов. Период этой последовательности* d *и вектор перемещения автомата за период этой последовательности* (s_1, s_2) *удовлетворяют соотношениям* $d \leqslant R \cdot (n + 1) \cdot n, \quad s_2 \geqslant 0$, $|s_1| + |s_2| \leqslant V \cdot d$.

(в работе [8] эта лемма имеет номер 2a)). Используя эти леммы, докажем аналогичную лемму для произвольного автомата $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$

с n состояниями, перемещающегося в квадранте так, что другие автоматы не попадают в его зону обзора.

Лемма 3. *Автомат $\mathcal{A}$ либо имеет периодическую последовательность выходных символов, либо его траектория имеет тип 2. В последнем случае, начиная с некоторого такта, перемещения $\mathcal{A}$ происходят так. Не позднее чем через $R \cdot (n+1) \cdot n$ тактов после того, как $\mathcal{A}$ увидит нижний $\langle$левый$\rangle$ борт, его выходные символы начнут периодически повторяться с периодом d, $d \leqslant n$, до тех пор, пока он не увидит левый $\langle$нижний$\rangle$ борт. Вектор (s_1, s_2) перемещения автомата $\mathcal{A}$ за d подряд идущих тактов на этом отрезке времени таков, что $s_1 < 0$, $s_2 > 0$ $\langle s_1 > 0, s_2 < 0\rangle$. Последовательность времен, которые тратит $\mathcal{A}$ для перемещения от борта к борту — бесконечно большая.*

Доказательство. Пусть автомат $\mathcal{A}$, начиная с некоторого такта времени не видит левого $\langle$нижнего$\rangle$ борта. Тогда он перемещается так же, как автомат на $\langle$повернутой на $\frac{\pi}{2}\rangle$ полуплоскости. По лемме 2, его последовательность выходных символов будет периодической. Следовательно, если автомат в квадранте имеет не периодическую последовательность выходных символов, то он бесконечное число раз видит оба борта, то есть имеет траекторию типа 2.

Пусть автомат $\mathcal{A}$ имеет траекторию типа 2. Так как его траектория не периодическая, он может находиться в $(2 \cdot R^2 \cdot (n+1)^2 \cdot V)$-окрестности угла лишь конечное число раз (в противном случае он зациклится). Рассмотрим функционирование $\mathcal{A}$ начиная с того такта, после которого он не оказывается в $(2 \cdot R^2 \cdot (n+1)^2 \cdot V)$-окрестности угла. На этом промежутке времени, автомат $\mathcal{A}$, видя нижний $\langle$левый$\rangle$ борт, обязательно находится от левого $\langle$нижнего$\rangle$ борта на расстоянии, не меньшем $(R^2 \cdot (n+1)^2 \cdot V)$. Значит, не менее $R^2 \cdot (n+1)^2$ тактов он перемещается так же, как автомат на $\langle$повернутой на $\frac{\pi}{2}\rangle$ полуплоскости. По лемме 2, его последовательность выходных символов на отрезке времени с момента данного попадания в R-окрестность нижнего $\langle$левого$\rangle$ борта, до момента попадания в R-окрестность другого борта, будет периодической с периодом d, $d \leqslant R \cdot (n+1) \cdot n$. Обозначим вектор перемещения автомата $\mathcal{A}$ за d подряд идущих тактов на этом отрезке времени как (s_1, s_2). Очевидно, $s_2 \geqslant 0$ $\langle s_1 \geqslant 0\rangle$. Если

$s_1 \geqslant 0$ $\langle s_2 \geqslant 0\rangle$, то автомат $\mathcal{A}$ никогда не увидит левого $\langle$нижнего$\rangle$ борта, что противоречит предположению, что $\mathcal{A}$ имеет траекторию типа 2. Если $s_1 < 0$, $s_2 = 0$ $\langle s_1 > 0, s_2 = 0\rangle$, то $\mathcal{A}$ снова оказывается в $(2 \cdot R^2 \cdot (n+1)^2 \cdot V)$-окрестности угла, что невозможно. Таким образом, приходим к заключению, что $s_1 < 0$, $s_2 > 0$ $\langle s_1 > 0, s_2 < 0\rangle$. Легко видеть, что не позднее чем через $d \cdot R$ тактов после данного попадания $\mathcal{A}$ в R-окрестность нижнего $\langle$левого$\rangle$ борта, он покинет R-окрестность этого борта. После этого он еще не менее $R^2 \cdot (n+1) \geqslant n$ тактов (до попадания в R-окрестность другого борта) будет перемещаться как автомат на плоскости. По лемме 1, $d \leqslant n$. Так как траектория $\mathcal{A}$ не периодическая, он может находиться в любой фиксированной окрестности угла лишь конечное число тактов (в противном случае он зациклится). Следовательно, длины, а значит и времена пробега от борта до борта неограниченно возрастают, образуя бесконечные последовательности. Лемма 3 доказана.

Определим функцию $sgn_0()$, которая возвращает 1, если ее аргумент неотрицателен, и -1 — в противном случае.

Если коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \geqslant h \geqslant 1)$, расположен в лабиринте L так, что каждый автомат $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ находится в клетке $(x_0 + a_i, y_0)$ (где $a_1 = 0$, $a_i \in \mathbb{N}_0$), а все остальные автоматы расположены в клетке (x_0, y_0), то будем говорить, что коллектив K находится в $(a_2, \ldots, a_h)$*-расстановке с центром* (x_0, y_0).

Если коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \geqslant h \geqslant 1)$, расположен в лабиринте L так, что каждый автомат $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ находится в клетке $(x_0, y_0 + a_i)$ (где $a_1 = 0$, $a_i \in \mathbb{N}_0$), а все остальные автоматы расположены в клетке (x_0, y_0), то будем говорить, что коллектив K находится в *вертикальной* $(a_2, \ldots, a_h)$*-расстановке с центром* (x_0, y_0).

Пусть зафиксирован набор натуральных чисел $i_1, \ldots, i_t$ $(1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leqslant h)$, и коллектив K расположен так, как описано выше, то есть $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ находится в клетке $(x_0 + a_i, y_0)$ $\langle(x_0, y_0 + a_i)\rangle$, $a_1 = 0$. Пусть теперь $a_i \in \mathbb{Z}$ при $i = i_1, \ldots, i_t$ (и $a_i \in \mathbb{N}_0$ при $i \neq i_1, \ldots, i_t$), и внутренний алфавит автомата $\mathcal{A}_1$ имеет вид $\{-1, 1\}^t \times Q$. Если при этом $\mathcal{A}_1$ находится в состоянии вида $(sgn_0(a_{i_1}), \ldots, sgn_0(a_{i_t}), q)$, то говорим, что коллектив K находится в $\langle$*вертикальной*$\rangle$ $(a_2, \ldots, a_h)$*-расстановке типа* $(i_1, \ldots, i_t)$ *с центром* (x_0, y_0).

Если лабиринт L имеет нижний борт, то $(a_2,\dots,a_h)$-расстановку с центром $(x_0,1)$ будем также называть *нижней* $(a_2,\dots,a_h)$*-расстановкой с центром* $(x_0,1)$, а $(a_2,\dots,a_h)$-расстановку типа $(i_1,\dots,i_t)$ с центром $(x_0,1)$ будем также называть *нижней* $(a_2,\dots,a_h)$*-расстановкой типа* $(i_1,\dots,i_t)$ *с центром* $(x_0,1)$. Если лабиринт L имеет левый борт, то вертикальную $(a_2,\dots,a_h)$-расстановку с центром $(1,y_0)$ будем также называть *левой* $(a_2,\dots,a_h)$*-расстановкой с центром* $(1,y_0)$, а вертикальную $(a_2,\dots,a_h)$-расстановку типа $(i_1,\dots,i_t)$ с центром $(1,y_0)$ будем также называть *левой* $(a_2,\dots,a_h)$*-расстановкой типа* $(i_1,\dots,i_t)$ *с центром* $(1,y_0)$.

Если τ_j — наименьший такт, начиная с которого автомат $\mathcal{A}_j$ не меняет состояния и его выходная последовательность (с такта τ_j) состоит из нулевых векторов, будем говорить, что автомат $\mathcal{A}_j$ остановился в такт τ_j. Если каждый $\mathcal{A}_j$ $(j=1,\dots,m)$ останавливается в такт τ_j, и $\tau=\max_{j\in\{1,\dots,m\}}\tau_j$, будем говорить, что коллектив $(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m)$ остановился в такт τ.

В работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости, доказана

Лемма 4. *Для любого* $c\in\mathbb{N}$ *существует коллектив* $K_c=(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_5)(V,V)$*, который, при произвольных* (x_0,y_0)*,* a,b*, таких что* $a\leqslant b$*, стартуя из* (a,b)*-расстановки с центром* (x_0,y_0)*, функционирует* $2a\cdot c\cdot]b/V[$ *тактов и останавливается в той же расстановке.*

(в работе [6] эта лемма имеет номер 3). Из построения коллектива K_c (см. [6]) очевидно, что этот коллектив, будучи помещен в лабиринт L_4, будет функционировать описанным в лемме образом. Таким образом, для автоматов, перемещающихся в квадранте, эта лемма также имеет место.

Пусть подколлектив $(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_5)$ коллектива $K=(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m)$ $(m\geqslant 8)$, находится в лабиринте L в (a_1,a_2,b,h_1)-расстановке с центром (x_0,y_0). Если при этом автоматы $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ и $\mathcal{A}_8$ находятся в клетках (x_0,y_0+h_2), (x_0+h_1,y_0+h_2) и (x_0+h_1,y_0+h_2) соответственно, а все остальные автоматы коллектива расположены в клетке (x_0,y_0), будем говорить, что коллектив K находится в *сильной* (a_1,a_2,b,h_1,h_2)*-расстановке с центром* (x_0,y_0). В работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости, вместо понятий (a_1, a_2, b)-расстановки и сильной (a_1, a_2, b, h_1, h_2)-расстановки используются понятия (a_1, a_2, b)-расстановки типа $(2, 3)$ и понятие расстановки, которую можно назвать сильной (a_1, a_2, b, h_1, h_2)-расстановкой типа $(2, 3, 5, 6)$, соответственно. Для таких коллективов в [6] доказана (под номером 4) лемма, которая для рассматриваемых здесь автоматов переформулируется так.

Лемма 5. *Для любого $c \in \mathbb{N}$ существует коллектив $K_c = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_9)(V, V)$, который, при произвольных (x_0, y_0), $b \in \mathbb{N}$, a_1, a_2, таких что $\max(a_1, a_2) \leqslant b$), стартуя из (a_1, a_2, b)-расстановки с центром (x_0, y_0), через $T = 2 \cdot (a_1 + a_2) \cdot (c+1) \cdot]b/V[$ тактов остановится в $(a_1, a_2, b,\ (2 \cdot a_1 \cdot c \cdot]b/V[\cdot V), (2 \cdot a_2 \cdot c \cdot]b/V[\cdot V))$-расстановке с центром (x_0, y_0).*

Из доказательства этой леммы (см. [6]) очевидно, что этот коллектив, будучи помещен в квадрант, будет функционировать описанным в лемме образом. Таким образом, лемма имеет место для автоматов, перемещающихся в квадранте.

Пусть автомат U перемещается в лабиринте L с периодической выходной последовательностью. Обозначим длину периода этой последовательности через d, длину предпериода — d_0, клетку, в которой U находится в такт d_0 — (x, y). Рассмотрим минимальное натуральное n, такое что $n \cdot d \geqslant d_0$. Обозначим перемещение U за период его выходной последовательности через (s_1, s_2), перемещение U за первые $(n \cdot d - d_0)$ тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности — (s'_1, s'_2), а перемещение U за последние d_0 тактов n подряд идущих периодов его выходной последовательности — (s''_1, s''_2). Назовем клетку целочисленной плоскости $(x_0, y_0) = (x, y) - (s''_1, s''_2)$ *условной клеткой старта* автомата U. Обратим внимание на то, что, вообще говоря, условная клетка старта автомата может не принадлежать лабиринту L. В обозначениях этого параграфа имеет место следующая лемма.

Лемма 6. *Для любого натурального $k \geqslant \frac{d_0}{d}$, автомат U в такт $k \cdot d$ находится в клетке $(x_0, y_0) + k \cdot (s_1, s_2)$.*

Эта лемма доказана в работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости (в работе [6] эта лемма имеет номер 7). Из доказательства (см. [6]), напрямую вытекает, что эта лемма верна для автоматов, перемещающихся в квадранте.

Назовем *h-четверкой* ($h \in \mathbb{N}$) четверку $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$, где $\tau_0, d, x, y \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{N}_0$, $d \leqslant \tau_0$, $s_1+s_2 \leqslant \min\{h{\cdot}d,\ \tau_0\}$. В работах [6] и [8] для автоматов, перемещающихся по плоскости, полуплоскости, и в других рассматриваемых лабиринтах, в определении h-четверки рассматриваются, соответсвтенно, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, $s_1 \in \mathbb{Z}, s_2 \in \mathbb{N}_0$, и т. д. Таким образом, в качестве третьего элемента h-четверки может рассматриваться только вектор, являющийся вектором перемещения некоторого автомата, имеющего скорость h, за период его выходной последовательности в лабиринте L.

h-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ характеризует автомат-жертву $U = U(R, h)$, перемещающийся в лабиринте L, если U имеет периодическую выходную последовательность с длиной периода, не превосходящей d, длиной предпериода, не превосходящей τ_0, вектор перемещения за период выходной последовательности (s_1, s_2) и условную клетку старта $(x_0, y_0) = (x, y) - i \cdot (s_1, s_2)$, при некотором $i \in \mathbb{N}_0$, $i \leqslant \tau_0$.

Коллектив $(W_1, \ldots, W_{10})(R, V)$ расположен в *$(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции*, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ — $(V-1)$-четверка, автоматы W_2, W_3, W_4 и W_{10} находятся в клетках $(x+s_1, y)$, $(x+s_2, y)$, $(x+\tau_0, y)$, $(x+(V-1)d, y)$ соответственно, а остальные автоматы — в клетке (x, y).

В работе [8] для автоматов, перемещающихся по полуплоскости, в l-полосе и в l-полуполосе доказана следующая лемма (в [8] данная лемма имеет номер 7).

Лемма 7. *Существует коллектив хищников $K{=}(W_1, ..., W_{10})(R{,}V)$, такой что для любой жертвы $U = U(R, V-1)$ коллектив K, стартуя в такт τ из $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, где $\tau \leqslant 3\tau_0$, останавливается в той же позиции, причем, если $(V-1)$-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2),\ (x, y))$ характеризует U, то K обнаруживает U.*

Из доказательства этой леммы (см. [8]) видно, что этот коллектив, будучи помещен в квадрант, будет функционировать описанным образом. Таким образом, лемма имеет место для автоматов, перемещающихся в квадранте.

В работе [6] для автоматов, перемещающихся по плоскости, доказана следующая лемма (в [6] она имеет номер 5).

Лемма 8. *Существует коллектив* $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)(V, V)$*, который, стартуя в такт* $\tau_0 \in \mathbb{N}$ *из* τ_0*-расстановки с центром* (x_0, y_0)*, в такт* $\widetilde{\tau}_0$ *окажется в* $(\widehat{\tau}_0, \widetilde{\tau}_0)$*-расстановке с центром* (x_0, y_0)*, где* $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$, $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2 \cdot]\tau_0/(V-1)[$.

Из построения коллектива K_c (см. [6]) очевидно, что этот коллектив будет функционировать описанным в лемме образом, будучи помещен в квадрант. Таким образом, лемма имеет место и для квадранта.

Состояние автомата назовем *финальным*, если попав в это состояние автомат останавливается (при любых входных символах). Пусть дан автомат $\mathcal{A}_1$ с начальными состояниями $q_0^1, \ldots, q_0^k$ и автомат $\mathcal{A}_2$. *Композицией автоматов* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ называется автомат с начальными состояниями $q_0^1, \ldots, q_0^k$, диаграмма Мура которого получена из объединения диаграмм Мура автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ отождествлением (склеиванием) каждого финального состояния автомата $\mathcal{A}_1$ с некоторым состоянием автомата $\mathcal{A}_2$. Склеивание состояний происходит по следующим правилам:

а) если автомат $\mathcal{A}_2$ имеет единственное начальное состояние, то все финальные состояния $\mathcal{A}_1$ склеиваются с начальным состоянием $\mathcal{A}_2$;

б) если автомат $\mathcal{A}_2$ имеет внутренний алфавит вида $Q \times Q_2$, причем все состояния (q, q_0) при фиксированном $q_0 \in Q_2$ и произвольном $q \in Q$ являются его начальными состояниями, а $\mathcal{A}_1$ имеет внутренний алфавит вида $Q \times Q_1$, причем все состояния (q, q_1) при фиксированном $q_1 \in Q_1$ и произвольном $q \in Q$ являются его финальными состояниями, то при произвольном $q \in Q$ состояние (q, q_1) автомата $\mathcal{A}_1$ склеивается с состоянием (q, q_0) автомата $\mathcal{A}_2$;

в) во всех случаях, кроме а), б), композиция автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ определена только в том случае, если специально указано, как производится склеивание финальных состояний $\mathcal{A}_1$ с состояниями $\mathcal{A}_2$.

Запись $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}$ означает, что строится автомат $\mathcal{A}$, равный композиции автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Рассмотрим коллективы автоматов $K(R, V) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ и $K'(R, V) = (\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_{m'})$ $(m \geqslant m')$. Пусть даны натуральные числа

$i_1, \ldots, i_{m'}$ $(1 \leqslant i_1, \ldots, i_{m'} \leqslant m)$, которые будем называть *стыковочными*. Введем понятие i_h-композиции коллективов K и K'.

i_h-композицией коллективов K и K' (где $h \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant h \leqslant m'$) называется коллектив $K'' = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)(R, V)$, автоматы которого определяются так.

1) $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_i$ при $i \neq i_p \, (p = 1, \ldots, m')$.

2) $\mathcal{B}_{i_h}$ есть композиция $\mathcal{A}_{i_h}$ и $\mathcal{A}'_h$.

3) Если автомат $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p = 1, \ldots, m'$, $p \neq h)$ не имеет финальных состояний, то $\mathcal{B}_{i_p} = \mathcal{A}_{i_p}$.

4) Если $\mathcal{A}_{i_p}$ $(p = 1, \ldots, m'$, $p \neq h)$ имеет финальные состояния, диаграмма Мура $\mathcal{B}_{i_p}$ получается из объединения диаграмм Мура $\mathcal{A}_{i_p}$ и $\mathcal{A}'_p$. Начальное состояние есть начальное состояние $\mathcal{A}_{i_p}$. Добавляются стрелки, описывающие следующие переходы: для каждого входного символа $\mathcal{A}'_p$, соответствующего тому, что некоторый $\mathcal{A}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m')$ находится в зоне обзора $\mathcal{A}'_p$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ из каждого состояния q_{i_p}, которое является финальным для $\mathcal{A}_{i_p}$, переходит в то же состояние и выдает тот же выходной символ, что и $\mathcal{A}'_p$ в некотором состоянии q'_p с этим же входным символом.

То есть, увидев автомат $\mathcal{B}_j$ в состоянии, являющимся состоянием $\mathcal{A}'_j$, автомат $\mathcal{B}_{i_p}$ выходит из финального состояния $\mathcal{A}_{i_p}$ и начинает функционировать как $\mathcal{A}'_p$ в состоянии q'_p. Состояние q'_p автомата $\mathcal{A}'p$ называется *сопоставленным состоянию* q_{i_p} автомата $\mathcal{A}_{i_p}$. Состояния сопоставляются друг другу следующим образом:

а) если $\mathcal{A}'_p$ имеет единственное начальное состояние, каждому финальному состоянию $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется начальное состояние автомата $\mathcal{A}'_p$.

б) если автомат $\mathcal{A}'_p$ имеет внутренний алфавит вида $Q \times Q_2$, причем все состояния (q, q_0) при фиксированном $q_0 \in Q_2$ и произвольном $q \in Q$ являются его начальными состояниями, а $\mathcal{A}_{i_p}$ имеет внутренний алфавит вида $Q \times Q_1$, причем все состояния (q, q_1) при фиксированном $q_1 \in Q_1$ и произвольном $q \in Q$ являются его финальными состояниями, то при произвольном $q \in Q$ состоянию (q, q_1) автомата $\mathcal{A}_{i_p}$ сопоставляется состояние (q, q_0) автомата $\mathcal{A}'_p$;

в) i_h-композиция K и K' определена только в том случае, если для всех $p \in \{1, \ldots, m'\}$, для которых $\mathcal{A}_{i_p}$ имеет финальные состояния, и не имеют места случаи а), б), специально указано, как производится сопоставление финальным состояниям $\mathcal{A}_{i_p}$ состояний $\mathcal{A}'_p$ (при $p = h$ речь идет не о сопоставлении, а о склеивании).

Содержательно, i_h-композиция — это коллектив K'', такой, что если при функционировании K автомат $\mathcal{A}_{i_h}$ обязательно останавливается, и все автоматы, которые останавливаются, останавливаются не позже, чем $\mathcal{A}_{i_h}$, то K'' сначала функционирует как K, а после того, как $\mathcal{A}_{i_h}$ остановится, те автоматы K'' с номерами $i_p \quad (p = 1, \dots, m')$, которые останавливаются, начинают действовать, как коллектив K', а остальные автоматы коллектива K'' функционируют так же, как функционировали в составе коллектива K.

Запись $(K \circ K')(i_1, \dots, i_{m'}) \xrightarrow{i_h} K''$ означает, что строится коллектив K'', по определению равный i_h-композиции коллективов K и K' при стыковочных числах $i_1, \dots, i_{m'}$.

Фиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}_0$. Построим упорядоченный набор M_k, элементами которого являются все вектора (s_1, s_2) $(s_1, s_2 \in \mathbb{N}_0)$, удовлетворяющие условию $(s_1 + s_2) = k$.

При $k = 0$ набор M_k состоит из одного элемента $z^0 = (0, 0)$.

Набор M_1 состоит из элементов z_1^1 и z_2^1 равных $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. При $k > 1$ набор M_k состоит из элементов $z_1^k, \dots, z_{k+1}^k$ соответственно равных $(k, 0), (k-1, 1), \dots, (0, k)$.

Пусть $(s_1, s_2) = z_j^k \quad (1 \leqslant j \leqslant k+1)$. Вектор (s'_1, s'_2) назовем *h-следующим за вектором* (s_1, s_2) $(h \in \mathbb{N})$, если $k \leqslant h$ и

$$(s'_1, s'_2) = \begin{cases} z_{j+1}^k & , j < k+1; \\ z_1^{k+1} & , j = k+1,\ k < h. \end{cases}$$

Для вектора $(s_1, s_2) = z_{h+1}^h$ h-следующий вектор не определен.

Таким образом, набор M_k определен при любых $k \in \mathbb{N}_0$. Набор M_k состоит только из векторов длины k (под длиной вектора (s_1, s_2) будем понимать число $|s_1| + |s_2|$), являющихся вектором перемещения некоторого автомата в лабиринте L_4 за период его выходной последовательности.

Если жертва U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в некоторый момент оказалась в зоне обзора хищника W_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, будем говорить, что коллектив хищников *обнаружил* ее. Будем также говорить, что W_j обнаружил U_i. Наименьший момент, в который это произошло, будем называть моментом обнаружения.

Коллектив $(W_1, \ldots, W_{11})(R, V)$ расположен в *сильной* $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$*-позиции*, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ — $(V-1)$-четверка, автоматы W_4 и W_{11} расположены в клетках (x, y) и $(x + \tau_0, y)$, соответственно, а расстановка подколлектива $(W_1, \ldots, W_{10})$ отличается от $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции лишь расположением W_4.

Коллектив хищников $K = (W_1, \ldots, W_{11})$ *обрабатывает автоматы с параметрами* (R, h) (где $h \in \mathbb{N}$), если для любой h-четверки $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$, такой что $(s_1, s_2) \in M_k$ (при некотором $k \in \mathbb{N}_0$), и любого автомата-жертвы $U = U(R, h)$, перемещающегося в лабиринте L, K, стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, функционирует так, что выполнены следующие условия.
1. K обнаруживает U, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ характеризует U.
2. Если определен $(h \cdot d)$-следующий за (s_1, s_2) вектор, и этот вектор равен (s_1', s_2'), то K оказывается в некоторый такт $\tau_0' \geqslant \tau_0$ в сильной $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$-позиции, и все автоматы K находятся в начальных состояниях.
3. Если $(h \cdot d)$-следующий за (s_1, s_2) вектор не определен, то K оказывается в некоторый такт $\tau_0' \geqslant \tau_0$ в сильной $(\tau_0', d+1, (0,0), (x, y))$-позиции, причем каждый из автоматов W_4 и W_5 останавливается в состоянии, отличном от начального, и все автоматы K, кроме W_{11}, останавливаются не позднее W_8.

Заметим, что при $\tau_0' \geqslant \tau_0 + 1$ если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ — $(V-1)$-четверка, то рассмотренные выше черверки $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$ и $(\tau_0', d+1, (0,0), (x, y))$ также являются $(V-1)$-четверками. Действительно, если $(s_1, s_2) \in M_k$ (при некотором $k \in \mathbb{N}_0$), то (s_1', s_2') принадлежит одному из наборов M_k, M_{k+1}. Свойства $(d+1) \leqslant \tau_0'$, и $(|s_1'|+|s_2'|) \leqslant \tau_0'$ следуют из того, что $(d+1) \leqslant \tau_0+1 \leqslant \tau_0'$ и $(|s_1'|+|s_2'|) \leqslant (|s_1|+|s_2|)+1 \leqslant \tau_0+1 \leqslant \tau_0'$. Свойство $(|s_1'|+|s_2'|) \leqslant (V-1) \cdot d$ следует из того, что $(|s_1'|+|s_2'|) \leqslant (|s_1|+|s_2|)+1$, $(|s_1|+|s_2|) \leqslant (V-1) \cdot d$ и $(|s_1'|+|s_2'|) = (|s_1|+|s_2|)+1$ только при $(|s_1|+|s_2|) < (V-1) \cdot d$.

Неподвижный автомат с 1 состоянием будем обозначать $\mathcal{H}_0$. Автомат, который за каждый такт смещается на 1 клетку вправо будем обозначать $\mathcal{H}_1$.

В работе [8] для автоматов, перемещающихся по полуплоскости, доказана следующая лемма.

Лемма 9. *Существует коллектив хищников* $K{=}(W_1,...,W_{11})(R{,}V)$, *который обрабатывает автоматы с параметрами* $(R, V-1)$.

Докажем, что эта лемма имеет место и для автоматов, перемещающихся в квадранте.

Доказательство. Будем рассматривать коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4)(V, V)$ из леммы 8, как имеющий обзор R. Этот коллектив, стартуя в такт τ_0 ($\tau_0 \in \mathbb{N}$) из τ_0-расстановки, в такт $\widetilde{\tau}_0$ окажется в горизонтальной $(\widehat{\tau}_0, \widetilde{\tau}_0)$-расстановке, где $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$, $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2]\tau_0/(V-1)[$.

Переобозначим коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{A}_3)$ как K_1, а коллектив из леммы 7 — как K_2.

$(K_1 \circ K_2)(1, \ldots, 10) \xrightarrow{5} K_3 = (\,\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{11}\,)(R, V)$.

Если K_3 стартовал в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, то в такт $\widetilde{\tau}_0$ подколлектив $(\,\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{10}\,)$ оказывается в $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, где $\widehat{\tau}_0 = \tau_0 +]\tau_0/(V-1)[$, $\widetilde{\tau}_0 = \tau_0 + 2]\tau_0/(V-1)[$. Имеют место неравенства

$$\widetilde{\tau}_0 \leqslant \tau_0 + \frac{2\tau_0}{V-1} + 2 \leqslant \tau_0 \cdot \frac{3V}{V-1} \leqslant 3 \cdot (\tau_0 + \frac{\tau_0}{V-1}) \leqslant 3\widehat{\tau}_0.$$

Следовательно, по лемме 7, коллектив K_3 в лабиринте L_4 обнаруживает жертву U, если $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$ (и, следовательно, $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x, y))\,)$ характеризует U, а затем останавливается в $(\widehat{\tau}_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции.

Построим коллектив $K_4 = (\,\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_6\,)(R, V)$, такой что коллектив $K = (\,W_1, \ldots, W_{11}\,)(R, V)$, являющийся 8-композицией коллективов K_3 и K_4, стартуя в квадранте в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$-позиции, сначала функционирует как K_3, а потом в некоторый такт τ_0' при $(s_1, s_2) \neq z^{(V-1)d}_{(V-1)d+1}$ коллектив K_1 останавливается в сильной $(\tau_0', d, (s_1', s_2'), (x, y))$-позиции, а при $(s_1, s_2) = z^{(V-1)d}_{(V-1)d+1}$ коллектив K_1 останавливается в сильной $(\tau_0', d+1, (0, 0), (x, y))$-позиции.

Приведем схему функционирования коллектива K_4.

1) $(\mathcal{B}_1,\{q^1\}), (\mathcal{B}_2,\{q^2\}), (\mathcal{B}_3,\{q^3_0, q^3_1, q^3_2\}), (\mathcal{B}_4,\{q^4_0, q^4_1\}), (\mathcal{B}_5,\{q^5_1, \ldots, q^5_{12}\}), (\mathcal{B}_6, \{q^6\})$.

Автомат $\mathcal{B}_5$ идет к автомату $\mathcal{B}_4$ и передвигает его в клетку (x, y).

2) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_1, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_4) = 0)$, $\to (q^5_1, (V, 0))$.

3) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_1, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_4) = 1)$, $\to (q^5_2$,(ход в расположение $\mathcal{B}_4$)).

4) $\mathcal{B}_5$, $(q_2^5, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 0)$, $\to (q_2^5, (-V, 0))$.
5) $\mathcal{B}_5$, $(q_2^5, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 1)$, $\to (q_3^5$,(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).
6) $\mathcal{B}_4$, $(q_0^4, (P_0'(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5, q_2^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_1) = 0))$, $\to (q_0^4, (-V, 0))$.
7) $\mathcal{B}_4$, $(q_0^4, (P_0'(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5, q_2^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}_4, \mathcal{B}_1) = 1))$, $\to (q_1^4 4$,(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).

При $(s_1, s_2) = (0, 0)$ автомат $\mathcal{B}_2$ смещается на вектор $(1, 0)$, а $\mathcal{B}_5$ переходит в финальное состояние q_6^5.
8) $\mathcal{B}_2$, $(q^2, (P_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = 1) \wedge (P_0'(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q_3^5) = 1))$, $\to (q^2, (1, 0))$.
9) $\mathcal{B}_5$, $(q_3^5, (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_3) = 1))$, $\to (q_6^5, (0, 0))$.

Если $(s_1, s_2) = (0, h)$ при некотором $h = 1, \ldots, (V-1) \cdot d$, автоматы $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_5$ идут к автомату $\mathcal{B}_3$. После этого $\mathcal{B}_3$ идет к $\mathcal{B}_1$.
10) $\mathcal{B}_5$, $(q_3^5, ((P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_3) = 0))$, $\to (q_4^5, (0, 0))$.
11) $\mathcal{B}_5$, $(q_4^5, (P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_3) = 0)$, $\to (q_4^5, (V, 0))$.
12) $\mathcal{B}_5$, $(q_4^5, (P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_3) = 1)$, $\to (q_5^5$, (ход в расположение $\mathcal{B}_3$)).
13) $\mathcal{B}_2$, $(q^2, ((P_0'(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q_4^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = 0))$, $\to (q^2, (V, 0))$.
14) $\mathcal{B}_2$, $(q^2, ((P_0'(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q_4^5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = 1))$, $\to (q^2$,(ход в расположение $\mathcal{B}_3$)).
15) $\mathcal{B}_3$, $(q_0^3, P_0'(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_5, q_5^5) = 1)$, $\to (q_1^3, (0, 0))$.
16) $\mathcal{B}_3$, $(q_1^3, P_0(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1) = 0)$, $\to (q_1^3, (-V, 0))$.
17) $\mathcal{B}_3$, $(q_1^3, P_0(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1) = 1)$, $\to (q_2^3$,(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).

При $s_2 < (V-1)d$ автомат $\mathcal{B}_2$ перемещается на вектор $(1, 0)$, а $\mathcal{B}_5$ идет к $\mathcal{B}_1$, после чего K_4 останавливается.
18) $\mathcal{B}_5$, $(q_5^5, (P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6) = 0))$, $\to (q_5^5, (-V, 0))$.
19) $\mathcal{B}_5$, $(q_5^5, (P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6) = 1))$, $\to (q_8^5, (-V, 0))$.
20) $\mathcal{B}_5$, $(q_5^5, (P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6) = 0))$, $\to (q_6^5$,(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).
21) $\mathcal{B}_5$, $(q_5^5, (P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6) = 1))$, $\to (q_7^5$,(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).
22) $\mathcal{B}_5$, $(q_8^5, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 0)$, $\to (q_8^5, (-V, 0))$.
23) $\mathcal{B}_5$, $(q_8^5, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 1)$, $\to (q_7^5$,(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).
24) $\mathcal{B}_2$, $(q^2, (P_0'(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q_5^5) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6) = 0))$, $\to (q^2, (1, 0))$.

При $s_2 = (V-1)d$ автомат $\mathcal{B}_6$ передвигается на вектор $(V-1, 0)$, а автомат $\mathcal{B}_2$ возвращается к $\mathcal{B}_1$ вместе с $\mathcal{B}_5$. После этого коллектив останавливается.
25) $\mathcal{B}_6$, $(q^6, (P_0'(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_5, q_5^5) = 1))$, $\to (q^6, (V-1, 0))$.

26) $\mathcal{B}_2$, $(q^2, ((P'_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q^5_5) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q^5_8) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = 0)), \to (q^2, (-V, 0))$.
27) $\mathcal{B}_2$, $(q^2, ((P'_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q^5_5) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q^5_8) = 1)) \wedge (P_V(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = 1)), \to (q^2,$(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).

Если $(s_1, s_2) \neq (0, h)$ ни при каком $h = 0, \ldots, (V-1) \cdot d$, то автомат $\mathcal{B}_5$, находясь в состоянии q^5_3, переходит в состояние q^5_9.

28) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_3, (P_0(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_2) = 0), \to (q^5_9, (0, 0))$.

Затем автомат $\mathcal{B}_5$ идет к автомату $\mathcal{B}_2$.

29) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_9, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_2) = 0), \to (q^5_9, (V, 0))$.
30) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_9, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_2) = 1), \to (q^5_{10},$(ход в расположение $\mathcal{B}_2$)).

$\mathcal{B}_2$ смещается на 1 влево.

31) $\mathcal{B}_2$, $(q^2, P'_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5, q^5_{10}) = 1), \to (q^2, (-1, 0))$.

Автомат $\mathcal{B}_5$ возвращается к $\mathcal{B}_1$ и идет к автомату $\mathcal{B}_3$.

32) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_{10}, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 0), \to (q^5_{10}, (-V, 0))$.
33) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_{10}, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 1), \to (q^5_{11},$(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).
34) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_{11}), P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_3) = 0), \to (q^5_{11}, (V, 0))$.
35) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_{11}, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_3) = 1), \to (q^5_{12},$(ход в расположение $\mathcal{B}_3$)).

$\mathcal{B}_3$ смещается на 1 вправо.

36) $\mathcal{B}_3$, $(q^3_0, P'_0(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_5, q^5_{12}) = 1), \to (q^3_0, (1, 0))$.

Автомат $\mathcal{B}_5$ возвращается к $\mathcal{B}_1$ и коллектив останавливается.

37) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_{12}, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 0), \to (q^5_{12}, (-V, 0))$.
38) $\mathcal{B}_5$, $(q^5_{12}, P_V(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_1) = 1), \to (q^5_6,$(ход в расположение $\mathcal{B}_1$)).

Таким образом K_4 построен.

$$(K_3 \circ K_4)(1, 2, 3, 4, 8, 10) \xrightarrow{8} K.$$

Модифицируем K так, чтобы в случае, когда W_8 останавливается в состоянии q^5_6, в следующий такт времени W_8 и все автоматы, находящиеся с ним в одной клетке, переходили в свои начальные состояния (в этом случае все остальные автоматы также находятся в начальных состояниях). Заметим, что если W_8 останавливается в состоянии q^5_7, то W_4 и W_5 останавливаются в состояниях, отличных от начального.

Полученный коллектив K удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 10. *Существует коллектив автоматов $K = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)(2, 2)$, который, стартуя из произвольного канонического расположения в* *квадранте, обходит L_4, причем $\mathcal{A}_1$ проходит через каждую клетку счетное число раз.*

Доказательство. Перечень автоматов коллектива K и их алфавитов.

1) $(\mathcal{A}_1, \{q_0^1, \ldots, q_4^1\}), (\mathcal{A}_2, \{q_0^2, q_1^2, q_2^2\})$.

Из канонического расположения коллектив идет к нижнему борту.

2) $\mathcal{A}_1$, $(q_0^1, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_0^1, (0, -1))$.
3) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_0^2, (0, -1))$.

Дойдя до нижнего борта, коллектив идет в угол.

4) $\mathcal{A}_1$, $(q_0^1, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_1^1, (0, 0))$.
5) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_1^2, (0, 0))$.
6) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_1^1, (-1, 0))$.
7) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_1^2, (-1, 0))$.

Затем $\mathcal{A}_2$ делает шаг на 2 клетки вправо, и оба автомата меняют свои состояния.

8) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_2^1, (0, 0))$.
9) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_2^2, (2, 0))$.

После этого автомат $\mathcal{A}_2$ всегда будет находиться в у нижнего борта. $\mathcal{A}_1$, перемещаясь «змейкой», обходит прямоугольный треугольник, ограниченный прямыми $x = 1$, $y = 1$, $x + y \leqslant x_0$, где $(x_0, 1)$ — клетка, в которой расположен $\mathcal{A}_2$.

10) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_2^1, (1, -1))$.
11) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_3^1, (1, 0))$.
12) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_{bort}^1(\mathcal{A}_1) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_4^1, (-1, 0))$.
13) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_3^1, (-1, 1))$.
14) $\mathcal{A}_1$, $(q_3^1, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_2^1, (0, 1))$.

После этого $\mathcal{A}_1$ возвращается в угол, а $\mathcal{A}_2$ смещается на 2 клетки вправо.

15) $\mathcal{A}_1$, $(q_4^1, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_4^1, (-1, 0))$.
16) $\mathcal{A}_1$, $(q_4^1, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_2^1, (0, 0))$.
17) $\mathcal{A}_2$, $(q_2^2, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 1)$, $\to (q_2^2, (2, 0))$.

Затем коллектив снова повторяет действия п. 10–17. Коллектив K удовлетсворяет условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 11. *Существует коллектив хищников* $K = (W_1, \ldots, W_{12})(R, V)$*, который, стартуя из любого канонического расположения в* L_4*, обнаруживает любую жертву* $U = U(R, V-1)$*, при любом таком начальном расположении* U *в* L_4*, при котором траектория* U *имеет тип* 1*.*

Доказательство. Обозначим через $K' = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{11})(R, V)$ коллектив из леммы 9, обрабатывающий в квадранте автоматы с параметрами $(R, V-1)$. Коллектив K', стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0,0), (x,y))$-позиции, перебирает $(V-1)$-четверки со всевозможными допустимыми значениями третьей компоненты (при некоторых значениях первой компоненты, второй компоненте, равной d и четвертой компоненте, равной (x,y)), обнаруживает автоматы-жертвы, которые они характеризуют и оказывается в $(\tau_0', (d+1), (0,0), (x,y))$-позиции ($\tau_0' \in \mathbb{N}, \tau_0' \geqslant \tau_0$). Если автомат-жертва U имеет траекторию типа 1, предпериод выходной последовательности, не превосходящий τ_0, период выходной последовательности, не превосходящий d и условную клетку старта $(x_0, y_0) = (x, y) - i \cdot (s_1, s_2)$, где $i \in \mathbb{N}_0$, $i \leqslant \tau_0$, то K', стартуя в такт τ_0 из сильной $(\tau_0, d, (0,0), (x,y))$-позиции, обнаруживает U.

В доказательстве леммы 10 построен коллектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)(V, V)$, который, стартуя из произвольного канонического расположения в квадранте, функционирует так, что $\mathcal{A}_1$ обходит L_1, побывав в каждой клетке счетное число раз.

Модифицируем K', добавив к нему автомат $\mathcal{A}_{12}$, который, совместно с $\mathcal{A}_1$, образует подколлектив $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{12})$, который, стартуя из канониеского расположения, функционирует точно так же, как $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, но с паузами в работе после каждого хода. Если $\mathcal{A}_1$ переместился из клетки (x, y) в клетку (x', y'), то все автоматы из K' перемещаются на тот же вектор $(x'-x, y'-y)$. Для перемещения автоматов коллектива K', которые не находятся в одной клетке с $\mathcal{A}_1$ (то есть автоматов $\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_{10}$ и $\mathcal{A}_{11}$) на вектор $(x'-x, y'-y)$ используется механизм, аналогичный тому, который используется при построении коллектива K_4 в доказательстве леммы 9. После каждого хода подколлектива $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{12})$ запускается коллектив K' (то есть автоматы $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{11})$) и функционирует вплоть до остановки всех автоматов, кроме $\mathcal{A}_{11}$. После этого снова делает ход подколлектив

$(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{12})$, и все автоматы из K' перемещаются на соответствующий вектор. Полученный коллектив обозначим как $K'' = (\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{12})$.

Во время работы K'' при каждом следующем запуске подколлектива K' производится перебор $(V-1)$-параметризующих четверок вида $(\tau_0, d, (s_x, s_y), (x, y))$ со всеми допустимыми значениями (s_x, s_y) при некоторых значениях τ_0 и фиксированных значениях d и (x, y). При каждом новом запуске K' значение d увеличивается. (x, y) счетное число раз пробегает все клетки лабиринта L_4 при всех запусках K'.

Рассмотрим коллектив $K''' = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{12})(R, V)$, где $\mathcal{B}_1$ — неподвижный автомат с внутренним алфавитом $\{q_0\} \cup \{-1, 1\}^2$, который в первый такт функционирования переходит из состояния q_0 в состояние $(1, 1)$, автомат $\mathcal{B}_{10}$ в первый такт смещается на $(1, 0)$ и останавливается, $\mathcal{B}_{11} = \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{B}_i = \mathcal{H}_0$ при всех $i \neq 1, 10, 11$. Коллектив $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{11})$ из канонического расположения в клетке (x_0, y_0) за 1 такт переходит в сильную $(1, 1, (0, 0), (x_0, y_0))$-позицию.

$(K''' \circ K'')(1, \ldots, 10) \xrightarrow{1} K = (W_1, \ldots, W_{12})$.

Покажем, что коллектив K удовлетворяет условию леммы. Для любого автомата-жертвы $U = U(R, V-1)$ существует $(V-1)$-четверка $(\tau_0, d, (s_1, s_2), (x, y))$, которая характеризует U. При функционировании K, подколлектив K' счетное число раз запускается из расположений, являющихся сильными $(\tau_0', d', (0, 0), (x, y))$-позициями, при некоторых значениях τ_0', d'. Среди $(V-1)$-четверок $(\tau_0', d', (s_1', s_2'), (x, y))$, которые перебирает K' при таких запусках, найдется такая, что $\tau_0' \geqslant \tau_0$, $d' \geqslant d$, $(s_1', s_2') = (s_1, s_2)$. Такая $(V-1)$-четверка характеризует U, следовательно, по лемме 9 автомат U будет обнаружен. Лемма доказана.

Лемма 12. *Существует коллектив хищников* $K = (W_1, \ldots, W_{24})(R, V)$, *который, стартуя из любого канонического расположения в* L_4, *ловит любую конечную независимую систему жертв* $S(R, V-1)$, *при любом таком начальном расположении жертв в* L_4, *при котором траектория каждой жертвы имеет тип* 1.

Доказательство. Пусть в квадранте перемещается произвольная независимая система жертв $S = (U_1, \ldots, U_n)(R, V-1)$. При $R = V$ обнаружение жертвы означает ее поимку и утверждение леммы прямо следует из леммы 11.

Предположим, $R > V$. Построим автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$, который, не видя жертв, стоит на месте, а увидев какую-либо из жертв, $\mathcal{A}$ не позднее, чем через $(R-V)$ тактов ловит некоторую жертву и возвращается в исходное расположение. Начальным состоянием $\mathcal{A}$ является $(q_0, \ldots, q_0)$.
1) $(\,\mathcal{A},\, Q_{\mathcal{A}} = (\{q_0, q_1\} \cup \{\,-V, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, V\}^2)^{R-V} \cup \{q_2\}\,)$.

Увидев в такт τ_0 какую-либо жертву, автомат $\mathcal{A}$ преследует ближайшую к нему жертву, запоминая в s-той компоненте своего состояния свой ход в такт $(\tau_0 + s - 1)$ (где $1 \leqslant s \leqslant (R-V)$).
2) $\mathcal{A},\ (\,(q_0, \ldots, q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 1)\,),\ \to (\,(((v_1, v_2), q_0, \ldots, q_0), (v_1, v_2)\,)$, где (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.
3) $\mathcal{A},\ (\,((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^s, v_2^s), q_0, \ldots, q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 1)\,),\ \to (((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^s, v_2^s), (v_1, v_2), q_0, \ldots, q_0),\ (v_1, v_2))$, где $1 \leqslant s \leqslant (R-V-2)$, (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.
4) $\mathcal{A},\ (((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 1)), \to$ $(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), (v_1, v_2)), (v_1, v_2))$, где (v_1, v_2) — ход к клетке, в которой жертва, ближайшая к $\mathcal{A}$, находится в наибольший момент обнаружения, не превосходящий текущего.

Если в какой-то момент преследования хищник не видит ни одной жертвы, значит, как минимум одна жертва (та, которую преследовал хищник) поймана. После этого $\mathcal{A}$ возвращается в исходное расположение (не реагируя на другие жертвы), используя ранее сохраненные координаты своих перемещений. Это возвращение также происходит не более чем за $R-V$ тактов.
5) $\mathcal{A},\ (\,((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{s-1}, v_2^{s-1}), (v_1^s, v_2^s), q_0, \ldots, q_0), (P''_R(\mathcal{A}) = 0)\,), \to$ $(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{s-1}, v_2^{s-1}), q_1, \ldots, q_1), (v_1^s, v_2^s))$, где $1 \leqslant s \leqslant (R-V-1)$.

Не позднее, чем через $R-V$ тактов преследования некоторая жертва будет поймана. После этого $\mathcal{A}$ возвращается в исходное расположение не более чем за $R-V$ тактов.
6) $\mathcal{A},\ (\,((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V)}, v_2^{(R-V)}))\,), \to$
$(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{(R-V-1)}, v_2^{(R-V-1)}), q_1), (-v_1^{R-V}, -v_2^{R-V}))$.
7) $\mathcal{A},\ (\,((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^s, v_2^s), q_1, \ldots, q_1)\,), \to$
$(((v_1^1, v_2^1), \ldots, (v_1^{s-1}, v_2^{s-1}), q_1, \ldots, q_1), (-v_1^s, -v_2^s))$, где $2 \leqslant s \leqslant (R-V)$.
8) $\mathcal{A},\ (\,((v_1^1, v_2^1), q_1, \ldots, q_1)\,),\ \to (q_2, (-v_1^1, -v_2^1))$.

В лемме 11 построен коллектив хищников, обнаруживающий любой автомат-жертву $U = U(R, V-1)$ в квадранте. Переобозначим этот коллектив как $K_1 = (\,W'_1, \dots, W'_{12}\,)(R, V)$. Внутренний алфавит W'_i $(1 \leqslant i \leqslant 12)$ обозначим как Q'_i, а его начальное состояние как q_0^i.

При функционировании коллектива K_1, его подколлектив $(\,W'_1, \dots, W'_{11}\,)$ при каждом своем запуске фунционирует не менее 7 тактов (W'_5 идет к W'_{11} и обратно (не менее 2 тактов), W'_9 не менее одного раза идет к W'_4 и обратно (см. доказательство леммы 7), после остановки коллектива K_3 (см. доказательство леммы 9) W'_5 идет к W'_4 и обратно, а затем еще хотя бы один такт тратится на перемещение автоматов W'_2 и W'_3). Автоматы W'_1 и W'_{12} перемещаются только в паузах между запусками подколлектива $(\,W'_1, \dots, W'_{11}\,)$, то есть не чаще, чем 1 раз в 8 тактов. За одну такую паузу каждый этих автоматов делает 1 ход, перемещаясь на некоторый вектор $\vec{s}$, такой что $|\vec{s}| \leqslant 2$. Автомат W'_{10} за время работы коллектива $(\,W'_1, \dots, W'_{11}\,)$ перемещается на вектор $(\,(V-1), 0)$, а автомат W'_{11} за каждый такт работы коллектива $(\,W'_1, \dots, W'_{11}\,)$ перемещается на вектор $(1, 0)$.

Добавим к коллективу K_1 автоматы $W''_1, \dots, W''_{12}$, устроенные следующим образом.

Каждый хищник W''_i при $i = 1, \dots, 12$ имеет (как минимум) две группы состояний: Q'_i и $Q_{\mathcal{A}}$. Начальным состоянием W''_i является q_0^i. Автомат W''_i, находясь в состоянии $q \in Q'_i$, перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат W'_i в состоянии q при том же входном символе, если $P''_R(W''_i) = 0$, и перемещается и меняет свое состояние так же, как автомат $\mathcal{A}$ в состоянии $(q_0, \dots, q_0)$ при том же входном символе, если $P''_R(W''_i) = 1$. Находясь в состоянии $q \in Q_{\mathcal{A}}$, $q \neq q_2$, хищник W''_i перемещается и меняет свое состояние, так же, как и $\mathcal{A}$ в состоянии q при том же входном символе.

Каждый хищник W''_i при $i = 1, \dots, 12$, до того, как увидит какую-либо жертву, перемещается совместно с W'_i. Увидев какую-либо жертву, W''_i за время, не большее $2(R-V)$ ловит некоторую жертву и возвращается в клетку, из которой он начинал преследование жертвы.

Пусть $i \in \{1, 12\}$. Перемещение $\vec{s_i}$ автомата W'_i за время преследования автоматом W''_i жертвы таково, что $|\vec{s_i}| \leqslant 2\cdot]2(R-V)/8[\leqslant (R-V)/2+ +2 \leqslant R/2+1 \leqslant R$. То есть автомат W''_i, оказавшись в состоянии q_2 (финальном состоянии автомата $\mathcal{A}$), увидит W'_i. Доопределим W_i'', так что W_i'' в состоянии q_2, видя W_i', идет к нему со скоростью V, а, оказавшись в одной клетке с W_i', — переходит в то же состояние, в которое переходит W_i'. Таким образом, не позднее, чем через $\tau = 2(R-V) + 8]R/6[$ тактов после обнаружения жертвы, W_i'' вернется к W_i'.

Пусть $i \in \{10, 11\}$. Доопределим W_i'' так, что он, находясь в состоянии q_2, не видя W_i', идет со скоростью V в направлении $(1,0)$, пока не увидит W_i', а видя W_i' — идет к нему со скоростью V, становясь в одну клетку с W_i' в том же состоянии, в котором оказывается W_i'. Перемещение $\vec{s_i}(\tau)$ автомата W_i' за некоторый промежуток времени длиной τ тактов есть сумма $\vec{s_i}(\tau) = \vec{s_i'}(\tau) + \vec{s_1}(\tau)$, где $\vec{s_i'}(\tau)$ — перемещение W_i' как элемента подколлектива $(W_1', \ldots, W_{11}')$, а $\vec{s_1}(\tau)$ — перемещение автомата W_1' за рассматриваемый промежуток времени. $\vec{s_i'}(\tau) = (x_i(\tau), 0)$. Имеют место неравенства: $0 \leqslant x_{10}(\tau) \leqslant (V-1)\cdot]\tau/8[$, $0 \leqslant x_{11}(\tau) \leqslant \tau$, $|\vec{s_1}(\tau)| \leqslant 2\cdot]\tau/8[$. Нетрудно видеть, что автомат W_{10}'', оказавшись в состоянии q_2, окажется на одной вертикали с W_{10}' не позднее, чем через время

$$\tau_{10}' = 8\cdot]\frac{(V-1)\cdot](R-V)/4[}{7V+1}[\leqslant \frac{2}{7}\cdot(R-V) + \frac{64}{7}.$$

За это время W_{10}' сместится (с момента обнаружения жертвы) по вертикали не более, чем на

$$|\vec{s_1}(\,2(R-V) + \tau_{10}'\,)| = \frac{4}{7}(R-V) + \frac{16}{7} \leqslant R.$$

Это следует из соотношений $V \geqslant 2$, $R \geqslant 3$. Таким образом, W_{10}'' увидит W_{10}', и не позднее, чем через $\tau_{10} = 2(R-V) + \tau_{10}' + 8]R/6[$ тактов после обнаружения жертвы окажется с ним в одной клетке. Аналогично,автомат W_{11}'', оказавшись в состоянии q_2, не позднее, чем через время $2(R-V)$ окажется на одной вертикали с W_{11}'. За это время W_{11}' сместится (с момента обнаружения жертвы) по вертикали не более, чем на $|\vec{s_1}(\,4(R-V)\,)| = 2\cdot](R-V)/2[\leqslant R$. Таким образом, W_{11}'' увидит W_{11}', и не позднее, чем через $\tau_{11} = 4(R-V) + 8]R/6[\leqslant 6R$ тактов после обнаружения жертвы окажется с ним в одной клетке.

Пусть $i \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Как нетрудно видеть из построений лемм 7, 9, 11, автомат W_i' при $i \in \{2,3,4,5,6,9\}$ перемещается так, что в любой такт времени ему, чтобы вернуться к W'_1, достаточно пройти не более одного горизонтального или вертикального отрезка. Автоматам же W'_7 и W'_8 для возвращения к к W'_1, достаточно пройти не более одного горизонтального и одного вертикального отрезка. Автоматы W'_7 и W'_8 для возвращения к W'_1 используют в качестве ориентира автоматы W'_5 и W'_6, соответственно.

Изменим функции переходов и выходов автоматов W'_5 и W'_6, так, чтобы W'_5 возвращался к W'_1 не одновременно с W'_7, а только после того, как, возвращаясь к W'_1, мимо W'_5 пройдут и W'_7 и W''_7, а W'_6 возвращался к W'_1 не одновременно с W'_8, а только после того, как, возвращаясь к W'_1, мимо W'_6 пройдут и W'_8 и W''_8. Также изменим функции переходов и выходов автомата W'_1, так, чтобы W'_1, совершал свои перемещения только совместно с автоматами W'_i, W''_i, $i \in \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. То есть, если в момент, когда автомату W'_1 надо переместиться, в одной клетке с ним не находятся все вышеобозначенные автоматы, он ждет, пока все они не окажутся с ним в одной клетке, и затем передвигается вместе с ними. Понятно, что такие изменения коллектива $(W'_1, \ldots, W'_{11})$, не влияют на факт обнаружения им любой жертвы.

Попав в состояние q_2, автомат W''_i, находится в клетке, где он ранее находился вместе с W'_i. Добавим автоматам W''_7 и W''_8 еще несколько состояний, которые позволят им во время преследования жертвы (то есть когда этот автомат действует отдельно от W'_7 или W'_8, соответственно) «помнить» свое состояние в момент, когда преследование началось. Это нужно, чтобы возвращаясь к W'_1, каждый из этих автоматов «знал», один или два прямых отрезка пути ему предстоит пройти. Доопределим W''_i так, чтобы после попадания в состояние q_2, он перемещался в клетку, в которой находится W'_1, и останавливался в состоянии q_4 (как видно из построений лемм 7, 9, 11, это можно сделать, используя для такого перемещения состояния q_2 и q_3). Когда все W'_i и все W''_i $(i = 2,3,4,5,6,7,8,9)$ оказываются в той же клетке, что и W'_1, причем каждый W''_i находится в состоянии q_4, тогда каждый W''_i переходит в то же состояние, в которое переходит W'_i и делает тот же ход, что и W'_i.

Обозначим полученный коллектив $K = (W_1, \ldots, W_{24}) = (W'_1, \ldots, W'_{12}, W''_1, \ldots, W''_{12})$. Покажем, что K удовлетворяет условию леммы. Подколлектив $(W'_1, \dots, W'_{12})$ функционирует так же, как коллектив K_1, только, возможно, с большим числом пауз в работе всех автоматов, кроме W'_{11}. Однако, как следует из доказательств лемм 7, 9, 11, и приведенных выше построений, эти паузы не влияют на факт обнаружения коллективом K_1 любой жертвы с траекторией типа 1. Пусть в некоторый такт τ_0, когда все автоматы K_1 перемещаются в следующую клетку, уже поймано h жертв $(0 \leqslant h \leqslant n-1)$, причем пойманы не все жертвы с траекторией типа 1. Проведем доказательство от противного, то есть, предположим, что после этого ни одна жертва не будет поймана. Обозначим следующий после τ_0 момент, когда все автоматы K_1 перемещаются в следующую клетку, как τ_1. Тогда не позднее, чем в такт $\max\{\tau_1, \tau_0 + \tau_2\}$, каждый хищник W''_i $(i = 1, \dots, 12)$ окажется в той же клетке и в том же состоянии, что и W'_i. Здесь под τ_2 понимается максимальное время, которое требуется W''_i для возвращения к W'_i после обнаружения жертвы, при всех $i \in \{1, 10, 11, 12\}$ (все эти величины подсчитаны выше). После этого, хищники W''_i и W'_i передвигаются совместно, пока не обнаружат (согласно лемме 11) некоторую жертву с траекторией типа 1. Как указано выше, в такой ситуации W''_i начнет преследовать обнаруженную жертву, и поймает некоторую жертву. Это противоречит предположению о том, что никакая новая жертва не будет поймана. Это противоречие показывает, что поимка новых и новых жертв будет продолжаться, пока не пойманы все жертвы с траекторией типа 1. Лемма доказана.

4. Доказательство возможности поимки всех непериодических жертв

Если коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_5)$, расположен в квадранте L_4 так, что $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ находятся в клетках $(x_0 + a, 1)$ и $(x_0, b + 1)$, соответственно, (где $a, b \in \mathbb{N}$), а все остальные автоматы расположены в клетке $(x_0, 1)$, то будем говорить, что коллектив K находится в *сильной нижней* (a, b)*-расстановке с центром* $(x_0, 1)$. Если же автоматы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ находятся в клетках $(1, y_0 + a)$ и $(b + 1, y_0)$, соответственно, а все остальные автоматы расположены в клетке $(1, y_0)$, то будем говорить, что коллектив K находится в *сильной левой* (a,b)*-расстановке с центром* $(1,y_0)$.

Лемма 13. *Для любого натурального* k *существуют коллективы* $K^1=(\mathcal{A}_1^1,\ldots,\mathcal{A}_5^1)(R,V)$ *и* $K^2=(\mathcal{A}_1^2,\ldots,\mathcal{A}_5^2)(R,V)$*, такие, что* K^1 $\langle K^2\rangle$*, стартуя из сильной нижней* $\langle$*левой*$\rangle$ $(-a\cdot(k-1)V,b\cdot(k-1)V)$*-расстановки с центром* $(x_0,1)$ $\langle(1,y_0)\rangle$ *не позднее чем через* $(m+2)\cdot a\cdot k$ $\langle(m+2)\cdot b\cdot k\rangle$ *тактов остановится в канонической расстановке с центром* $(1,1+m\cdot b\cdot(k-1)V)$ $\langle(1+m\cdot a\cdot(k-1)V,1)\rangle$*, где* m *— максимальное натуральное число, удовлетворяющее неравенству* $m\cdot a\cdot(k-1)V<(x_0-R)$ $\langle m\cdot b\cdot(k-1)V<(y_0-R)\rangle$.

Доказательство. Введем предикат $P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_i)$, который равен 1, если автомат $\mathcal{A}_i$ видит левый борт, и равен 0 в противном случае. Приведем схему функционирования коллектива K^1.

1) $(\mathcal{A}_1,\{q_1^1,\ldots,q_6^1\})$, $(\mathcal{A}_2,\{q_0^2,\ldots,q_{2k+1}^2\})$, $(\mathcal{A}_3,\{q_0^3,\ldots,q_{2k+1}^3\})$, $(\mathcal{A}_4,\{q_1^4,\ldots,q_{2k+1}^4\})$, $(\mathcal{A}_5,\{q_1^5,\ldots,q_{2k+1}^5\})$.

Автомат $\mathcal{A}_4$, не видя левого борта, идет влево, сдвигаясь за каждые k тактов на $(k-1)V$ клеток, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_3$ (или не увидит левый борт). Автомат $\mathcal{A}_5$, не видя левого борта, идет вверх, сдвигаясь за каждые k тактов на $(k-1)V$ клеток, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_3$ или $\mathcal{A}_2$. Автомат $\mathcal{A}_1$ перемещается вместе с $\mathcal{A}_4$.

2) $\mathcal{A}_4$, $(q_i^4,(P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_4)=0)\wedge(P_0(\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_2)=0)\wedge(P_0(\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_3)=0))$, $\to(q_{i+1}^4,(-V,0))$, где $i\in\{1,\ldots,k-1\}$.

3) $\mathcal{A}_4$, $(q_k^4,(P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_4)=0))$, $\to(q_1^4,(0,0))$.

4) $\mathcal{A}_5$, $(q_i^5,(P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_5)=0)\wedge(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_3)=0)\wedge(P_0(\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_2)=0))$, $\to(q_{i+1}^5,(0,V))$, где $i\in\{1,\ldots,k-1\}$.

5) $\mathcal{A}_5$, $(q_k^5,(P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_5)=0))$, $\to(q_1^5,(0,0))$.

6) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1,(P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1)=0)\wedge(P_0'(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_4,q_i^2)=1)\wedge(P_0(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)=0)\wedge(P_0(\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_3)=0))$, $\to(q_1^1,(-V,0))$, где $i\in\{1,\ldots,k-1\}$.

7) $\mathcal{A}_1$, $(q_1^1,(P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1)=0)\wedge(P_0'(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_4,q_k^2)=1)\wedge((P_0(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)=1)\vee(P_0(\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_3)=1)))$, $\to(q_2^1,(0,0))$.

$\mathcal{A}_4$, встретившись с $\mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_3$ и не видя левого борта, идет вверх, сдвигаясь за каждые k тактов на $(k-1)V$ клеток, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_5$. Аналогично, $\mathcal{A}_5$, встретившись с $\mathcal{A}_3$ или $\mathcal{A}_2$ и не видя левого борта, идет влево, сдвигаясь за каждые k тактов на $(k-1)V$ клеток, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_4$, или не увидит левый борт. Автомат $\mathcal{A}_1$ перемещается вместе с $\mathcal{A}_4$ (или вместе с $\mathcal{A}_5$), если находится с ним в одной клетке).

8) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_4) = 0) \wedge ((P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \vee (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 1))\,)$, $\to (q_{k+2}^4, (0, V))$.

9) $\mathcal{A}_4$, $(q_{k+i}^4, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_{k+i+1}^4, (0, V))$, где $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

10) $\mathcal{A}_4$, $(q_{2k}^4, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_4) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5) = 0))$, $\to (q_{k+1}^4, (0, 0))$.

11) $\mathcal{A}_5$, $(q_1^5, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_5) = 0) \wedge ((P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 1) \vee (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 1))\,)$, $\to (q_{k+2}^5, (-V, 0))$.

12) $\mathcal{A}_5$, $(q_{k+i}^5, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_5) = 0)), \to (q_{k+i+1}^5, (-V, 0))$, где $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

13) $\mathcal{A}_5$, $(q_{2k}^5, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_5) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_{k+1}^5, (0, 0))$.

14) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4, q_i^4) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_5) = 0))$, $\to (q_2^1, (0, V))$, где $i \in \{k+1, \ldots, 2k-1\}$.

15) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge ((P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_5, q_i^5) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_2^1, (-V, 0))$, где $i \in \{k+1, \ldots, 2k-1\}$.

16) $\mathcal{A}_1$, $(q_2^1, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4, q_{2k}^4) = 1) \wedge (P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_5, q_{2k}^5) = 1))$, $\to (q_3^1, (0, 0))$.

Через $k(a+b)$ тактов $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$ снова встретятся в клетке, смещенной на $(\,(k-1)aV\,,\,(k-1)bV\,)$ относительно клетки их предыдущей встречи. После этого $\mathcal{A}_1$ стоит на месте, до встречи с $\mathcal{A}_2$. Автомат $\mathcal{A}_2$, после встречи с $\mathcal{A}_4$ $\langle\mathcal{A}_5\rangle$, не видя левого борта, идет вверх $\langle$влево$\rangle$, сдвигаясь за каждые $(k+1)$ тактов на $(k-1)V$ клеток, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_1$. Аналогично, $\mathcal{A}_3$, встретившись с $\mathcal{A}_5$ $\langle\mathcal{A}_4\rangle$ и не видя левого борта, идет влево $\langle$вверх$\rangle$, сдвигаясь за каждые $(k+1)$ тактов на $(k-1)V$ клеток, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_1$, или не увидит левый борт.

17) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (q_1^2, (0, 0))$.

18) $\mathcal{A}_2$, $(q_i^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 0))$, $\to (q_{i+1}^4, (0, 0))$, где $i \in \{1, 2, k+3, k+4\}$.

19) $\mathcal{A}_2$, $(q_i^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_{i+1}^2, (0, V))$, где $i \in \{3, \ldots, k\}$.

20) $\mathcal{A}_2$, $(q_{k+1}^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_1^2, (0, V))$.

21) $\mathcal{A}_2$, $(q_i^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0)), \to (q_{i+1}^2, (-V, 0))$, где $i \in \{k+5, \ldots, 2k+2\}$.

22) $\mathcal{A}_2$, $(q_{2k+3}^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_{k+3}^2, (-V, 0))$.

23) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5) = 1))$, $\to (q_1^3, (0, 0))$.

24) $\mathcal{A}_3$, $(q_i^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 0) \wedge (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 0))$, $\to (q_{i+1}^3, (0, 0))$, где $i \in \{1, 2, k+3, k+4\}$.

25) $\mathcal{A}_3$, $(q_i^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_{i+1}^3, (-V, 0))$, где $i \in \{3, \ldots, k\}$.

26) $\mathcal{A}_3$, $(q_{k+1}^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_1^3, (-V, 0))$.

27) $\mathcal{A}_3$, $(q_i^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_{i+1}^3, (0, V))$, где $i \in \{k+5, \ldots, 2k+2\}$.

28) $\mathcal{A}_3$, $(q_{2k+3}^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_{k+3}^3, (0, V))$.

После встречи с $\mathcal{A}_5$, автомат $\mathcal{A}_4$ переходит в состояние q_1^4 и снова идет влево до встречи с $\mathcal{A}_2$. Аналогично, автомат $\mathcal{A}_5$, после встречи с $\mathcal{A}_4$, переходит в состояние q_1^5 и снова идет вверх до встречи с $\mathcal{A}_3$.

29) $\mathcal{A}_4$, $(q_{2k}^4, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_4) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5) = 1))$, $\to (q_1^4, (0, 0))$.

30) $\mathcal{A}_5$, $(q_{2k}^5, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_5) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (q_1^5, (0, 0))$.

Автомат $\mathcal{A}_2$, после встречи с $\mathcal{A}_1$, не видя левого борта, идет влево $\langle$вверх$\rangle$ со скоростью V, догоняя $\mathcal{A}_4$ $\langle \mathcal{A}_5 \rangle$, пока не окажется с ним в одной клетке, или не увидит левый борт. Аналогично, $\mathcal{A}_3$, после встречи с $\mathcal{A}_1$, не видя левого борта, идет вверх $\langle$влево$\rangle$ со скоростью V, догоняя $\mathcal{A}_5$ $\langle \mathcal{A}_4 \rangle$, пока не окажется с ним в одной клетке. Автомат $\mathcal{A}_1$ стоит на месте, пока не встретит оба автомата $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, а затем перемещается вместе с тем из них, с кем он встретится последним, вплоть до встречи с $\mathcal{A}_4$ или $\mathcal{A}_5$.

31) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge ((P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \vee (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 1)))$, $\to (q_{k+2}^2, (0, V))$.

32) $\mathcal{A}_2$, $(q_{k+2}^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5) = 0))$, $\to (q_{k+2}^2, (0, V))$.

33) $\mathcal{A}_2$, $(q_{k+3}^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge ((P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \vee (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 1)))$, $\to (q_{2k+4}^2, (-V, 0))$.

34) $\mathcal{A}_2$, $(q_{2k+4}^2, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_{2k+4}^2, (-V, 0))$.

35) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0) \wedge ((P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \vee (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 1)))$, $\to (q_{k+2}^3, (-V, 0))$.

36) $\mathcal{A}_3$, $(q_{k+2}^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_{k+2}^3, (-V, 0))$.

37) $\mathcal{A}_3$, $(q_{k+3}^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0) \wedge ((P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_3^1) = 1) \vee (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1, q_4^1) = 1)))$, $\to (q_{2k+4}^3, (0, V))$.

38) $\mathcal{A}_3$, $(q_{2k+4}^3, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5) = 0))$, $\to (q_{2k+4}^3, (0, V))$.

39) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_3, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 0)) \vee ((P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0)))$, $\to (q^1_4, (0, 0))$.
40) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_3, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q^1_5, (-V, 0))$.
41) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_4, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q^2_1) = 1))$, $\to (q^1_5, (0, V))$.
42) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_4, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q^2_{k+3}) = 1))$, $\to (q^1_5, (-V, 0))$.
43) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_4, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, q^3_1) = 1))$, $\to (q^1_5, (-V, 0))$.
44) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_4, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, q^3_{k+3}) = 1))$, $\to (q^1_5, (0, V))$.
45) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_5, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 0) \wedge ((P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q^2_{2k+4}) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, q^3_{k+2}) = 1)))$, $\to (q^1_5, (-V, 0))$.
46) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_5, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5) = 0) \wedge ((P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, q^2_{k+2}) = 1) \vee (P'_0(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, q^3_{2k+4}) = 1)))$, $\to (q^1_5, (0, V))$.

Автомат $\mathcal{A}_2$ догонит $\mathcal{A}_5$ $\langle \mathcal{A}_4 \rangle$ на расстоянии $b \cdot (k-1)V$ $\langle a \cdot (k-1)V \rangle$ от места последней встречи $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$, а $\mathcal{A}_3$ догонит $\mathcal{A}_4$ $\langle \mathcal{A}_5 \rangle$ на расстоянии $a \cdot (k-1)V$ $\langle b \cdot (k-1)V \rangle$ от места последней встречи $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$. После этого $\mathcal{A}_2$ $\langle \mathcal{A}_3 \rangle$ и $\mathcal{A}_5$ движутся влево, а $\mathcal{A}_3$ $\langle \mathcal{A}_2 \rangle$ и $\mathcal{A}_4$ — вверх, как описано ранее. $\mathcal{A}_1$ будет перемещаться вплоть до встречи автоматов $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$ с тем из них, с кем окажется в одной клетке в данный момент, так, как описано ранее.

47) $\mathcal{A}_2$, $(q^2_{k+2}, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5) = 1))$, $\to (q^2_{k+4}, (0, 0))$.
48) $\mathcal{A}_2$, $(q^2_{2k+4}, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (q^2_2, (0, 0))$.
49) $\mathcal{A}_3$, $(q^3_{k+2}, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (q^3_{k+4}, (0, 0))$.
50) $\mathcal{A}_3$, $(q^3_{2k+4}, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_2) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5) = 1))$, $\to (q^3_2, (0, 0))$.
51) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_5, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (q^1_2, (0, V))$.
52) $\mathcal{A}_1$, $(q^1_5, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_1) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5) = 1))$, $\to (q^1_2, (-V, 0))$.

Таким образом, до тех пор, пока какой-либо из автоматов не увидит левый борт, за каждые $a \cdot k$ тактов автомат $\mathcal{A}_1$ при помощи других автоматов перемещается на вектор $(-a \cdot (k-1)V\ , b \cdot (k-1)V)$. Очевидно, автомат $\mathcal{A}_4$ увидит левый борт не позже, чем любой другой автомат коллектива. Каждый автомат видя борт, идет к нему, а находять в 1-окрестности борта идет к $\mathcal{A}_4$.

53) $\mathcal{A}_i$, $(q, (P^{left}_{bort}(\mathcal{A}_i) = 1) \wedge (P^2_{bort}(\mathcal{A}_i) = 0))$, $\to (q$, максимально возможный ход влево), где $i \in \{1, \ldots, 5\}$, а q — произвольное состояние автомата $\mathcal{A}_i$.

54) $\mathcal{A}_4$, $(q, (P^2_{bort}(\mathcal{A}_4) = 1))$, $\to$ $(q^4_{2k+1}, (0,0))$, где q — произвольное состояние автомата $\mathcal{A}_4$.
55) $\mathcal{A}_i$, $(q, (P^2_{bort}(\mathcal{A}_i) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to$ $(q, (0, -V))$, где $i \in \{1, \ldots, 5\}$, а q — произвольное состояние автомата $\mathcal{A}_i$.
56) $\mathcal{A}_i$, $(q, (P^2_{bort}(\mathcal{A}_i) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to$ (q_f, ход в расположение $\mathcal{A}_4$), где $i \in \{1, \ldots, 5\}$, q — произвольное состояние автомата $\mathcal{A}_i$, а q_f — его финальное состояние.

Построенный коллектив $K^1 = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_5) = (\mathcal{A}^1_1, \ldots, \mathcal{A}^1_5)$ удовлетворяет условию леммы. Заменим в алгоритме коллектива K^1 все перемещения вверх на перемещения вправо, все перемещения вниз — на перемещения влево, все перемещения влево — на перемещения вниз, а все перемещения вправо — на перемещения вверх. Условие видимости левого борта заменим на условие видимости нижнего борта. Полученный коллектив $K^2 = (\mathcal{A}^2_1, \ldots, \mathcal{A}^2_5)$ также будет удовлетворять условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 14. *Существует коллектив автоматов $K(R, V) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_5)$, который, стартуя из (a, b)-расстановки с центром (x_0, y_0), где $a \leqslant b$, не позднее чем через $T = 3]a/V[+2]b/V[+1$ тактов остановится в $(a+b)$-расстановке с центром (x_0, y_0).*

Доказательство. При $a = 0$ коллектив стоит на месте, и все его автоматы, стоящие в одной клетке с $\mathcal{A}_1$, переходят в финальные состояния. Приведем схему функционирования коллектива K для случая $a > 0$.

Перечень автоматов коллектива K и их алфавитов.
1) $(\mathcal{A}_1, \{q^1\})$, $(\mathcal{A}_2, \{q^2_0, q^2_1\} \cup \{1, \ldots, V\} \times \{q^2_2, q^2_3\})$, $(\mathcal{A}_3, \{q^3_0, q^3_1\})$, $(\mathcal{A}_4, \{q^4_1, \ldots, q^4_4\})$, $(\mathcal{A}_5, \{q^5_1, \ldots, q^5_5\})$.

Автомат $\mathcal{A}_5$ идет к автомату $\mathcal{A}_2$ со скоростью V и достигнет его через $]a/V[$ тактов. Автомат $\mathcal{A}_4$ идет к $\mathcal{A}_2$ с вдвое меньшей скоростью, и достигнет его через $2]a/V[$ тактов.
2) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_1, (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to$ $(q^5_1, (V, 0))$.
3) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_1, (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 1))$, $\to$ (q^5_2, ход в расположение $\mathcal{A}_2$).
4) $\mathcal{A}_4$, (q^4_1), $\to$ $(q^4_2, (0, 0))$.
5) $\mathcal{A}_4$, $(q^4_2, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to$ $(q^4_1, (V, 0))$.
6) $\mathcal{A}_4$, $(q^4_2, (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 1))$, $\to$ (q^4_3, ход в расположение $\mathcal{A}_2$).

Автомат $\mathcal{A}_5$, достигнув $\mathcal{A}_2$, идет к автомату $\mathcal{A}_3$ со скоростью V и достигнет его спустя $]a/V[+]\frac{b-a}{V}[$ тактов с начала функционирования. Автомат $\mathcal{A}_2$, в такт $]a/V[+]\frac{b-a}{V}[-1$ или в такт $]a/V[+]\frac{b-a}{V}[$, увидев $\mathcal{A}_4$, на расстоянии, не меньшем V от себя, запоминает в первой компоненте своего состояния расстояние, на котором он увидел $\mathcal{A}_4$, и идет к $\mathcal{A}_3$ со скоростью V.

7) $\mathcal{A}_5$, $(q_2^5, (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_2^5, (V, 0))$.

8) $\mathcal{A}_5$, $(q_2^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q_3^5$, ход в расположение $\mathcal{A}_3)$.

9) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_h(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (\left(H, q_2^2\right), (0, 0))$, где $h \in \mathbb{N}$, $h < V$, H — наименьшее значение h (в указанных пределах), при котором $(P_h(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1)$.

10) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to (\left(V, q_2^2\right), (V, 0))$.

11) $\mathcal{A}_2$, $(\left(H, q_2^2\right), (P_V(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (\left(H, q_2^2\right), (V, 0))$, где $H \in \mathbb{N}$, $H \leqslant V$.

12) $\mathcal{A}_2$, $(\left(H, q_2^2\right), (P_V(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (\left(H, q_3^2\right)$, ход в расположение $\mathcal{A}_3)$, где $H \in \mathbb{N}$, $H \leqslant V$.

Автомат $\mathcal{A}_2$ в такт $2]a/V[+]\frac{b-a}{V}[$ достигнет $\mathcal{A}_3$. Затем $\mathcal{A}_2$ идет вправо со скоростью V. Автомат $\mathcal{A}_5$ в такт $]a/V[+]\frac{b-a}{V}[$ достигнет $\mathcal{A}_3$, затем идет вправо с вдвое меньшей скоростью.

13) $\mathcal{A}_5$, $(q_2^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q_4^5, (V, 0))$.

14) $\mathcal{A}_5$, $(q_3^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_4^5, (V, 0))$.

15) $\mathcal{A}_5$, (q_4^5), $\to (q_3^5, (0, 0))$.

16) $\mathcal{A}_2$, $(\left(H, q_2^2\right), (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (\left(H, q_3^2\right), (V, 0))$, где $H \in \mathbb{N}$, $H \leqslant V$.

17) $\mathcal{A}_2$, $(\left(H, q_3^2\right), (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5) = 0))$, $\to (\left(H, q_3^2\right), (V, 0))$, где $H \in \mathbb{N}$, $H \leqslant V$.

В такт $3]a/V[+]\frac{b-a}{V}[$ автоматы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_5$ оба оказываются в клетке $(x_0 + b+]a/V[\cdot V, y_0)$. После этого $\mathcal{A}_2$ шагает в клетку $(x_0 + b + a, y_0)$ и останавливается, а $\mathcal{A}_5$ возвращается к $\mathcal{A}_1$, по пути забирая с собой $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$.

18) $\mathcal{A}_2$, $(\left(H, q_3^2\right), (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5) = 1))$, $\to (q_1^2, (H - V, 0))$, где $H \in \mathbb{N}$, $H \leqslant V$.

19) $\mathcal{A}_5$, $(q_3^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_5^5, (-V, 0))$.

20) $\mathcal{A}_5$, $(q_3^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_5^5$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$.

21) $\mathcal{A}_5$, $(q_5^5, (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0)), \to (q_5^5, (-V, 0))$.
22) $\mathcal{A}_5$, $(q_5^5, (P_V(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1)), \to (q_5^5$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$.
23) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) = 0)), \to (q_0^3, (-V, 0))$.
24) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) = 1)), \to (q_1^3$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$.
25) $\mathcal{A}_4$, $(q_3^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0)), \to (q_3^4, (-V, 0))$.
26) $\mathcal{A}_4$, $(q_3^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 1)), \to (q_4^4$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$.

Построенный коллектив удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Будем в лемме 15 пользоваться определением (a, b)-расстановки, считая, что $a > b$, $a, b \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 15. *Существует коллектив автоматов* $K(R, V) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_4)$, *который, стартуя из* (a, b)*-расстановки с центром* (x_0, y_0), *через* $T = 3\cdot](a-b)/V[+]a/V[+]b/V[+1$ *тактов остановится в* $(a-b)$*-расстановке с центром* (x_0, y_0).

Доказательство. Приведем схему функционирования коллектива K. Перечень автоматов коллектива K и их алфавитов.
1) $(\mathcal{A}_1, \{q^1\})$, $(\mathcal{A}_2, \{q_0^2, \ldots, q_5^2\} \cup \{1, \ldots, 2V\})$, $(\mathcal{A}_3, \{q_0^3, \ldots, q_5^3\})$, $(\mathcal{A}_4, \{q_1^4, \ldots, q_5^4\})$.

Автомат $\mathcal{A}_4$ идет к автомату $\mathcal{A}_2$ со скоростью V, и достигнет его через $]a/V[$ тактов.
2) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 0)), \to (q_1^4, (V, 0))$.
3) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 0)), \to (q_1^4$, ход в расположение $\mathcal{A}_2)$.

Если автоматы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ находились в одной клетке, то есть $a = b$, то автоматы $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$ идут к $\mathcal{A}_1$, и коллектив останавливается.
4) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 1)), \to (q_4^4, (0, 0))$.
5) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1)), \to (q_4^2, (0, 0))$.
6) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4) = 1)), \to (q_4^3, (0, 0))$.
7) $\mathcal{A}_i$, $(q_4^i, (P_V(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_1) = 0)), \to (q_4^i, (-V, 0))$, где $i = 2, 3, 4$.
8) $\mathcal{A}_i$, $(q_4^i, (P_V(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_1) = 1)), \to (q_5^i$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$, где $i = 2, 3, 4$.

Если автоматы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ не находились в одной клетке, то, после встречи с $\mathcal{A}_2$, автомат $\mathcal{A}_4$ идет к $\mathcal{A}_3$ со скоростью V. Автомат $\mathcal{A}_4$

достигнет $\mathcal{A}_3$ через $](a-b)/V[$ тактов и будет стоять на месте, до встречи с $\mathcal{A}_2$. Автомат $\mathcal{A}_2$ идет вправо с вдвое меньшей скоростью, и достигнет $\mathcal{A}_4$ через $2](a-b)/V[$ тактов. Автомат $\mathcal{A}_2$, увидев $\mathcal{A}_4$ в своей V-окрестности, запоминает в первой компоненте своего состояния расстояние, на котором находился от него $\mathcal{A}_4$, в момент, когда $\mathcal{A}_2$ его увидел.
9) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_2^4, (-V, 0))$.
10) $\mathcal{A}_4$, $(q_1^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_3^4$, ход в расположение $\mathcal{A}_3)$.
11) $\mathcal{A}_4$, $(q_2^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_2^4, (-V, 0))$.
12) $\mathcal{A}_4$, $(q_2^4, (P_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q_3^4$, ход в расположение $\mathcal{A}_3)$.
13) $\mathcal{A}_2$, $(q_0^2, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (q_2^2, (0, 0))$.
14) $\mathcal{A}_2$, (q_1^2), $\to (q_2^2, (0, 0))$.
15) $\mathcal{A}_2$, $(q_2^2, (P_V(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 0))$, $\to (q_1^2, (-V, 0))$.
16) $\mathcal{A}_2$, $(q_2^2, (P_V(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1))$, $\to ((H+V)$, ход в расположение $\mathcal{A}_4)$, где H — минимальное h, такое что $P_h(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4) = 1$.

После встречи с $\mathcal{A}_4$, автомат $\mathcal{A}_3$ идет к $\mathcal{A}_1$ со скоростью V и достигнет его через $]b/V[$ тактов.
17) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P'_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, q_3^4) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_1^3, (-V, 0))$.
18) $\mathcal{A}_3$, $(q_0^3, (P'_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, q_3^4) = 1) \wedge (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_2^3$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$.
19) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_1^3, (-V, 0))$.
20) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_V(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_2^3$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$.

После встречи автоматов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_4$ оба они идут к $\mathcal{A}_1$ со скоростью V. После чего $\mathcal{A}_4$ останавливается, а $\mathcal{A}_2$ движется вправо, вплоть до встречи с $\mathcal{A}_3$.
21) $\mathcal{A}_4$, $(q_3^4, (P'_V(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2, q_2^2) = 1))$, $\to (q_4^4, (0, 0))$.
22) $\mathcal{A}_2$, $((H+V), (P_V(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to ((H+V), (-V, 0))$, где $H \in \{1, \ldots, V\}$.
23) $\mathcal{A}_2$, $((H+V), (P_V(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (H$, ход в расположение $\mathcal{A}_1)$, где $H \in \{1, \ldots, V\}$.
24) $\mathcal{A}_2$, $(H, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 0))$, $\to (H, (-V, 0))$, где $H \in \{1, \ldots, V\}$.

Автомат $\mathcal{A}_3$ после встречи с $\mathcal{A}_1$ двигается вправо, за каждые 2 такта смещаясь на V, пока не окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_2$, находящимся в состоянии H, где $H \in \{1, \ldots, V\}$.
25) $\mathcal{A}_3$, $(q_2^3, (P'_0(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2, H) = 0))$, $\to (q_3^3, (V, 0))$, где $H \in \{1, \ldots, V\}$.

26) $\mathcal{A}_3$, $(q_2^3, (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_2, H) = 1))$, $\to (q_4^3, (0,0))$, где $H \in \{1, \ldots, V\}$.
27) $\mathcal{A}_3$, (q_3^3), $\to (q_2^3, (0,0))$.

Таким образом, спустя $3 \cdot](a-b)/V[+]a/V[+]b/V[$ тактов после запуска коллектива, автоматы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ встретятся в клетке $(x_0 + V \cdot](a-b)/V[\,,\, y_0)$. После этого $\mathcal{A}_3$ возвращается к $\mathcal{A}_1$, как описано ранее (см. п. 7),8)), а $\mathcal{A}_2$ перемещается в клетку $(x_0 + (a-b))\,,\, y_0)$, после чего коллектив останавливается.
28) $\mathcal{A}_2$, $(H, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3) = 1))$, $\to (q_6^2, (H - V, 0))$, где $H \in \{1, \ldots, V\}$.

Построенный коллектив удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 16. *Существует коллектив автоматов* $K(1,1) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_6)$*, который, стартуя из* (a,b)*-расстановки с центром* (x_0, y_0)*, где* $a \leqslant b$*, через* $5ab$ *тактов остановится в* $(a, a \cdot b)$*-расстановке с центром* (x_0, y_0)*.*

Доказательство. Рассмотрим коллектив $K_1(1,1) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_5)$ из леммы 4. Этот коллектив, стартуя из (a,b)-расстановки, функционирует ровно $2ab$ тактов после своего запуска. Добавим к нему автомат $\mathcal{A}_6$ с внутренним алфавитом $\{q_1^6, \ldots, q_6^6\}$. Изменим функции переходов и выходов $\mathcal{A}_5$ и $\mathcal{A}_3$, так, чтобы $\mathcal{A}_5$, при последнем проходе забирал $\mathcal{A}_3$ с собой обратно к $\mathcal{A}_1$ (см док-во леммы л. 4 в [6]), и чтобы после того, как $\mathcal{A}_5$ и $\mathcal{A}_3$ окажутся в одной клетке с $\mathcal{A}_1$, автомат $\mathcal{A}_3$ переходил в первое из четырех новых состояний $q_0^3, \ldots, q_3^3$ (если у него уже были состояния, обозначенные q_0^3, q_1^3, q_2^3 или q_3^3, переименуем те, старые состояния). После этого добавим в схему функционирования коллектива следующие строки.

$\mathcal{A}_6$ идет вправо, за каждые 4 такта смещаясь на 1 клетку, пока в одной клетке с ним не окажется $\mathcal{A}_3$ в состоянии q_1^3.
1) $\mathcal{A}_6$, $(q_1^6, (P_0'(\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_3, q_1^3) = 0))$, $\to (q_2^6, (1,0))$.
2) $\mathcal{A}_6$, (q_2^6), $\to (q_3^6, (0,0))$.
3) $\mathcal{A}_6$, (q_3^6), $\to (q_4^6, (0,0))$.
4) $\mathcal{A}_6$, (q_4^6), $\to (q_1^6, (0,0))$.

После того, как исходный коллектив $K_1(1,1)$ завершит функционирование, $\mathcal{A}_3$ идет вправо, за каждые 2 такта смещаясь на 1 клетку, пока в одной клетке с ним не окажется $\mathcal{A}_6$ в состоянии q_1^6.
5) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_6, q_1^6) = 0))$, $\to (q_2^3, (0,0))$.

6) $\mathcal{A}_3$, (q_2^3), $\to (q_1^3, (1,0))$.

Через $4ab$ тактов после начала функционирования автоматы $\mathcal{A}_6$ и $\mathcal{A}_3$ встретятся в клетке $(x_0 + ab,\, y_0)$, находясь в состояниях q_1^6 и q_1^3, соответственно. После этого $\mathcal{A}_3$ переходит в начальное состояние q_0^3, а $\mathcal{A}_6$ возвращается к $\mathcal{A}_1$ за ab тактов.

7) $\mathcal{A}_3$, $(q_1^3, (P_0'(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_6, q_1^6) = 1))$, $\to (q_0^3, (0,0))$.
8) $\mathcal{A}_6$, $(q_1^6, (P_0'(\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_3, q_1^3) = 1))$, $\to (q_5^6, (-1,0))$.
9) $\mathcal{A}_6$, $(q_5^6, (P_1(\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_5^6, (-1,0))$.
10) $\mathcal{A}_6$, $(q_5^6, (P_1(\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_6^6, (-1,0))$.

Коллектив $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_7)$, стартуя из (a,b)-расстановки, за $5ab$ тактов переходит в $(a\,,\,ab)$-расстановку и останавливается. То есть, таким образом реализовано умножение чисел. Лемма доказана.

Следствие 1. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует коллектив автоматов $K(1,1) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_6)$, который, стартуя из i-расстановки с центром (x_0, y_0), через $k(5 \cdot i + 1)$ тактов остановится в $(i, k \cdot i)$-расстановке с центром (x_0, y_0).*

Лемма 17. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует коллектив автоматов $K(1,1) = (\,\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_8\,)$, который, стартуя из i-расстановки с центром (x_0, y_0), остановится в (i, k^i)-расстановке с центром (x_0, y_0).*

Доказательство. Рассмотрим коллектив $K_1(1,1) = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_6)$ из леммы 16. Добавим в этот коллектив автомат $\mathcal{B}_7$ с внутренним алфавитом $\{q_0^7, q_1^7\}$ и автомат $\mathcal{B}_8 = \mathcal{H}_0$. Автоматам $\mathcal{B}_2$ и $\mathcal{B}_6$ помимо их прежних состояний добавим состояния q_1^2, и $q_7^6, \ldots, q_{13}^6$, соответственно. Модифицируем коллектив следующим образом. Сначала $\mathcal{B}_7$ идет к $\mathcal{B}_8$ и останавливается в одной клетке с ним. Затем запускается подколлектив K_1. Если, по окончании работы K_1, автомат $\mathcal{B}_7$ не находится в одной клетке с $\mathcal{B}_6$ и $\mathcal{B}_1$, автомат $\mathcal{B}_6$ идет к $\mathcal{B}_7$ и сдвигает его на 1 клетку влево (предполагается, что $\mathcal{B}_7$ изначально находился не левее, чем $\mathcal{B}_1$).

1) $\mathcal{B}_6$, $(q_6^6, (P_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7) = 0))$, $\to (q_6^6, (1,0))$.
2) $\mathcal{B}_7$, $(q_0^7, (P_0'(\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_6, q_6^6) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_1) = 0))$, $\to (q_0^7, (-1,0))$.

После этого $\mathcal{B}_6$ возвращается к $\mathcal{B}_1$.

3) $\mathcal{B}_6$, $(q_6^6, (P_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_1) = 0))$, $\to (q_7^6, (-1,0))$.
4) $\mathcal{B}_6$, $(q_7^6, (P_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_1) = 0))$, $\to (q_7^6, (-1,0))$.

Если $\mathcal{B}_7$ не находится в той же клетке, что и $\mathcal{B}_1$, то каждый автомат $\mathcal{B}_i$ $(i \in \{4,5\})$ переходит из своего состояния, которое раньше было финальным — q^i_f в свое начальное состояние q^i_n.
5) $\mathcal{B}_i$, $(q^i_f, (P_0(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_7) = 0)), \to (q^i_n, (0,0))$, где $i \in \{4,5\}$.

Если при этом $\mathcal{B}_7$ находится на расстоянии, большем чем 1 от $\mathcal{B}_1$, то $\mathcal{B}_6$ переходит в свое начальное состояние q^6_n. Тем самым еще раз запускается процедура умножения.
6) $\mathcal{B}_7$, $(q^6_7, (P_1(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7) = 0) \wedge (P_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_1) = 1)), \to (q^6_n, (0,0))$.

Если же $\mathcal{B}_7$ находится на расстоянии 1 от $\mathcal{B}_1$, то $\mathcal{B}_6$ переходит в состояние q^6_8. После чего происходит последнее умножение, после которого $\mathcal{B}_3$ останавливается, а $\mathcal{B}_2$ возвращается к $\mathcal{B}_1$ вместе с $\mathcal{B}_6$.
7) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_7, (P_1(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7) = 1) \wedge (P_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_1) = 1)), \to (q^6_8, (0,0))$.
8) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_8, (P'_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_3, q^3_1) = 0)), \to (q^6_9, (1,0))$.
9) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_9), \to (q^6_{10}, (0,0))$.
10) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_{10}), \to (q^6_{11}, (0,0))$.
11) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_{11}), \to (q^6_8, (0,0))$.

Строка 5) схемы функционирования коллектива, построенного в лемме 16 заменяется на следующую.
5) $\mathcal{B}_3$, $(q^3_1, (P'_0(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, q^6_1) = 0) \wedge (P'_0(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, q^6_8) = 0)), \to (q^3_2, (0,0))$.

Далее добавляются следующие строки.
12) $\mathcal{B}_3$, $(q^3_1, (P'_0(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, q^6_8) = 1)), \to (q^3_3, (0,0))$.
13) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_8, (P'_0(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_3, q^3_1) = 1)), \to (q^6_{12}, (-1,0))$.
14) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_{12}, (P_1(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_1) = 0)), \to (q^6_{12}, (-1,0))$.
15) $\mathcal{B}_6$, $(q^6_{12}, (P_1(\mathcal{B}_6, \mathcal{B}_1) = 1)), \to (q^6_{13}, (-1,0))$.
16) $\mathcal{B}_7$, $(q^7_0, (P'_1(\mathcal{B}_7, \mathcal{B}_6, q^6_{12}) = 1)), \to (q^7_1, (-1,0))$.
17) $\mathcal{B}_2$, $(q^2_0, (P'_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6, q^6_{12}) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = 0)), \to (q^2_0, (-1,0))$.
18) $\mathcal{B}_2$, $(q^2_0, (P'_0(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_6, q^6_{12}) = 1) \wedge (P_1(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = 1)), \to (q^2_1, (-1,0))$.

Если по окончании очередного умножения $\mathcal{B}_7$ находится в той же клетке, что и $\mathcal{B}_1$, то каждый автомат $\mathcal{B}_i$ $(i \in \{4,5\})$ переходит в свое финальное состояние q^i_{ff}.
19) $\mathcal{B}_i$, $(q^i_f, (P_0(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_7) = 1)), \to (q^i_{ff}, (0,0))$, где $i \in \{4,5\}$.

Преобразуем коллектив $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_7)$ так, чтобы за первые k тактов $\mathcal{B}_2$ смещался на k клеток вправо, а затем коллектив начинал работать так, как описано выше. Теперь определим $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_8) = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_8, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_2)$. Этот коллектив удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 18. *Существует коллектив автоматов* $K(1,1) = (\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_6)$*, который, стартуя из* (a,b)*-расстановки с центром* (x_0,y_0) *(где* $a>0$*), через некоторое время остановится в* $([b/a]\,,b)$*-расстановке с центром* (x_0,y_0)*.*

Доказательство. Приведем схему функционирования коллектива K. Перечень автоматов коллектива K и их алфавитов.
1) $(\mathcal{A}_1,\{q^1\})$, $(\mathcal{A}_2,\{q^2_1,\ldots,q^2_5\})$, $(\mathcal{A}_3,\{q^3\})$, $(\mathcal{A}_4,\{q^4_1,\ldots,q^4_5\})$, $(\mathcal{A}_5,\{q^5_1,\ldots,q^5_{12}\})$, $(\mathcal{A}_6,\{q^6_1,q^6_2,q^6_3\})$.

Автомат $\mathcal{A}_5$ идет к автомату $\mathcal{A}_2$ и возвращаетя обратно к $\mathcal{A}_1$. Если $\mathcal{A}_5$ по пути встретил $\mathcal{A}_3$, то $\mathcal{A}_5$ переходит в состояние q^5_{10}.
2) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_1,(P_1(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2)=0))$, $\to (q^5_1,(1,0))$.
3) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_1,(P_1(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2)=1))$, $\to (q^5_2$, ход в расположение $\mathcal{A}_2)$.
4) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_1,(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_3)=1))$, $\to (q^5_{10},(0,0))$.
5) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_2,(P_1(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_1)=0))$, $\to (q^5_2,(-1,0))$.
6) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_2,(P_1(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_1)=1))$, $\to (q^5_3,(-1,0))$.

Если $\mathcal{A}_5$ по пути не встретил $\mathcal{A}_3$, то после возвращения к $\mathcal{A}_1$, автомат $\mathcal{A}_5$ идет к $\mathcal{A}_6$, двигает его на 1 вправо и возвращается к $\mathcal{A}_1$.
7) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_3,(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_6)=0))$, $\to (q^5_3,(1,0))$.
8) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_3,(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_6)=1))$, $\to (q^5_4,(0,0))$.
9) $\mathcal{A}_6$, $(q^6_1,(P'_0(\mathcal{A}_6,\mathcal{A}_5,q^5_3)=1))$, $\to (q^6_1,(1,0))$.
10) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_4,(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_1)=0))$, $\to (q^5_4,(-1,0))$.
11) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_4,(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_1)=0))$, $\to (q^5_5,(0,0))$.

Если $\mathcal{A}_5$, во время выполнения строк 1)-7), не встретил $\mathcal{A}_3$, далее происходит следующее. $\mathcal{A}_5$ идет к $\mathcal{A}_4$.
12) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_5,(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_4)=0))$, $\to (q^5_5,(1,0))$.
13) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_5,(P_0(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_4)=1))$, $\to (q^5_6,(0,0))$.

Автомат $\mathcal{A}_5$ из клетки, где находится $\mathcal{A}_4$, идет к автомату $\mathcal{A}_2$ со скоростью 1, и достигнет его через a тактов. Автомат $\mathcal{A}_4$ идет к $\mathcal{A}_2$ с вдвое меньшей скоростью, и достигнет его через $2a$ тактов.
14) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_6,(P_1(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2)=0))$, $\to (q^5_6,(1,0))$.
15) $\mathcal{A}_5$, $(q^5_6,(P_1(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2)=1))$, $\to (q^5_7$, ход в расположение $\mathcal{A}_2)$.
16) $\mathcal{A}_4$, (q^4_1), $\to (q^4_2,(0,0))$.
17) $\mathcal{A}_4$, $(q^4_2,(P_1(\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_2)=0))$, $\to (q^4_1,(1,0))$.
18) $\mathcal{A}_4$, $(q^4_2,(P_1(\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2)=1))$, $\to (q^4_3$, ход в расположение $\mathcal{A}_2)$.

$\mathcal{A}_5$ сразу же, после встречи с $\mathcal{A}_2$, идет вправо, за кажые 2 такта смещаясь на 1 клетку. После того, как автоматы $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_2$ встретятся,

$\mathcal{A}_4$ стоит на месте, а $\mathcal{A}_2$ идет вправо со скоростью 1. Это проолжается до встречи $\mathcal{A}_5$ и $\mathcal{A}_2$.
19) $\mathcal{A}_5$, $(q_7^5, (P_0'(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2, q_2^2) = 0))$, $\to (q_8^5, (1, 0))$.
20) $\mathcal{A}_5$, (q_8^5), $\to (q_7^5, (0, 0))$.
21) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_4, q_3^4) = 1))$, $\to (q_2^2, (1, 0))$.
22) $\mathcal{A}_2$, $(q_2^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5, q_7^5) = 0))$, $\to (q_2^2, (1, 0))$.

$\mathcal{A}_5$ и $\mathcal{A}_2$ встретятся в клетке, находящейся на a клеток правее, чем $\mathcal{A}_4$. После этого $\mathcal{A}_2$ снова переходит в состояние q_1^2, а $\mathcal{A}_5$ возвращается к $\mathcal{A}_1$ и переходит в состояние q_1^5.
23) $\mathcal{A}_2$, $(q_2^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5, q_7^5) = 1))$, $\to (q_1^2, (0, 0))$.
24) $\mathcal{A}_5$, $(q_7^5, (P_0'(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2, q_2^2) = 1))$, $\to (q_9^5, (-1, 0))$.
25) $\mathcal{A}_5$, $(q_9^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_9^5, (-1, 0))$.
26) $\mathcal{A}_5$, $(q_9^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_1^5, (0, 0))$.

Если изначально $\mathcal{A}_2$ находился на a клеток правее $\mathcal{A}_4$, то после произведенных операций $\mathcal{A}_4$ окажется в клетке, где ранее находился $\mathcal{A}_2$, а $\mathcal{A}_2$ — еще на a клеток правее.

Если $\mathcal{A}_5$, во время выполнения строк 1)–7), встретил $\mathcal{A}_3$, далее происходит следующее. $\mathcal{A}_5$ идет к $\mathcal{A}_2$.
27) $\mathcal{A}_5$, $(q_{10}^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 0))$, $\to (q_{10}^5, (1, 0))$.
28) $\mathcal{A}_5$, $(q_{10}^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2) = 1))$, $\to (q_{11}^5, (0, 0))$.

$\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_4$ возвращаются к $\mathcal{A}_1$, после чего $\mathcal{A}_4$ и $\mathcal{A}_5$ останавливаются.
29) $\mathcal{A}_2$, $(q_1^2, (P_0'(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5, q_{10}^5) = 1))$, $\to (q_3^2, (-1, 0))$.
30) $\mathcal{A}_2$, $(q_3^2, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_3^2, (-1, 0))$.
31) $\mathcal{A}_2$, $(q_3^2, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_4^2, (0, 0))$.
32) $\mathcal{A}_5$, $(q_{11}^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_{11}^5, (-1, 0))$.
33) $\mathcal{A}_5$, $(q_{11}^5, (P_0(\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_{12}^5, (0, 0))$.
34) $\mathcal{A}_4$, $(q_3^4, (P_1'(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, q_{11}^5) = 1))$, $\to (q_4^4, (0, 0))$.
35) $\mathcal{A}_4$, $(q_4^4, (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\to (q_4^4, (-1, 0))$.
36) $\mathcal{A}_4$, $(q_4^4, (P_0(\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1) = 1))$, $\to (q_5^4, (0, 0))$.

Затем $\mathcal{A}_2$ идет к $\mathcal{A}_6$ и останавливается в клетке, в которой находился $\mathcal{A}_6$. После этого $\mathcal{A}_6$ возвращается к $\mathcal{A}_1$ и коллектив останавливается.
37) $\mathcal{A}_2$, $(q_4^2, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_6) = 0))$, $\to (q_4^2, (1, 0))$.
38) $\mathcal{A}_2$, $(q_4^2, (P_0(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_6) = 1))$, $\to (q_5^2, (0, 0))$.
39) $\mathcal{A}_6$, $(q_1^6, (P_0'(\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_5, q_{12}^5) = 1))$, $\to (q_2^6, (0, 0))$.

40) $\mathcal{A}_6$, $(q_2^6, (P_0(\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\rightarrow (q_2^6, (-1, 0))$.
41) $\mathcal{A}_6$, $(q_2^6, (P_0(\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_1) = 0))$, $\rightarrow (q_3^6, (0, 0))$.

Таким образом, за каждый цикл повторения операций 15)–27) $\mathcal{A}_2$ (изначально стоящий на расстоянии a справа от $\mathcal{A}_1$) смещается на a клеток вправо. Автомат $\mathcal{A}_6$ служит счетчиком числа таких перемещений $+1$. Эти перемещения продолжаются до тех пор, пока расстояние между $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_1$ меньше b. Построенный коллектив K удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 19. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует коллектив автоматов $K(1,1) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_8)$, который, стартуя из a-расстановки с центром (x_0, y_0), через некоторое время остановится в $(a,]\log_k(a{+}1)[)$-расстановке с центром (x_0, y_0).*

Доказательство. Рассмотрим коллектив, построенный в лемме 16, $K'(1,1) = (\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_6)$. Рассмотрим коллектив $K(1,1) = (\mathcal{A}'_1, \mathcal{H}_0, \mathcal{B}, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{A}'_6)$, который, стартуя из a-расстановки, будет функционировать следующим образом. Автоматы $\mathcal{A}'_2$ и $\mathcal{A}'_3$ смещаются на k клеток вправо. После этого автомат $\mathcal{A}'_7$ двигает $\mathcal{B}$ на 1 вправо и возвращается к $\mathcal{A}'_1$. Затем автомат $\mathcal{A}'_7$ идет к $\mathcal{A}'_3$ и обратно. Если по пути он встретил $\mathcal{H}_0$, причем $\mathcal{H}_0$ находится не в той же клетке, в которой $\mathcal{A}'_3$ (то есть, если $\mathcal{H}_0$ находится левее $\mathcal{A}'_3$), то $\mathcal{A}'_7$ идет к $\mathcal{A}'_3$ и вместе с ним и $\mathcal{A}'_2$ возвращается к $\mathcal{A}'_1$, после чего коллектив K останавливается. В противном случае $\mathcal{A}'_7$ двигает $\mathcal{B}$ на 1 вправо, возвращается к $\mathcal{A}'_1$ и запускается подколлектив K'. После остановки K' автомат $\mathcal{A}'_7$ снова идет к $\mathcal{A}'_3$ и обратно. Если по пути он встретил $\mathcal{H}_0$, и $\mathcal{H}_0$ находится не в той же клетке, в которой $\mathcal{A}'_3$, то $\mathcal{A}'_7$ идет к $\mathcal{A}'_3$ и вместе с ним и $\mathcal{A}'_2$ возвращается к $\mathcal{A}'_1$, после чего коллектив K останавливается. В противном случае $\mathcal{A}'_7$ двигает $\mathcal{B}$ на 1 вправо, возвращается к $\mathcal{A}'_1$ и еще раз запускается подколлектив K'. Это продолжается до тех пор, пока результат работы подколлектива K' (то есть расстояние между $\mathcal{A}'_1$ и $\mathcal{A}'_3$) не станет больше a (то есть расстояния между $\mathcal{A}'_1$ и $\mathcal{H}_0$). Построенный коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_8) = (\mathcal{A}'_1, \mathcal{H}_0, \mathcal{B}, \mathcal{A}'_2, \ldots, \mathcal{A}'_6)$ удовлетворяет условию леммы. Лемма доказана.

Пусть автомат-жертва $U(R', V')$ с n состояниями, перемещающийся в квадранте в отсутствие хищников, имеет траекторию типа 2. Как следует из лемм 3, 2, с такта τ, когда U видит нижний $\langle$левый$\rangle$ борт, находясь вне $(R' \cdot (n+1)^2 \cdot V')$-окрестности угла, вплоть до такта, когда он увидит левый $\langle$нижний$\rangle$ борт, последовательности выходных символов и состояний U являются периодическими. В качестве периода выходной последовательности U будем рассматривать общий период этой последовательности и последовательности состояний U. Вектора перемещения U за предпериод и за период последовательности выходных символов на этом отрезке времени однозначно определяются состоянием U в такт τ и его входным символом в такт τ. Обозначим эти вектора как (s_1^0, s_2^0) и (s_1, s_2), соответственно.

Назовем *программой* жертвы U последовательность записей вида $q, a, q', q'', b, sgn_1(s_1^0), |s_1^0|, sgn_1(s_2^0), |s_2^0|, |s_1|, |s_2|$, где q и a — состояние и входной символ U, соответственно, q' и q'' — состояния, в которые переходит U из состояния q при входном символе a, за 1 такт и за предпериод выходной последовательности, соответственно, b — выходной символ, который выдает U из состояния q при входном символе a, функция $sgn_1()$ возвращает 1, если ее аргумент неотрицателен, и 0 — в противном случае, числа s_1^0, s_2^0, s_1 и s_2 равны 0, если входной символ a соответствует тому, что U не видит борта, либо U видит некоторого хищника, и имеют тот же смысл, что и в предыдущем абзаце, если входной символ a соответствует тому, что U видит борт, но не видит ни одного из хищников. В программе для любой пары (q, a), такой, что символ a соответствует ситуации, когда жертва не видит хищников, должна присутствовать ровно одна запись (для других значений a записей нет). Будем считать, что входной, выходной, и внутренний алфавиты автомата U занумерованы. И в программе автомата, и в дальнейших выкладках будем использовать вместо входных символов, выходных символов и состояний их номера. Обозначать эти номера будем так же, как ранее обозначали эти символы и состояния: a, b, q, и т. д. Занумеруем пары вида (q, a) в следующем порядке: $(1,1), \ldots, (1,n), \ldots, ((R'+1)^2, 1), \ldots ((R'+1)^2, n)$. Будем считать, что в программе автомата записи упорядочены в соответствии с введенной нумерацией.

Заметим, что мощность выходного алфавита любой жертвы с параметрами R', V' и количество входных символов этой жертвы, при которых жертва не видит хищников, не превосходят $(R'+1)^2$. Назовем пару (n, p), где n — число состояний U, а p — натуральное число, такое что его запись в $((R'+1)^2)$-ричной системе счисления является $((R'+1)^2)$-ричной записью программы автомата U, *кодом автомата-жертвы* U. Старшие разряды p кодируют начало программы, младшие — конец. Входные, выходные символы и знаки кодируются одной $((R'+1)^2)$-ричной цифрой, состояния — $]\log_{((R'+1)^2)}(n+1)[$ цифрами, числа $|s_1|$ и $|s_2|$ — $]\log_{((R'+1)^2)}(n \cdot V'+1)[$ цифрами, а числа $|s_1^0|$ и $|s_2^0|$ — $]\log_{((R'+1)^2)}(n \cdot (n+1) \cdot R' \cdot V'+1)[$ цифрами.

Если коллектив $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \geqslant 4)$, находится в лабиринте L в *нижней* $\langle$*левой*$\rangle$ (a_2, a_3, a_4)*-расстановке с центром* (x_0, y_0), автомат $\mathcal{A}_1$ имеет внутренний алфавит вида $\{1, \ldots, (R'+1)^2\}^2 \times Q$ и находится в состоянии вида (a, b, q), то будем говорить, что коллектив K находится в *нижней* $\langle$*левой*$\rangle$ $(a)(a_2, a_3, a_4)$*-расстановке с центром* (x_0, y_0). Нижнюю $(a)(a_2, a_3, a_4)$-расстановку с центром (x_0, y_0), а также левую $(a)(a_2, a_3, a_4)$-расстановку с центром (x_0, y_0), будем называть $(a)(a_2, a_3, a_4)$*-расстановками с центром* (x_0, y_0).

Если подколлектив $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_8)$ коллектива $K = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$ $(m \geqslant 10)$, находится в лабиринте L в *нижней* $\langle$*левой*$\rangle$ $(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$*-расстановке типа* $(7, 8)$ *с центром* (x_0, y_0), автоматы $\mathcal{A}_9$ и $\mathcal{A}_{10}$ находятся в клетках $(x_0 + a_9\,, y_0)$ $\langle(x_0\,, y_0 + a_9)\rangle$ и $(x_0\,, y_0 + a_{10})$ $\langle(x_0 + a_{10}\,, y_0)\rangle$, соответственно (где $a_9 \in \mathbb{N}_0$, $a_{10} \in \mathbb{Z}$), автомат $\mathcal{A}_1$ имеет внутренний алфавит вида $\{1, \ldots, (R'+1)^2\}^2 \times \{-1, 1\}^2 \times Q$ и находится в состоянии вида $(a, b, sgn_0(a_7), sgn_0(a_8), q)$, а все остальные автоматы расположены в клетке (x_0, y_0), то будем говорить, что коллектив K находится в *нижней* $\langle$*левой*$\rangle$ $(a, b)(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$*-расстановке с центром* (x_0, y_0), будем также говорить в этом случае, что K находится в $(a, b)(a_2, \ldots, a_{10})$*-расстановке с центром* (x_0, y_0).

Оказывается, существует коллектив автоматов, который, при фиксированный R', V' $(R' \leqslant R, V' \leqslant V)$, по коду произвольной жертвы $U(R', V')$ восстанавливает фрагменты ее программы.

Лемма 20. *Существует коллектив автоматов* $K(R, V) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{21})$*, который, стартуя в* L_4 *из* $(a)(n, p, q)$*-расстановки с центром* (x_0, y_0) *(где одно из чисел* x_0, y_0 *равно* 1 *и* $q \leqslant n \leqslant p$*), в случае, если* (n, p), q, a *— код, состояние и входной символ жертвы* $U(R', V')$*, имеющей траекторию типа* 2*, соответственно, причем* $\max\{x_0, y_0\} > R' \cdot (n+1)^2 \cdot V'$*, остановится в* $(a, b)(n, p, q, q', q'', s_1^0, s_2^0,$

s_1, s_2)-*расстановке с центром* (x_0, y_0), *где* q', q'', b, s_1^0, s_2^0, s_1, s_2 — *компоненты программы* U, *соответствующие паре* (q, a). *В случае, если* K *не останавливается в указанной расстановке, он остановится в канонической расстановке с центром* (x_0, y_0).

Доказательство. Построим коллектив $K'(R, V) = (\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_{21})$, который, стартуя из нижней $(a)(n, p, q)$-расстановки с центром (x_0, y_0) функционирует так, как описанно в утверждении леммы (в обоих случаях останавливаясь в нижних расстановках соответствующего типа).

Из леммы 19 следует, что существует коллектив $K_1(R, V) = (\mathcal{A}_1^1, \ldots, \mathcal{A}_{13}^1)$, который, стартуя из $(a)(n, p, q)$-расстановки с центром (x_0, y_0), остановится в такой расстановке, что подколлектив $(\mathcal{A}_1^1, \mathcal{A}_2^1, \mathcal{A}_3^1, \mathcal{A}_4^1, \mathcal{A}_9^1, \ldots, \mathcal{A}_{13}^1)$ находится в $(a)(n, p, q)$-расстановке с центром (x_0, y_0), а автоматы $\mathcal{A}_5^1$, $\mathcal{A}_6^1$, $\mathcal{A}_7^1$ и $\mathcal{A}_8^2$ находятся в клетках $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n+1)[\,, y_0)$, $(x_0 + p\,, y_0)$, $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(p+1)\,[\,, y_0)$ и $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n+1)[\,, y_0)$, соответственно.

Расстановку, в которой остановится этот коллектив, будем называть $(a)(n, p, q, c_1, c_2, c_3, c_4)$-*расстановкой с центром* (x_0, y_0), где $c_1 =]\log_{(R'+1)^2}(n+1)[$, $c_2 = p$, $c_3 =]\log_{(R'+1)^2}(p+1)[$, $c_4 = c_1$. При этом будем требовать, чтобы $c_3 =]\log_{(R'+1)^2}(c_2+1)[$. То есть, c_1 — количество цифр в $((R'+1)^2)$-ричной кодировке, которые требуются для кодирования в программе автомата-жертвы состояний, а c_3 — количество цифр в $((R'+1)^2)$-ричной кодировке числа c_2.

Используя леммы 14, 15, 16, 17, 18, построим коллектив $K_2(R, V) = (\mathcal{A}_1^2, \ldots, \mathcal{A}_{16}^2)$, который, стартуя из $(a)(n, p, q, c_1, c_2, c_3, c_4)$-расстановки с центром (x_0, y_0), функционирует следующим образом.

1. Автомат $\mathcal{A}_{12}^2$ перемещается в клетку $(x_0 + ((R'+1)^2)^{c_4-1}\,]\,, y_0)$.
2. Автоматы $\mathcal{A}_{10}^2$ и $\mathcal{A}_{11}^2$ перемещаются в клетку $(x_0 + ((R'+1)^2)^{c_3-1}\,, y_0)$.
3. Автомат $\mathcal{A}_{10}^2$ перемещается в клетку $(x_0 + [\,c_2\,/\,((R'+1)^2)^{c_3-1}\,]\,, y_0)$.
4. Автомат $\mathcal{A}_{12}^2$ перемещается в клетку

$$(\,x_0 + [\,c_2\,/\,((R'+1)^2)^{c_3-1}\,] \cdot ((R'+1)^2)^{c_4-1}\,]\,, y_0\,).$$

5. Автоматы $\mathcal{A}_{12}^2$ и $\mathcal{A}_9^2$ перемещаются, соответственно, в клетки $(x_0\,, y_0)$ и

$$(\,x_0 + j + [\,c_2\,/\,((R'+1)^2)^{c_3-1}\,] \cdot ((R'+1)^2)^{c_4-1}\,]\,, y_0\,).$$

где j — то расстояние, на котором находился $\mathcal{A}_9^2$ от $\mathcal{A}_1^2$ до выполнения п. 5.
6. Автомат $\mathcal{A}_{11}^2$ перемещается в клетку

$$(x_0 + [\, c_2 \,/\, ((R'+1)^2)^{c_3-1}\,] \cdot ((R'+1)^2)^{c_3-1}\,,\, y_0).$$

7. Автоматы $\mathcal{A}_{11}^2$ и $\mathcal{A}_6^2$ перемещаются, соответственно, в клетки $(x_0\,,\, y_0)$ и

$$(x_0 + c_2 \,-\, [\, c_2 \,/\, ((R'+1)^2)^{c_3-1}\,] \cdot ((R'+1)^2)^{c_3-1}\,,\, y_0).$$

8. Автоматы $\mathcal{A}_7^2$ и $\mathcal{A}_8^2$ смещаются на 1 влево.

Затем действия пунктов 1–9 выполняются повторно, до тех пор, пока либо автомат $\mathcal{A}_7^2$, либо автомат $\mathcal{A}_8^2$ не окажутся на расстоянии в той же клетке, что и $\mathcal{A}_1^2$. В первом случае (то есть если на следующем шаге значение $c_3 = 0$) автомат $\mathcal{A}_{10}^2$ возвращается к $\mathcal{A}_1^2$ и коллектив останавливается, причем $\mathcal{A}_1^2$ останавливается в финальном состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q_{ff}^1)$. Во втором случае (то есть если на следующем шаге значение $c_3 > 0$, $c_4 = 0$) автомат $\mathcal{A}_{10}^2$ также возвращается к $\mathcal{A}_1^2$ и коллектив останавливается, но $\mathcal{A}_1^2$ останавливается в финальном состоянии вида (a, c, i_1, i_2, q_f^1).

Таким образом, во втором случае действия пунктов 1–9 выполняются c_1 раз (так как изначально $c_4 = c_1$), в результате чего расстояние от $\mathcal{A}_1^2$ до $\mathcal{A}_9^2$ становится равным числу, составленному из c_1 первых $((R'+1)^2)$-ричных цифр числа c_2.

Используя леммы 14–19, построим коллектив $K_3(R, V) = (\,\mathcal{A}_1^3, \ldots, \mathcal{A}_{21}^3\,)$, который, стартуя из $(a)(n, p, q, c_1, c_2, c_3, c_4)$-расстановки с центром (x_0, y_0), функционирует так.
1. Сначала K_3 функционирует так же, как K_2. Будем считать, что внутренний алфавит $\mathcal{A}_1^3$ есть $Q \times \{0, 1\}$, где Q — внутренний алфавит $\mathcal{A}_1^2$, причем все компонетны состояния $\mathcal{A}_1^3$, кроме последней, сменяют друг друга так же, как состояния $\mathcal{A}_1^2$.
2. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q_{ff}^1, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.
3. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q_f^1, i)$, то K_3 функционирует так. Если $\mathcal{A}_4^3$ и $\mathcal{A}_9^3$ находятся в одной клетке (то есть «раскодированное» из кода число есть q), автомат $\mathcal{A}_1^3$ переходит в

состояние $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, 1)$. В противном случае автомат $\mathcal{A}^3_1$ переходит в состояние $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, 0)$.
4. Автоматы $\mathcal{A}^3_5$, $\mathcal{A}^3_8$ и $\mathcal{A}^3_9$ перемещаются в клетки $(x_0 + 1\,,\, y_0)$, $(x_0 + 1\,,\, y_0)$ и $(x_0\,,\, y_0)$, соответственно.
5. K_3 снова функционирует так же, как K_2.
6. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.
7. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, i)$, то K_3 функционирует так. Если $\mathcal{A}^3_9$ находится на расстоянии a от $\mathcal{A}^3_1$ (то есть «раскодированное» из кода число есть a), причем $i = 1$, то $\mathcal{A}^3_1$ остается в состоянии $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, 1)$. В противном случае $\mathcal{A}^3_1$ переходит в состояние $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, 0)$.
8. Автоматы $\mathcal{A}^3_5$, $\mathcal{A}^3_8$ и $\mathcal{A}^3_9$ перемещаются в клетки $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n+1)[\,,\, y_0)$, $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n+1)[\,,\, y_0)$ и $(x_0\,,\, y_0)$, соответственно.
9. K_3 снова функционирует так же, как K_2.
10. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.
11. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, i)$, то автоматы $\mathcal{A}^3_5$ и $\mathcal{A}^3_8$ перемещаются в клетку $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n+1)[\,,\, y_0)$, а автоматы $\mathcal{A}^3_9$ и $\mathcal{A}^3_{17}$ меняются местами (каждый становится в ту клетку, в которой ранее находился другой).
12. K_3 снова функционирует так же, как K_2.
13. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.
14. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, i)$, автоматы $\mathcal{A}^3_5$ и $\mathcal{A}^3_8$ перемещаются в клетку $(x_0 + 1\,,\, y_0)$, а автоматы $\mathcal{A}^3_9$ и $\mathcal{A}^3_{18}$ меняются местами.
15. K_3 снова функционирует так же, как K_2.
16. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.
17. Если $\mathcal{A}^3_1$ останавливается в состоянии вида $(a, c, i_1, i_2, q^1_f, i)$, автоматы $\mathcal{A}^3_5$ и $\mathcal{A}^3_8$ перемещаются в клетку $(x_0 + 1\,,\, y_0)$, автомат $\mathcal{A}^3_1$ переходит в состояние $(a, b, i_1, i_2, q^1_f, i)$, где b — расстояние от $\mathcal{A}^3_9$ до $\mathcal{A}^3_1$. В дальнейшем $\mathcal{A}^3_1$ не меняет вторую компоненту своего состояния. После этого $\mathcal{A}^3_9$ перемещается в клетку $(x_0\,,\, y_0)$.

18. K_3 снова функционирует так же, как K_2.

19. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.

20. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q^1_f, i)$, то автоматы $\mathcal{A}_5^3$ и $\mathcal{A}_8^3$ перемещаются в клетку $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n(n+1) \cdot R' \cdot V' + 1)[\,,\, y_0)$, а автоматы $\mathcal{A}_9^3$ и $\mathcal{A}_{20}^3$ меняются местами.

21. K_3 снова функционирует так же, как K_2.

22. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.

23. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q^1_f, i)$, то K_3 функционирует так. Автоматы $\mathcal{A}_5^3$ и $\mathcal{A}_8^3$ перемещаются в клетку $(x_0 + 1\,,\, y_0)$. Если автоматы $\mathcal{A}_1^3$ и $\mathcal{A}_{20}^3$ находятся в одной клетке (то есть, если знак расшифрованного числа отрицательный), то $\mathcal{A}_{19}^3$ располагается слева от $\mathcal{A}_1^3$, на том же расстоянии от $\mathcal{A}_1^3$, что и $\mathcal{A}_9^3$, при условии, что данная клетка принадлежит квадранту. Если данная клетка не принадлежит квадранту, автомат $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии $(a, b, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, и коллектив K_3 выполняет действия п. 37. Если данная клетка принадлежит квадранту, автоматы $\mathcal{A}_9^3$ и $\mathcal{A}_{20}^3$ перемещаются в клетку $(x_0\,,\, y_0)$, после чего коллектив K_3 выполняет действия п. 24 (далее по порядку). Если автоматы $\mathcal{A}_1^3$ и $\mathcal{A}_{20}^3$ не находились в одной клетке (то есть, если знак расшифрованного числа положительный), то автоматы $\mathcal{A}_9^3$ и $\mathcal{A}_{19}^3$ меняются местами (каждый становится в ту клетку, в которой ранее находился другой). Автомат $\mathcal{A}_{20}^3$ перемещается в клетку $(x_0\,,\, y_0)$, после чего коллектив K_3 выполняет действия п. 24 (далее по порядку).

24. K_3 снова функционирует так же, как K_2.

25. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.

26. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q^1_f, i)$, то автоматы $\mathcal{A}_5^3$ и $\mathcal{A}_8^3$ перемещаются в клетку $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n(n+1) \cdot R' \cdot V' + 1)[\,,\, y_0)$, а автоматы $\mathcal{A}_9^3$ и $\mathcal{A}_{21}^3$ меняются местами.

27. K_3 снова функционирует так же, как K_2.

28. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q^1_{ff}, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.

29. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q_f^1, i)$, то K_3 функционирует так. Автоматы $\mathcal{A}_5^3$ и $\mathcal{A}_8^3$ перемещаются в клетку $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n \cdot V' + 1)[\,,\, y_0)$. Если автоматы $\mathcal{A}_1^3$ и $\mathcal{A}_{21}^3$ находятся в одной клетке (то есть, если знак расшифрованного числа отрицательный), то $\mathcal{A}_{20}^3$ располагается слева от $\mathcal{A}_1^3$, на том же расстоянии от $\mathcal{A}_1^3$, что и $\mathcal{A}_9^3$, при условии, что данная клетка принадлежит квадранту. Если данная клетка не принадлежит квадранту, автомат $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии $(a, b, i_1, i_2, q_{ff}^1, i)$, и коллектив K_3 выполняет действия п. 37. Если данная клетка принадлежит квадранту, автоматы $\mathcal{A}_9^3$ и $\mathcal{A}_{21}^3$ перемещаются в клетку $(x_0\,,\, y_0)$, после чего коллектив K_3 выполняет действия п. 30 (далее по порядку). Если автоматы $\mathcal{A}_1^3$ и $\mathcal{A}_{21}^3$ не находились в одной клетке (то есть, если знак расшифрованного числа положительный), то автоматы $\mathcal{A}_9^3$ и $\mathcal{A}_{20}^3$ меняются местами (каждый становится в ту клетку, в которой ранее находился другой). Автомат $\mathcal{A}_{21}^3$ перемещается в клетку $(x_0\,,\, y_0)$, после чего коллектив K_3 выполняет действия п. 30 (далее по порядку).

30. K_3 снова функционирует так же, как K_2.

31. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q_{ff}^1, i)$, то коллектив K_3 выполняет действия п. 37.

32. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q_f^1, i)$, то автоматы $\mathcal{A}_5^3$ и $\mathcal{A}_8^3$ перемещаются в клетку $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n V' + 1)[, y_0)$. После этого автомат $\mathcal{A}_{21}^3$ располагается слева от $\mathcal{A}_1^3$, на том же расстоянии от $\mathcal{A}_1^3$, что и $\mathcal{A}_9^3$, при условии, что данная клетка принадлежит квадранту. Если данная клетка не принадлежит квадранту, автомат $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии $(a, b, i_1, i_2, q_{ff}^1, i)$, и коллектив K_3 выполняет действия п. 37. Затем, если данная клетка принадлежит квадранту, автомат $\mathcal{A}_9^3$ перемещается в клетку $(x_0\,,\, y_0)$, после чего коллектив K_3 выполняет действия п. 33 (далее по порядку).

33. K_3 снова функционирует так же, как K_2.

34. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q_{ff}^1, i)$, коллектив K_3 выполняет действия п. 37.

35. Если $\mathcal{A}_1^3$ остановился в состоянии вида $(a, b, i_1, i_2, q_f^1, 1)$, то автомат $\mathcal{A}_{16}^3$ располагается сверху от $\mathcal{A}_1^3$, на том же расстоянии от $\mathcal{A}_1^3$, что и $\mathcal{A}_9^3$. Если $\mathcal{A}_{16}^3$ или $\mathcal{A}_{21}^3$ находится в одной клетке с $\mathcal{A}_1^3$ (то есть, если $s_1 \cdot s_2 = 0$), то $\mathcal{A}_1^3$ останавливается в состоянии $(a, b, i_1, i_2, q_{ff}^1, 1)$, после чего коллектив K_3 выполняет действия п. 37. В противном случае

автоматы $\mathcal{A}_5^3$, $\mathcal{A}_6^3$, $\mathcal{A}_7^3$, $\mathcal{A}_8^3$ и $\mathcal{A}_9^3$ перемещаются в клетку $(x_0\,,\,y_0)$. После этого коллектив останавливается. В результате коллектив

$$(\,\mathcal{A}_1^3, \mathcal{A}_2^3, \mathcal{A}_3^3, \mathcal{A}_4^3, \mathcal{A}_{17}^3, \mathcal{A}_{18}^3, \mathcal{A}_{19}^3, \mathcal{A}_{20}^3\mathcal{A}_{21}^3, \mathcal{A}_{16}^3, \mathcal{A}_5^3, \mathcal{A}_6^3, \ldots, \mathcal{A}_{14}^3, \mathcal{A}_{15}^3\,)$$

остановится в $(a,b)(n,p,\ q,q',\ q'',s_1^0,s_2^0,\ s_1,s_2)$-расстановке с центром (x_0,y_0).

36. Если $\mathcal{A}_1^3$ останавился в состоянии вида $(a,b,i_1,i_2,q_f^1,0)$, то автоматы $\mathcal{A}_9^3$, $\mathcal{A}_{16}^3,\ldots,\mathcal{A}_{21}^3$ перемещаются в клетку $(x_0\,,\,y_0)$. Автоматы $\mathcal{A}_5^3$ и $\mathcal{A}_8^3$ перемещаются в клетку $(x_0 +]\log_{(R'+1)^2}(n+1)[\,,\,y_0)$. После этого снова повторяются действия п. 1–36 (до тех пор, пока коллектив не остановится, либо, как описано в п. 35, либо, как описано в п. 37).

37. Автоматы $\mathcal{A}_2^3,\ldots,\mathcal{A}_{21}^3$ перемещаются в клетку $(x_0\,,\,y_0)$. После этого коллектив останавливается в канонической расстановке с центром (x_0,y_0). Будем считать, что последним остановился $\mathcal{A}_1^1$ в (добавленном) состоянии вида $(a,a',i_1,i_2,q_{f0}^1,1)$.

Построим композицию коллектива, который функционирует (с точностью до перенумерации) так же, как K_1, и коллектива K_3.

$K_1' = (\,\mathcal{A}_1^1,\ldots,\mathcal{A}_4^1,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0,\mathcal{A}_5^1,\ldots,\mathcal{A}_{13}^1,\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\,)$.

$(\,K_1' \circ K_3\,)(1,2,3,4,11,\ldots,21,10,5,\ldots,9) \xrightarrow{1} K'(R,V) = (\,\mathcal{A}_1',\ldots,\mathcal{A}_{21}'\,)$.

Коллектив K', стартуя из нижней $(a)(n,p,q)$-расстановки с центром (x_0,y_0) функционирует так, как описанно в утверждении леммы (останавливаясь в нижней расстановке соответствующего типа). Аналогично строится коллектив $K''(R,V) = (\,\mathcal{A}_1'',\ldots,\mathcal{A}_{21}''\,)$, который, стартуя из левой $(a)(n,p,q)$-расстановки с центром (x_0,y_0) функционирует так, как описанно в утверждении леммы (останавливаясь в левой расстановке соответствующего типа). Поскольку коллектив, стартуя из $(a)(n,p,q)$-расстановки с центром $(x_0,1)$ или с центром $(1,y_0)$ по входному символу может определить, нижняя это расстановка или левая, легко строится коллектив $K(R,V) = (\,\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_{21}\,)$, который, стартуя из нижней $(a)(n,p,q)$-расстановки работает, как K', а стартуя из левой $(a)(n,p,q)$-расстановки работает, как K''. Этот коллектив и является искомым.

Очевидно, максимально возможное (по параметрам n, q, a, (x_0,y_0)) время работы коллектива K является функцией параметра p (это следует из соотношений $q \leqslant n \leqslant p$, $R' = const$ и $V' = const$). Лемма доказана.

Пусть (n, p) — код жертвы $U = U(R, V')$, a — входной символ U, соответствующий тому, что U не видит ни одного из хищников, не видит левого $\langle$нижнего$\rangle$ борта, и видит нижний $\langle$левый$\rangle$ борт на расстоянии a_0 от себя ($a_0 = 1, \ldots, R'$). Пусть в некоторый такт τ_0 жертва U оказалась в клетке (x_0, a_0) $\langle\, (a_0, y_0)\, \rangle$ в состоянии q_0, при этом траектория U имеет тип 2. Пусть τ_1 — минимальный такт, такой что $\tau_1 > \tau_0$ и автомат U в такт τ_1 видит левый $\langle$нижний$\rangle$ борт. Обозначим клетку, в которой окажется U в такт τ_1, как (b_1, y_1) $\langle\, (x_1, b_1)\, \rangle$, а состояние, в котором окажется U в такт τ_1, как q_1. Обозначим входной символ U, соответствующий тому, что U не видит ни одного из хищников, не видит нижнего $\langle$левого$\rangle$ борта, и видит левый $\langle$нижний$\rangle$ борт на расстоянии b_1 от себя как b. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$, такое что $k \geqslant 2$. Предположим, $x_0 > 2R \cdot k(n+1)^2 \cdot V$ $\langle\, y_0 > 2R \cdot k(n+1)^2 \cdot V\, \rangle$.

Будем говорить, что коллектив $(\, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m\,)$ $(m > 13)$ расположен в сильной нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a)(n, p, q)$-расстановке с центром $(x_0, 1)$ $\langle\, (1, y_0)\, \rangle$, если коллектив $(\, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{14}, \ldots, \mathcal{A}_m\,)$ расположен в нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a)(n, p, q)$-расстановке с центром $(x_0, 1)$ $\langle\, (1, y_0)\, \rangle$, а автомат $\mathcal{A}_{13}$ находится в клетке (x_0, a_0) $\langle\, (a_0, y_0)\, \rangle$, где a_0 и a соотносятся так, как указано в предыдущем абзаце.

Лемма 21. *Для любого $k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$ существует коллектив автоматов $K(R, V) = (\, W_1, \ldots, W_{23}\,)$, который, стартуя в L_4 из сильной нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a)(n, p, q_0)$-расстановки с центром $(x_0, 1)$ $\langle\, (1, y_0)\, \rangle$, через T тактов останавливается в сильной левой $\langle$нижней$\rangle$ $(b)(n, p, q_1)$-расстановке с центром $(1, y_1)$ $\langle\, (x_1, 1)\, \rangle$, где $3]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k - T_1(p) \leqslant T \leqslant 3]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k + T_2(p)$ $\langle 3]\frac{y_0+x_1}{V(k-1)}[\cdot k - T_1(p) \leqslant T \leqslant 3]\frac{y_0+x_1}{V(k-1)}[\cdot k + T_2(p)\, \rangle$, $T_1(p)$ и $T_2(p)$ — некоторые функции от p.*

Доказательство. Построим коллектив $K'(R, V) = (\, W_1', \ldots, W_{23}'\,)$, который, стартуя из сильной нижней $(a)(n, p, q_0)$-расстановки с центром $(x_0, 1)$ функционирует так, как описанно в утверждении леммы, останавливаясь в сильной левой $(b)(n, p, q_1)$-расстановке).

Обозначим коллектив, построенный в лемме 20, как $K_1 = (\, \mathcal{A}_1^1, \ldots, \mathcal{A}_{21}^1\,)$. Коллективы K^1 и K^2, построенные в лемме 13, будем обозначать как $K^1 = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_5)$ и $K^2 = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_5)$, соответственно. Коллектив K_1, стартуя из нижней $(a)(n, p, q_0)$-расстановки, останавливается в нижней (a, b) $(n, p,\ q, q',\ q'', s_1^0, s_2^0,\ s_1, s_2)$-расстановке с тем же центром, q', q'', b, s_1^0, s_2^0, s_1, s_2 — компоненты программы U, соответствующие паре (q, a). Так как, по предположению леммы, U имеет траекторию типа 2, $s_1 < 0$ и $s_2 > 0$. Добавим к коллективу K_1 автоматы $\mathcal{A}_{22}^1$ и $\mathcal{A}_{23}^1$. Используя леммы 14, 15 и 16, модифицируем коллектив K_1 так, чтобы, в случае, если после остановки всех автоматов K_1 автомат $\mathcal{A}_1^1$ оказался в состоянии вида $(a, a', i_1, i_2, q_f^1, 1)$, коллектив выполнял следущие действия.

1. Автоматы $\mathcal{A}_{11}^1$, $\mathcal{A}_{12}^1$, $\mathcal{A}_{13}^1$ и $\mathcal{A}_{14}^1$ перемещаются в клетку $(x_0 + s_1^0\,, 1)$.

2. Автоматы $\mathcal{A}_9^1$ и $\mathcal{A}_{10}^1$ перемещаются в клетки $(x_0 + s_1^0 + s_1\,, 1)$ и $(x_0 + s_1^0\,, 1 + s_2)$, соответственно. Автоматы $\mathcal{A}_9^1$ и $\mathcal{A}_{10}^1$ перемещаются в клетки $(x_0 + s_1^0 + n(k-1)V \cdot s_1\,, 1)$ и $(x_0 + s_1^0\,, 1 + n(k-1)V \cdot s_2)$, соответственно, если все эти клетки принадлежат L_4 (при $x_0 > R{\cdot}k(n+1)^2{\cdot}V$, все эти клетки принадлежат L_4). Если хотя бы одна из этих клеток не принадлежит L_4, коллектив останавливается в канонической расстановке в клетке, где находился $\mathcal{A}_1^1$ (считаем, что последним остановился $\mathcal{A}_1^1$ в состоянии вида $(a, a', i_1, i_2, q_{f0}^1, 1)$).

3. Автоматы $\mathcal{A}_2^1$, $\mathcal{A}_3^1$, $\mathcal{A}_4^1$, $\mathcal{A}_5^1$, $\mathcal{A}_6^1$ и $\mathcal{A}_7^1$ перемещаются в клетки $(x_0 + s_1^0 + n\,, 1)$, $(x_0 + s_1^0 + p\,, 1)$, $(x_0 + s_1^0 + q''\,, 1)$, $(x_0 + s_1^0 + |s_2^0|\,, 1)$, $(x_0 + s_1^0 + n(k-1)V \cdot |s_1|\,, 1)$ и $(x_0 + s_1^0 + n(k-1)V \cdot |s_2|\,, 1)$, соответственно. Все остальные автоматы (то есть $\mathcal{A}_1^1$, $\mathcal{A}_8^1$, $\mathcal{A}_{15}^1, \ldots, \mathcal{A}_{23}^1$) перемещаются в клетку $(x_0 + s_1^0\,, 1)$. Считаем, что, по окончании функционирования, последним останавливается автомат $\mathcal{A}_1^1$ в (добавленном) состоянии вида $(a, a', i_1, i_2, q_{f1}^1, 1)$.

Расстановку, в которой оказался этот коллектив назовем *нижней* $(a)(n, p, q'', s_2^0, s_1, s_2)$*-расстановкой с центром* $(x_0 + s_1^0\,, 1)$. Аналогичная расстановка по вертикали называется *левой* $(a)(n, p, q'', s_2^0, s_1, s_2)$*-расстановкой с центром* $(1\,, y_0 + s_1^0)$. Максимально возможное время, которое функционирует этот коллектив, в зависимости от p, обозначим $t_1(p)$.

Построим еще один коллектив: $K_2 = (\mathcal{A}_1^2, \ldots, \mathcal{A}_{23}^2)$. Положим $\mathcal{A}_i^2 = \mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, 5$, $\mathcal{A}_6^2 = \mathcal{H}_0$. Поведение остальных автоматов коллектива K_2 зададим схемой функционирования.

Перечень автоматов и алфавитов.
1) ($\mathcal{A}_7^2$, $\{1,\ldots,(R'+1)^2\}^2 \times \{-\ 1,1\}^2 \times \{q_1^7,\ldots,q_{k+6}^7\}$), $(\mathcal{A}_8^2,\{q_1^8,\ldots,q_{k+1}^8\})$, $(\mathcal{A}_9^2,\{q_1^9,\ldots,q_{k+1}^9\})$, $(\mathcal{A}_{10}^2,\{q_1^{10},\ldots,q_{k+6}^{10}\})$, $(\mathcal{A}_{11}^2,\{q_1^{11},\ldots,q_{k+6}^{11}\})$, $(\mathcal{A}_{12}^2,\{q_1^{12},\ldots,q_{k+6}^{12}\})$, $(\mathcal{A}_{13}^2,\{q_1^{13},\ldots,q_{k+6}^{13}\})$, $(\mathcal{A}_{14}^2,\{q_1^{14},\ldots,q_{k+6}^{14}\})$, $(\mathcal{A}_{15}^2,\{q_1^{15},\ldots,q_{k+6}^{15}\})$, $(\mathcal{A}_{16}^2,\{q_1^{16},\ldots,q_{k+4}^{16}\})$, $(\mathcal{A}_{17}^2,\{q_1^{17},\ldots,q_{k+4}^{17}\})$, $(\mathcal{A}_{18}^2,\{q_1^{18},\ldots,q_{k+4}^{18}\})$, $(\mathcal{A}_{19}^2,\{q_1^{19},\ldots,q_{k+4}^{19}\})$, $(\mathcal{A}_{20}^2,\{q_1^{20},\ldots,q_{k+4}^{20}\})$, $(\mathcal{A}_{21}^2,\{q_1^{21},\ldots,q_{k+4}^{21}\})$, $(\mathcal{A}_{22}^2,\{q_1^{22},\ldots,q_{k+1}^{22}\})$, $(\mathcal{A}_{23}^2,\{q_1^{23},\ldots,q_{k+1}^{23}\})$.

Начальными состояниями автомата $\mathcal{A}_7^2$ являются состояния вида (a_1,a_2,i_1,i_2,q_1^7), а финальными — состояния вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{k+6}^7)$. По лемме 13, $\mathcal{A}_4^2$ остановится у левого борта спустя $m\cdot n\cdot k\cdot s_1+]R/V[$ тактов после запуска коллектива, где m — максимальное натуральное число, удовдетворяющее неравенству $m\cdot s_1\cdot n(k-1)V < (x_0+s_1^0-R)$.

Автоматы $\mathcal{A}_8^2$, $\mathcal{A}_9^2$, $\mathcal{A}_{22}^2$ и $\mathcal{A}_{23}^2$ идут вдоль нижнего борта до угла, затем вдоль левого борта вверх, за каждые k тактов сдвигаясь на $(k-1)V$ клеток. Встретившись с $\mathcal{A}_4^2$, они останавливаются в той же клетке, что и он.

2) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_j^i,(P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_i^2)=0))$, $\to (q_{j+1}^i,(-V,0))$, где $i=8,9,22,23,\ j=1,\ldots,k-1$.

3) $\mathcal{A}_i^2$, (q_k^i), $\to (q_1^i,(0,0))$, где $i=8,9,22,23$.

4) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_j^i,(P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_i^2)=1)\wedge(P_{bort}^2(\mathcal{A}_i^2)=0))$, $\to$ (q_{j+1}^i, максимально возможный ход влево), где $i=8,9,22,23,\ j=1,\ldots,k-1$.

5) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_j^i,(P_{bort}^2(\mathcal{A}_i^2)=1)\wedge(P_V'(\mathcal{A}_i^2,\mathcal{A}_4^2,q_{2k+1}^4)=0))$, $\to (q_{j+1}^i,(0,V))$, где $i=8,9,22,23,\ j=1,\ldots,k-1,\ q_{2k+1}^4$ — финальное состояние автомата $\mathcal{A}_4^2$.

6) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_j^i,(P_{bort}^2(\mathcal{A}_i^2)=1)\wedge(P_V'(\mathcal{A}_i^2,\mathcal{A}_4^2,q_{2k+1}^4)=1))$, $\to$ (q_{k+1}^i, ход в расположение $\mathcal{A}_4^2$), где $i=8,9,22,23,\ j=1,\ldots,k-1,\ q_{2k+1}^4$ — финальное состояние автомата $\mathcal{A}_4^2$.

Если K_2 стартует из нижней $(a)(n,p,q'',s_2^0,s_1,s_2)$-расстановки с центром $(x_0+s_1^0,1)$, то не позднее, чем через $k\cdot]\frac{]R/V[}{k-1}[$ тактов после того, как $\mathcal{A}_4^2$ остановится, автоматы $\mathcal{A}_8^2$, $\mathcal{A}_9^2$, $\mathcal{A}_{22}^2$ и $\mathcal{A}_{23}^2$ остановятся в той же клетке.

Автоматы $\mathcal{A}_{10}^2,\ldots,\mathcal{A}_{21}^2$ перемещаются, взаимодействуя в парах вида $\mathcal{A}_i^2$, $\mathcal{A}_{i+6}^2$, $i=10,\ldots,15$.

Автомат $\mathcal{A}_i^2$ идет к $\mathcal{A}_{i+6}^2$ со скоростью V.

7) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_1^i, (P_V(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_{i+6}^2) = 0))$, $\to (q_1^i, (V, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.
8) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_1^i, (P_V(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_{i+6}^2) = 1))$, $\to (q_2^i$, ход в расположение $\mathcal{A}_{i+6}^2)$, где $i = 10, \dots, 15$.

После этого $\mathcal{A}_i^2$ идет к $\mathcal{A}_7^2$ со скоростью 1, а $\mathcal{A}_{i+6}^2$ идет к $\mathcal{A}_7^2$ с вдвое меньшей скоростью.

9) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_2^i, (P_V(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_7^2) = 0))$, $\to (q_2^i, (-V, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.
10) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_2^i, (P_V(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_7^2) = 1))$, $\to (q_3^i$, ход в расположение $\mathcal{A}_7^2)$, где $i = 10, \dots, 15$.
11) $\mathcal{A}_{i+6}^2$, $(q_0^{i+6}, (P_V(\mathcal{A}_{i+6}^2, \mathcal{A}_i^2) = 1))$, $\to (q_1^{i+6}, (0, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.
12) $\mathcal{A}_{i+6}^2$, (q_1^{i+6}), $\to (q_2^{i+6}, (0, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.
13) $\mathcal{A}_{i+6}^2$, $(q_2^{i+6}, (P_V(\mathcal{A}_{i+6}^2, \mathcal{A}_7^2) = 0))$, $\to (q_1^{i+6}, (-V, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.
14) $\mathcal{A}_{i+6}^2$, $(q_2^{i+6}, (P_V(\mathcal{A}_{i+6}^2, \mathcal{A}_7^2) = 1))$, $\to (q_3^{i+6}$, ход в расположение $\mathcal{A}_7^2)$, где $i = 10, \dots, 15$.

Автомат $\mathcal{A}_i^2$ достигнет $\mathcal{A}_7^2$ на c_i тактов раньше, чем $\mathcal{A}_{i+6}^2$, где c_i — исходное расстояние между $\mathcal{A}_i^2$ и $\mathcal{A}_{i+6}^2$.

Каждый из автоматов $\mathcal{A}_i^2$, $\mathcal{A}_{i+6}^2$ после встречи $\mathcal{A}_7^2$ идет вдоль нижнего борта до угла, затем вдоль левого борта вверх, за каждые k тактов сдвигаясь на $(k-1)V$ клеток. Встретившись с $\mathcal{A}_4^2$, он оказывается в той же клетке, что и $\mathcal{A}_4^2$.

15) $\mathcal{A}_{i+t}^2$, $(q_j^{i+t}, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_{i+t}^2) = 0))$, $\to (q_{j+1}^{i+t}, (-V, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$, $t = 0, 6$, $j = 3, \dots, k+1$.
16) $\mathcal{A}_{i+t}^2$, (q_{k+2}^{i+t}), $\to (q_3^{i+t}, (0, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$, $t = 0, 6$.
17) $\mathcal{A}_{i+t}^2$, $(q_j^{i+t}, (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_{i+t}^2) = 1) \wedge (P_{bort}^2(\mathcal{A}_{i+t}^2) = 0))$, $\to (q_{j+1}^{i+t}$, максимально возможный ход влево), где $i = 10, \dots, 15$, $t = 0, 6$, $j = 3, \dots, k+1$.
18) $\mathcal{A}_{i+t}^2$, $(q_j^{i+t}, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_{i+t}^2) = 1) \wedge (P_V'(\mathcal{A}_{i+t}^2, \mathcal{A}_4^2, q_{2k+1}^4) = 0))$, $\to (q_{j+1}^{i+t}, (0, V))$, где $i = 10, \dots, 15$, $t = 0, 6$, $j = 3, \dots, k+1$, q_{2k+1}^4 — финальное состояние автомата $\mathcal{A}_4^2$.
19) $\mathcal{A}_{i+t}^2$, $(q_j^{i+t}, (P_{bort}^2(\mathcal{A}_{i+t}^2) = 1) \wedge (P_V'(\mathcal{A}_{i+t}^2, \mathcal{A}_4^2, q_{2k+1}^4) = 1))$, $\to (q_{k+3}^{i+t}$, ход в расположение $\mathcal{A}_4^2)$, где $i = 10, \dots, 15$, $t = 0, 6$, $j = 3, \dots, k+1$, q_{2k+1}^4 — финальное состояние автомата $\mathcal{A}_4^2$.

Автомат $\mathcal{A}_{i+6}^2$, после встречи $\mathcal{A}_4^2$ идет вверх со скоростью 1. Автомат $\mathcal{A}_i^2$, встретившийся с $\mathcal{A}_4^2$ на c_i тактов раньше, после встречи $\mathcal{A}_4^2$ идет вверх с вдвое меньшей скоростью. Это продолжается до встречи

$\mathcal{A}_i^2$ и $\mathcal{A}_{i+6}^2$.
20) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_{k+3}^i, (P_0(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_{i+6}^2) = 0)), \to (q_{k+4}^i, (0, V))$, где $i = 10, \dots, 15$.
21) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_{k+4}^i), \to (q_{k+3}^i, (0, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.
22) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_{k+3}^i, (P_0(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_{i+6}^2) = 1)), \to (q_{k+5}^i, (0, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.
23) $\mathcal{A}_{i+6}^2$, $(q_{k+3}^{i+6}, (P_0(\mathcal{A}_{i+6}^2, \mathcal{A}_i^2) = 0)), \to (q_{k+3}^{i+6}, (0, V))$, где $i = 10, \dots, 15$.
24) $\mathcal{A}_{i+6}^2$, $(q_{k+3}^{i+6}, (P_0(\mathcal{A}_{i+6}^2, \mathcal{A}_i^2) = 1)), \to (q_{k+4}^{i+6}, (0, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$.

$\mathcal{A}_i^2$ и $\mathcal{A}_{i+6}^2$, после встречи с $\mathcal{A}_4^2$, встретятся друг с другом в клетке, находящейся на расстоянии c_i от $\mathcal{A}_4^2$. После этого $\mathcal{A}_{i+6}^2$ останавливается, а $\mathcal{A}_i^2$ возвращается к $\mathcal{A}_4^2$.
25) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_{k+5}^i, (P_V(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_4^2) = 0)), \to (q_{k+5}^i, (0, -V))$, где $i = 10, \dots, 15$.
26) $\mathcal{A}_i^2$, $(q_{k+5}^i, (P_V(\mathcal{A}_i^2, \mathcal{A}_4^2) = 1)), \to (q_{k+6}^i$, ход в расположение $\mathcal{A}_4^2)$, где $i = 10, \dots, 15$.

Автомат $\mathcal{A}_7^2$ вместе с последним из автоматов $\mathcal{A}_{i+6}^2$ $(i = 10, \dots, 15)$, проходящих мимо него, идет до автомата $\mathcal{A}_4^2$ и останавливается.
27) $\mathcal{A}_7^2$, $(\,(a_1, a_2, i_1, i_2, q_j^7), (P_0(\mathcal{A}_7^2, \mathcal{A}_{i+6}^2) = 1)),$
$\to ((a_1, a_2, i_1, i_2, q_{j+1}^7), (0, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$, $j = 0, \dots, 4$, $a_1, a_2 \in \{1, \dots, (R' + 1)^2\}$, $i_1, i_2 \in \{-\ 1, 1\}$.
28) $\mathcal{A}_7^2$, $(\,(a_1, a_2, i_1, i_2, q_5^7), (P_0(\mathcal{A}_7^2, \mathcal{A}_{i+6}^2) = 1)),$
$\to ((a_1, a_2, i_1, i_2, q_7^7), (-V, 0))$, где $i = 10, \dots, 15$, $a_1, a_2 \in \{1, \dots, (R' + 1)^2\}$, $i_1, i_2 \in \{-\ 1, 1\}$.
29) $\mathcal{A}_7^2$, $(\,(a_1, a_2, i_1, i_2, q_j^7), (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_7^2) = 0)),$
$\to ((a_1, a_2, i_1, i_2, q_{j+1}^7), (-V, 0))$, где $j = 6, \dots, k + 4$, $a_1, a_2 \in \{1, \dots, (R' + 1)^2\}$, $i_1, i_2 \in \{-\ 1, 1\}$.
30) $\mathcal{A}_7^2$, $(\,(a_1, a_2, i_1, i_2, q_j^7), (P_{bort}^{left}(\mathcal{A}_7^2) = 1) \wedge (P_{bort}^2(\mathcal{A}_7^2) = 0)), \to ((a_1, a_2, i_1, i_2, q_{j+1}^7)$, максимально возможный ход влево), где $j = 6, \dots, k + 4$, $a_1, a_2 \in \{1, \dots, (R' + 1)^2\}$, $i_1, i_2 \in \{-\ 1, 1\}$.
31) $\mathcal{A}_7^2$, $((a_1, a_2, i_1, i_2, q_j^7), (P_{bort}^2(\mathcal{A}_7^2) = 1) \wedge (P_V'(\mathcal{A}_7^2, \mathcal{A}_4^2, q_{2k+1}^4) = 0)), \to ((a_1, a_2,\ i_1, i_2, q_{j+1}^7), (0, V))$, где $j = 6, \dots, k + 4$, q_{2k+1}^4 — финальное состояние автомата $\mathcal{A}_4^2$, $a_1, a_2 \in \{1, \dots, (R' + 1)^2\}$, $i_1, i_2 \in \{-\ 1, 1\}$.
32) $\mathcal{A}_7^2$, $((a_1, a_2, i_1, i_2, q_j^7), (P_V'(\mathcal{A}_7^2, \mathcal{A}_4^2, q_{2k+1}^4) = 1)), \to ((a_1, a_2, i_1, i_2, q_{k+6}^7)$, ход в расположение $\mathcal{A}_4^2)$, где $j = 6, \dots, k + 4$, q_{2k+1}^4 — финальное состояние автомата $\mathcal{A}_4^2$, $a_1, a_2 \in \{1, \dots, (R' + 1)^2\}$, $i_1, i_2 \in \{-\ 1, 1\}$.
33) $\mathcal{A}_7^2$, $(\,(a_1, a_2, i_1, i_2, q_{k+5}^7)), \to ((a_1, a_2, i_1, i_2, q_6^7), (0, 0))$, где $a_1, a_2 \in \{1, \dots, (R' + 1)^2\}$, $i_1, i_2 \in \{-\ 1, 1\}$.

Модифицируем теперь коллектив K_2, так, чтобы после этого автоматы $\mathcal{A}_2^2$ и $\mathcal{A}_3^2$ перемещались в клетки

$$(1\,,\,1+(m-1)\cdot nV(k-1)s_2)=(x'\,,\,y'-n(k-1)V\cdot s_2)\qquad \text{и}$$
$$(1+n(k-1)V\cdot|s_1|\,,\,1+m\cdot nV(k-1)s_2)=(x'+n(k-1)V\cdot|s_1|\,,\,y'),$$

соответственно, где (x',y') — текущее расположение автомата $\mathcal{A}_1^2$, m определено на стр. 237. Перемещение происходит, при условии, что первая из этих клеток принадлежит L_4. Если она не принадлежит L_4, коллектив останавливался в канонической расстановке в клетке, где находился $\mathcal{A}_7^2$ (считаем, что последним остановился $\mathcal{A}_7^2$ в (дополнительном) состоянии вида (a,a',i_1,i_2,q^1_{f2})). В случае, когда K_2 стартует из нижней $(a)(n,p,q'',s_2^0,\ s_1,s_2)$-расстановки с центром $(x_0+s_1^0\,,\,1)$, при $x_0>R\cdot k(n+1)^2\cdot V$, эта клетка принадлежит L_4. В этом случае так же считаем, что по окончании работы коллектива последним останавливается автомат $\mathcal{A}_7^2$ в (дополнительном) состоянии вида (a,a',i_1,i_2,q^1_{k+7}). Время работы этого коллектива не меньше $]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k-t_2(p)$ и не больше $]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k+t_3(p)$, где $t_2(p)$ и $t_3(p)$ — некоторые функции от p.

Положим $K_3=(\,\mathcal{A}_7^2,\mathcal{A}_{16}^2,\ \mathcal{A}_{17}^2,\mathcal{A}_{18}^2,\ \mathcal{A}_{19}^2,\mathcal{A}_{20}^2,\ \mathcal{A}_{21}^2,\mathcal{A}_{10}^2,\ \mathcal{A}_2^2,\mathcal{A}_3^2,\mathcal{A}_1^2,$ $\mathcal{A}_4^2,\mathcal{A}_5^2,\mathcal{A}_6^2,\ \mathcal{A}_8^2,\mathcal{A}_9^2,\mathcal{A}_{11}^2,\mathcal{A}_{12}^2,\ \mathcal{A}_{13}^2,\mathcal{A}_{14}^2,\mathcal{A}_{15}^2,\mathcal{A}_{22}^2,\mathcal{A}_{23}^2\,)$. Таким образом определенный коллектив K_3, стартуя из нижней $(a)(n,p,q'',s_2^0,s_1,s_2)$-расстановки с центром $(x_0+s_1^0\,,\,1)$, остановится в левой $(a)(n,p,q'',s_2^0,$ $(-s_2),(-s_1))$-расстановке с центром $(x'\,,\,y')$, где (x',y') определено в предыдущем абзаце.

Обозначим через $K_1'=(\mathcal{A}_1',\ldots,\mathcal{A}_5')\ \langle K_2'=(\mathcal{B}_1',\ldots,\mathcal{B}_5')\rangle$ коллектив, в котором каждый автомат $\mathcal{A}_i'\ \langle\mathcal{B}_i'\rangle\ (i=1,\ldots,5)$ до такта, когда он увидит левый $\langle$нижний$\rangle$ борт, функционирует так же, как $\mathcal{A}_i\ \langle\mathcal{B}_i\rangle$. Автомат $\mathcal{A}_5'\ \langle\mathcal{B}_5'\rangle$, оказавшись на расстоянии 1 от левого $\langle$нижнего$\rangle$ борта, останавливается. Автомат $\mathcal{A}_i'\ \langle\mathcal{B}_i'\rangle\ (i=1,2,3,4)$, оказавшись на расстоянии 1 от левого $\langle$нижнего$\rangle$ борта, в одной клетке с $\mathcal{A}_5'$ $\langle\mathcal{B}_5'\rangle$, останавливается. Автомат $\mathcal{A}_i'\ \langle\mathcal{B}_i'\rangle\ (i=1,\ldots,5)$, увидев левый $\langle$нижний$\rangle$ борт на расстоянии большем чем 1 от себя, или на расстоянии 1 от себя, но находясь в разных клетках с $\mathcal{A}_5'\ \langle\mathcal{B}_5'\rangle$, действует так же, как $\mathcal{A}_i'\ \langle\mathcal{B}_i'\rangle$, в ситуации, когда тот не видит левого $\langle$нижнего$\rangle$ борта.

Аналогично построению коллектива K_3, строится коллектив $(\,\mathcal{A}_1^4,\ldots,\mathcal{A}_{13}^4,\ \mathcal{A}_{15}^4,\ldots,\mathcal{A}_{23}^4\,)$ (отсутствует автомат $\mathcal{A}_{14}^4=\mathcal{H}_0$, аналог $\mathcal{A}_6^2$), который, стартуя из левой $(a)(n,p,q'',s_2^0,(-s_2),(-s_1))$-расстановки с центром (x',y'), остановится в нижней $(a)(n,p,q'',s_2^0,s_1,s_2)$-расстановке с центром $(x_0+s_1^0-\Delta\,,\,1)$, где $\Delta=x_0-m\cdot n(k-1)V\cdot|s_1|$. Из доказательства леммы 13 и соотношения $R\geqslant 2$ следует $\Delta>0$. При построении этого коллектива вместо автоматов коллектива K^1 используем соответствующие автоматы коллектива K_2', а в схеме функционирования всех остальных автоматов вместо перемещений вверх используются перемещения вправо, вместо перемещений вниз — перемещения влево, вместо перемещений вправо — перемещения вверх, вместо перемещений влево — перемещения вниз. Обозначим $K_4=(\,\mathcal{A}_1^4,\ldots,\mathcal{A}_{13}^4,\mathcal{H}_0,\mathcal{A}_{15}^4,\ldots,\mathcal{A}_{23}^4\,)$. Финальные состояния автомата $\mathcal{A}_1^4$ будем обозначать $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f3}^1)$ или $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{k+7}^1)$.

Еще раз модифицируем коллектив K_1, так, чтобы в случае, если коллектив стартует из сильной нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a)(n,p,q)$ расстановки, сначала автомат $\mathcal{A}_{23}^1$ шел вверх $\langle$вправо$\rangle$ к $\mathcal{A}_{13}^1$, и забирал его с собой обратно к $\mathcal{A}_1^1$, а после этого чтобы коллектив функционировал так, как описано ранее. Построим следующие коллективы.

$$(\,K_3\circ K_4\,)(1,\ldots,23)\xrightarrow{\;1\;}K_5(R,V).$$

Здесь каждое финальное состояние автомата $\mathcal{A}_7^2$ вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{k+7}^1)$ склеивается с начальным состоянием (a_1,a_2,i_1,i_2,q_1^7) автомата $\mathcal{A}_1^4$, а финальные состояния автомата $\mathcal{A}_7^2$ вида (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f2}) не склеиваются ни с каким состоянием автомата $\mathcal{A}_1^4$, то есть в случае, если $\mathcal{A}_7^2$ останавливается в одном из таких состояний, коллектив K_5 в этот же такт останавливается.

$$(\,K_1\circ K_5\,)(1,\ldots,23)\xrightarrow{\;1\;}K_6(R,V)=(\,\mathcal{A}_1^6,\ldots,\mathcal{A}_{21}^6\,).$$

Здесь каждое финальное состояние автомата $\mathcal{A}_1^1$ вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f1}^1,1)$ склеивается с начальным состоянием (a_1,a_2,i_1,i_2,q_1^7) автомата $\mathcal{A}_7^2$, а финальные состояния автомата $\mathcal{A}_1^7$ вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f0},1)$ не склеиваются ни с каким состоянием автомата $\mathcal{A}_7^2$.

Модифицируем коллектив K_6 так, чтобы по окончании функционирования коллектива, $\mathcal{A}_{15}^6$ и $\mathcal{A}_{16}^6$ (при помощи других автоматов) переместились в клетки $(x_0+n(k-1)V\cdot s_1, y_0)$ и $(x_0, y_0+n(k-1)V\cdot s_2)$, соответственно. Перемещение происходит, при условии, что первая из этих клеток принадлежит L_4. Если она не принадлежит L_4, коллектив останавливался в канонической расстановке в клетке, где находился $\mathcal{A}_1^6$ (считаем, что последним остановился $\mathcal{A}_1^6$ в (дополнительном) состоянии вида $(a, a', i_1, i_2, q^1_{f4})$). В случае, когда K_6 стартует из нижней $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(x_0\,,1)$, при $x_0 > 2R\cdot k(n+1)^2\cdot V$, эта клетка принадлежит L_4. В этом случае так же считаем, что по окончании работы коллектива последним останавливается автомат $\mathcal{A}_1^6$ в (дополнительном) состоянии вида $(a, a', i_1, i_2, q^1_{f5})$. Время работы этого коллектива не меньше $2]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k - t_4(p)$ и не больше $2]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k + t_5(p)$, где $t_4(p)$ и $t_5(p)$ — некоторые функции от p.

Обозначим через $K_2''(\mathcal{B}) = (\mathcal{C}_1(\mathcal{B}), \dots, \mathcal{C}_5(\mathcal{B}))$, коллектив, в котором каждый автомат $\mathcal{C}_i(\mathcal{B})$ $(i = 1, \dots, 5)$ до такта, когда он окажется в одной клетке с автоматом $\mathcal{B}$, функционирует так же, как $\mathcal{A}_i'$. Автомат $\mathcal{C}_i(\mathcal{B})$, оказавшись в одной клетке с автоматом $\mathcal{B}$, останавливается.

Обозначим через $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ автомат, который идет со скоростью 1 вправо, до встречи с $\mathcal{B}$, а оказавшись в одной клетке с $\mathcal{B}$, останавливается.

$$\text{Положим } \mathcal{A}_i^7 = \mathcal{A}_{i-7}' \text{ при } i = 8, 9, 10, 11 \quad (\,\mathcal{A}_5' \circ \mathcal{A}(\mathcal{A}_{17}^7)\,) \to \mathcal{A}_{12}^7.$$
$$(\,(\,\mathcal{A}(\mathcal{A}_{18}^7), \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0, \mathcal{A}(\mathcal{A}_{18}^7), \mathcal{A}(\mathcal{A}_{18}^7)\,) \circ K_2''(\mathcal{A}_{12}^7)\,)(1, \dots, 5) \xrightarrow{1}$$
$$\xrightarrow{1} (\,\mathcal{A}_{13}^7, \dots, \mathcal{A}_{17}^7\,).$$

Определим остальные автоматы вида $\mathcal{A}_i^7$ $(i \neq 8, \dots, 17)$ следующим образом. $\mathcal{A}_{18}^7$ до того, как окажется в одной клетке с $\mathcal{A}_{13}^7$, стоит на месте, а после этого идет влево со скоростью 1 до попадания в расположение $\mathcal{A}_1^7$. До этого момента автоматы $\mathcal{A}_i^7$ $(i = 1, \dots, 7, 19, \dots, 23)$ стоят на месте. После этого момента автомат $\mathcal{A}_1^7$ начинает функционировать как $\mathcal{A}_7^2$, $\mathcal{A}_2^7$ — как $\mathcal{A}_{16}^2$, $\mathcal{A}_3^7$ — как $\mathcal{A}_{17}^2$, $\mathcal{A}_4^7$ — как $\mathcal{A}_{18}^2$, $\mathcal{A}_5^7$ — как $\mathcal{A}_{19}^2$, $\mathcal{A}_6^7$ — как $\mathcal{A}_{20}^2$, $\mathcal{A}_7^7$ — как $\mathcal{A}_{21}^2$, $\mathcal{A}_{18}^7$ — как $\mathcal{A}_{10}^2$, $\mathcal{A}_{19}^7$ — как $\mathcal{A}_{11}^2$, $\mathcal{A}_{20}^7$ — как $\mathcal{A}_{12}^2$, $\mathcal{A}_{21}^7$ — как $\mathcal{A}_{13}^2$, $\mathcal{A}_{22}^7$ — как $\mathcal{A}_{14}^2$, $\mathcal{A}_{23}^7$ — как $\mathcal{A}_{15}^2$, при этом ориентиром для остановки этих автоматов (аналогом автомата $\mathcal{A}_4^2$) служит автомат $\mathcal{A}_{11}^7$.

$$(K_6 \circ K_7)(1,\dots,7,11,9,10,12,13,8,15,16,17,18,14,19,\dots,23) \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} K_8(R,V).$$

Здесь каждое финальное состояние автомата $\mathcal{A}_1^6$ вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f5}^1)$ склеивается с начальным состоянием (a_1,a_2,i_1,i_2,q_0^1) автомата $\mathcal{A}_1^7$, а финальные состояния автомата $\mathcal{A}_1^6$ вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f0},1)$, (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f2}), (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f3}), (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f4}) не склеиваются ни с каким состоянием автомата $\mathcal{A}_1^7$.

Модифицируем коллектив $K_8 = (\mathcal{A}_1^8,\dots,\mathcal{A}_{23}^8)$ так, чтобы после окончания функционирования коллектива, после того, как в одной клетке с $\mathcal{A}_{12}^8$ остановятся автоматы $\mathcal{A}_{13}^8$, $\mathcal{A}_{14}^8$, $\mathcal{A}_{15}^8$, $\mathcal{A}_{16}^8$, $\mathcal{A}_{17}^8$, автоматы $\mathcal{A}_{12}^8$, $\mathcal{A}_{14}^8$, $\mathcal{A}_{15}^8$, $\mathcal{A}_{16}^8$, $\mathcal{A}_{17}^8$ вернулись к $\mathcal{A}_{11}^8$, а автомат $\mathcal{A}_{13}^8$ остался на месте. После этого все автоматы коллектива, кроме $\mathcal{A}_5^8$, $\mathcal{A}_6^8$, $\mathcal{A}_7^8$ и $\mathcal{A}_{13}^8$ перемещаются на вектор $(0\,,\, a_0+s_2^0-n(k-1)V\cdot s_2-1)$, автомат $\mathcal{A}_{13}^8$ перемещается на вектор $(n(k-1)V\cdot|s_1|\,,\, a_0+s_2^0-n(k-1)V\cdot s_2-1)$, автоматы $\mathcal{A}_5^8$, $\mathcal{A}_6^8$ и $\mathcal{A}_7^8$ перемещаются в ту клетку, в которой, после описанных выше перемещений, оказался $\mathcal{A}_1^8$. Все эти перемещения происходят, при условии, что все клетки, в которые должны перейти автоматы, принадлежат L_4. Если хотя бы одна из этих клеток не принадлежит L_4, коллектив останавливался в канонической расстановке в клетке, где находился $\mathcal{A}_1^8$ (считаем, что последним остановился $\mathcal{A}_1^8$ в (дополнительном) состоянии вида (a,a',i_1,i_2,q_{f6}^1)). В случае, если K_8 стартует из нижней $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(x_0\,,\,1)$, при $x_0 > 2R\cdot k(n+1)^2\cdot V$, то $s_2^0 \geqslant -a$, и все эти клетки принадлежат L_4. В этом случае так же считаем, что по окончании работы коллектива последним останавливается автомат $\mathcal{A}_1^8$ в (дополнительном) состоянии вида $(a'',a',i_1,i_2,q_{f7}^1)$, где a'' — входной символ, который воспринял бы автомат-жертва U, находясь в текущем расположении автомата $\mathcal{A}_{13}^8$. Время работы этого коллектива не превосходит $3]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k + t_6(p)$, где $t_6(p)$ — некоторая функция от p.

Расстановку произвольного коллектива $(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_m)$ $(m>13)$, при которой подколлектив $(\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_{12},\ \mathcal{A}_{14}\dots,\mathcal{A}_m)$ окажется в нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a'')(n,p,q'')$-расстановке с центром $(1,y)$, а автомат $\mathcal{A}_{13}^8$ окажется в клетке (x,y), назовем *нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a'')(n,p,q'')(x,y)$-расстановкой.*

Коллектив K_8, стартуя из сильной нижней $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(x_0,1)$, через время, не превосходящее $3]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k + t_6(p)$, останавливается в левой $(a'')(n,p,q'')(x,y)$-расстановке, при $(x,y) = (x_0-(m-1)\cdot n(k-1)V\cdot|s_1|\,,\,a_0+s_2^0+(m-1)\cdot n(k-1)V\cdot s_2)$, где a_0 и m определены на стр. 235 и 237, соответственно.

Если коллектив K^1, построенный в лемме 13, стартует из описанной в лемме 13 расстановки с параметрами $n(k-1)V\cdot s_1$, $n(k-1)V\cdot s_2$ и с центром в клетке $(\hat{x},\hat{y})$, лежащей на периоде периодического отрезка траектории жертвы U, то через каждые $n\cdot k\cdot(|s_1|+|s_2|)$ тактов первый автомат этого коллектива оказывается на траектории жертвы U (до тех пор, пока клетка траектории U, в которой оказывается этот автомат, обладает свойством, что с начала прохождения периода последовательности своих выходных символов и состояний, вплоть до попадания в эту клетку, жертва U не видит левого борта). Жертва U, перемещаясь на этом отрезке траектории, в такт τ отклоняется от клетки $(\hat{x},\hat{y})+i\cdot(s_1,s_2)$, не более, чем на $n\cdot V$, где i — минимальное натуральное число, такое что клетка $(\hat{x},\hat{y})+i\cdot(s_1,s_2)$ не пройдена жертвой до такта τ. Клетка (x,y) удалена от левого борта не менее, чем на $n(k-1)V\cdot|s_1|\geqslant n\cdot V$. Откуда заключаем, что клетка (x,y) принадлежит траектории U, причем на рассматриваемом периодическом участке своей траектоии U, вплоть до попадания в клетку (x,y), не видит левого борта.

Построим коллектив $K_9 = (\mathcal{A}_1^9,\ldots,\mathcal{A}_{23}^9)$, который, при произвольных $x,y\in\mathbb{N}_0$, стартуя из левой $(a'')(n,p,q'')(x,y)$-расстановки, такой, что a'' есть входной символ U, в такт, когда он находится в клетке (x,y), функционирует так. Если входной символ a'' жертвы U соответствует тому, что U видит левый борт, коллектив K_9 останавливается в левой $(a'')(n,p,q'')(x,y)$-расстановке. Очевидно, в этом случае левая $(a'')(n,p,q'')(x,y)$-расстановка совпадает с сильной левой $(a'')(n,p,q'')$-расстановкой с центром $(1,y)$. Если же входной символ a'' жертвы U соответствует тому, что U не видит левого борта, коллектив K_9 остановится спустя некоторое время в $(\tilde{a})(n,p,\tilde{q})(\tilde{x},\tilde{y})$-расстановке, где $(\tilde{x},\tilde{y})$ — следующая за (x,y) клетка траектории жертвы U, $\tilde{q}$ — состояние, в котором U будет находиться в клетке $(\tilde{x},\tilde{y})$, $\tilde{a}$ — входной символ U, в такт, когда он находится в клетке $(\tilde{x},\tilde{y})$.

Если входной символ a'' жертвы U соответствует тому, что U видит левый борт, коллектив K_9 останавливается в левой $(a'')(n,p,q'')(x,y)$-расстановке. В противном случае, коллектив K_9 сначала функционирует так же, как K_1, с той разницей, что автоматы $\mathcal{A}_6^9$, $\mathcal{A}_7^9$, $\mathcal{A}_8^9$, $\mathcal{A}_9^9$ и $\mathcal{A}_{10}^9$ остаются в той же клетке, что и $\mathcal{A}_1^9$, вследствие чего невозможна остановка коллектива в состоянии вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f0},1)$. После этого, коллектив K_1 останавливается в левой (a'',b') $(n,p,q'',\tilde{q},0,0,0,0,0)$-расстановке, а коллектив K_9 после выполнения всех действий коллектива K_1 совершает следующие перемещения.
1. Автомат $\mathcal{A}_4^9$ перемещается в ту клетку, где находится $\mathcal{A}_5^9$. Затем $\mathcal{A}_5^9$ перемещается в ту клетку, где находится $\mathcal{A}_1^9$.
2. Автомат $\mathcal{A}_{13}^9$ перемещается на вектор (b_1',b_2'), соответствующий выходному символу b' автомата U, а остальные автоматы перемещается на вектор $(0,b_2')$.
3. После этого коллектив K_9 останавливается, причем каждый автомат $\mathcal{A}_i^9$ $(i=2,\ldots,23)$ останавливается в состоянии q_f^i, а автомат $\mathcal{A}_1^9$ останавливается в состоянии вида (b',a',i_1,i_2,q_{f8}^1).

Таким образом коллектив K_9 построен. Коллектив K_9, стартуя из левой $(a'')(n,p,q'')(x,y)$-расстановки, функционирует не более $2x+t_7(p)$ тактов, где $t_7(p)$ — некоторая функция от p. Склеим финальное состояние $(b',a',i_1,\ i_2,q_{f8}^1)$ автомата $\mathcal{A}_1^9$ с его произвольным начальным состоянием с первой компонетной b', а финальное состояние q_f^i автомата $\mathcal{A}_i^9$ $(i=2,\ldots,23)$ склеим с его начальным состоянием. Полученный коллектив обозначим как $K_{10}=(\,\mathcal{A}_1^{10},\ldots,\mathcal{A}_{23}^{10}\,)$.

$$(\,K_8\circ K_{10}\,)(1,\ldots,23)\xrightarrow{\;1\;}K'(R,V).$$

Здесь каждое финальное состояние автомата $\mathcal{A}_1^8$ вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f7}^1)$ склеивается с начальным состоянием автомата $\mathcal{A}_1^{10}$ вида (a_1,a_2,i_1,i_2,q), а финальные состояния автомата $\mathcal{A}_1^8$ вида $(a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f0},1)$, (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f2}), (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f3}), (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f4}), (a_1,a_2,i_1,i_2,q_{f6}) не склеиваются ни с каким состоянием автомата $\mathcal{A}_1^{10}$, то есть в случае, если $\mathcal{A}_1^8$ останавливается в одном из таких состояний, коллектив K' в этот же такт останавливается. Коллектив K', стартуя из нижней $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(x_0\,,\,1)$, при $x_0>2R\cdot k(n+1)^2\cdot V$, спустя некоторое время, остановится в сильной левой $(b)(n,p,q_1)$-расстановке с центром $(1,y_1)$ (см. определения b, y_1 на стр. 235). При этом, коллектив K' за время $3]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k+t_6(p)$ выполнит все действия коллектива K_8, а затем, не более $2n^2(k-1)V \leqslant 2p^2(k-1)V$ раз выполнит действия коллектива K_9. При каждом запуске коллектива K_9 выполнено $x \leqslant 2n^2(k-1)V^2 \leqslant 2p^2(k-1)V^2$. Таким образом, суммарное время работы коллектива K' не превосходит $3]\frac{x_0+y_1}{V(k-1)}[\cdot k + t_8(p)$, где $t_8(p)$ — некоторая функция от p. Положим $T_1(p) = t_2(p) + t_4(p)$ и $T_2(p) = t_8(p)$.

Аналогично строится коллектив $K''(R,V) = (\,\mathcal{A}''_1, \dots, \mathcal{A}''_{23}\,)$, который, стартуя из левой $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(1,y_0)$ функционирует так, как описанно в утверждении леммы, и также функционирует от $3]\frac{y_0+x_1}{V(k-1)}[\cdot k - T_1(p)$ до $3]\frac{y_0+x_1}{V(k-1)}[\cdot k + T_2(p)$ тактов. Поскольку коллектив, стартуя из $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(x_0,1)$ или с центром $(1,y_0)$ по входному символу может определить, нижняя это расстановка или левая, легко строится коллектив $K(R,V) = (\,W_1, \dots, W_{23}\,)$, который, стартуя из нижней $(a)(n,p,q_0)$-расстановки работает, как K', а стартуя из левой $(a)(n,p,q_0)$-расстановки работает, как K''. Этот коллектив и является искомым.

По построению коллектива K, если K не остановится в сильной левой $\langle$нижней$\rangle$ $(b)(n,p,q_1)$-расстановке с центром $(1,y_1)$ $\langle\,(x_1,1)\,\rangle$ (в случае, если не существует автомата-жертвы U с траекторией типа 2, для которого (n,p) — код, a — входной символ, либо если $x_0 \leqslant 2R \cdot k(n+1)^2 \cdot V$ $\langle\, y_0 \leqslant 2R \cdot k(n+1)^2 \cdot V\,\rangle$), то K остановится в некоторой канонической расстановке. Лемма доказана.

Лемма 22. *При $V > 3 \cdot V'$ существует коллектив хищников $K(R,V) = (\,W_1, \dots, W_{52}\,)$, который, стартуя из любого канонического расположения в L_4, обнаруживает любую жертву $U = U(R,V')$, если начальное расположение U в L_4 таково, что траектория U имеет тип 2.*

Доказательство. Коллектив, построенный в лемме 21, для некоторого значения k, будем обозначать как $K(k)$. Преобразуем этот коллектив так, чтобы, остановившись в сильной левой $\langle$нижней$\rangle$ $(b)(n,p,q_1)$-расстановке с центром $(1,y_1)$ $\langle(x_1,1)\rangle$, он запускался заново. Этот коллектив, стартовав из нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a)(n,p,q_0)$-

расстановки с центром $(x_0, 1)$ $\langle(1, y_0)\rangle$ будет работать все время, либо до остановки в каноническом расположении. Обозначим этот коллектив, как $K'(k)$. Положим $k_0 =]\frac{V}{V-3V'}[+1$.

Обозначим $K'(k_0)$ как $K^1(R,V) = (\mathcal{A}_1^1, \ldots, A_{23}^1)$. Модифицируем этот коллектив так, чтобы каждый раз перед запуском коллективов K_3, K_4 и K_7 из леммы 21, автоматы $\mathcal{A}_9^1$ и $\mathcal{A}_{10}^1$ были расположены от $\mathcal{A}_1^1$ на расстояниях $n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_1|$ и $n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_2|$, соответственно (а не на расстояниях $n(k_0-1)\cdot V\cdot|s_1|$ и $n(k_0-1)\cdot V\cdot|s_2|$, как в лемме 21). Тогда автоматы $\mathcal{A}_9^1, \ldots, \mathcal{A}_{13}^1$ в составе коллективов K_3, K_4 и K_7 из леммы 21 перемещаются по более длинным (в $(2k_0-1)$ раз) горизонтальным и вертикальным «ступенькам». Еще раз изменим этот коллектив так, чтобы по окончании работы коллектива K_7 из леммы 21, автомат $\mathcal{A}_{13}^1$ перемещался на вектор $(n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_1|\,,\, a_0+s_2^0-n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot s_2-1)$ (а не на вектор $(n(k_0-1)V\cdot|s_1|\,,\, a_0+s_2^0-n(k_0-1)V\cdot s_2-1)$, как ранее), все автоматы, кроме $\mathcal{A}_5^1$, $\mathcal{A}_6^1$, $\mathcal{A}_7^1$ и $\mathcal{A}_{13}^1$ перемещались на вектор $(0\,,\, a_0+s_2^0-n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot s_2-1)$, а автоматы $\mathcal{A}_5^1$, $\mathcal{A}_6^1$ и $\mathcal{A}_7^1$ перемещались в клетку, в которой после описанных перемещений оказался $\mathcal{A}_1^1$. Полученный коллектив обозначим как $K^2(R,V) = (\mathcal{A}_1^2, \ldots, A_{23}^2)$. Этот коллектив, стартуя при $x_0 > 4R\cdot k_0^2(n+1)^2\cdot V$ $\langle y_0 > 4R\cdot k_0^2(n+1)^2\cdot V\rangle)$ из нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(x_0,1)$ $\langle(1,y_0)\rangle$ функционирует так, как описанно в утверждении леммы 21, и также функционирует от $3]\frac{x_0+y_1}{V(k_0-1)}[\cdot k_0 - T_1(p)$ до $3]\frac{x_0+y_1}{V(k_0-1)}[\cdot k_0 + T_2(p)$ тактов $\langle$от $3]\frac{y_0+x_1}{V(k_0-1)}[\cdot k_0 - T_1'(p)$ до $3]\frac{y_0+x_1}{V(k_0-1)}[\cdot k_0 + T_2'(p)$ тактов$\rangle$.

Обозначим $K'(2k_0)$ как $K^3(R,V) = (\mathcal{A}_1^3, \ldots, A_{23}^3)$. Модифицируем этот коллектив так, чтобы каждый раз перед запуском коллективов K_3, K_4 и K_7 из леммы 21, автоматы $\mathcal{A}_9^3$ и $\mathcal{A}_{10}^3$ были расположены от $\mathcal{A}_1^1$ на расстояниях $n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_1|$ и $n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_2|$, соответственно (а не на расстояниях $n(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_1|$ и $n(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_2|$, как в лемме 21). Тогда автоматы $\mathcal{A}_9^3, \ldots, \mathcal{A}_{13}^3$ в составе коллективов K_3, K_4 и K_7 из леммы 21 перемещаются по горизонтальным и вертикальным «ступенькам», того же размера, что и для коллектива K^2. Еще раз изменим коллектив K^3 так, чтобы по окончании работы коллектива K_7 из леммы 21, автомат $\mathcal{A}_{13}^3$ перемещался на вектор $(n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot|s_1|\,,\, a_0+$

$s_2^0 - n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot s_2-1)$, все автоматы, кроме $\mathcal{A}_5^3$, $\mathcal{A}_6^3$, $\mathcal{A}_7^3$ и $\mathcal{A}_{13}^3$ перемещались на вектор $(\,0\,,\,a_0+s_2^0-n(k_0-1)\cdot(2k_0-1)\cdot V\cdot s_2-1)$, а автоматы $\mathcal{A}_5^3$, $\mathcal{A}_6^3$ и $\mathcal{A}_7^3$ перемещались в клетку, в которой после описанных перемещений оказался $\mathcal{A}_1^3$. Полученный коллектив обозначим как $K^4(R,V) = (\,\mathcal{A}_1^4,\ldots,A_{23}^4\,)$. Этот коллектив, стартуя при $x_0 > 4R\cdot k_0^2(n+1)^2\cdot V$ $\langle\, y_0 > 4R\cdot k_0^2(n+1)^2\cdot V\,\rangle)$ из нижней $\langle$левой$\rangle$ $(a)(n,p,q_0)$-расстановки с центром $(x_0,1)$ $\langle(1,y_0)\rangle$ функционирует так, как описанно в утверждении леммы 21, и также функционирует от $6]\frac{x_0+y_1}{V(2k_0-1)}[\cdot k_0 - T_1'(p)$ до $6]\frac{x_0+y_1}{V(2k_0-1)}[\cdot k_0 + T_2'(p)$ тактов $\langle$от $6]\frac{y_0+x_1}{V(2k_0-1)}[\cdot k_0 - T_1'(p)$ до $6]\frac{y_0+x_1}{V(2k_0-1)}[\cdot k_0 + T_2'(p)$ тактов$\rangle$.

Опишем, как функционирует коллектив $K = (\,W_1,\ldots,W_{52}\,)$.

1. Автоматы $W_1,\ldots,W_{50}$ перемещаются вниз до нижнего борта, затем влево до угла, за каждый шаг смещаясь на 1 клетку. Автомат W_{52} за каждый такт смещается на 1 вправо. После каждого шага автоматов $W_1,\ldots,W_{50}$ автомат W_{51} идет вправо до автомата W_{52} со скоростью V, а оказавшись в одной клетке с W_{52}, смещается на тот же вектор $\overline{b}$, на который сместились за последний шаг автоматы $W_1,\ldots,W_{50}$. Автомат W_{52} в этот такт смещается на вектор $\overline{b}+(1,0)$. После того, как автоматы $W_1,\ldots,W_{50}$ оказались в углу, W_{51} присоединяется к ним, а W_{52} продолжает за каждый такт смещаться на 1 клетку вправо.

2. Автомат W_{51} смещается на 2 вправо. Затем, автоматы $W_1,\ldots,$ W_{50} перемещаются в угол.

3. Подколлектив $(W_1,\ldots,W_4)$, в случае $P_{bort}^1(W_1)=1$, переходит в нижнюю $(1)(1,1,1)$-расстановку с центром $(x_0,1)$, где (x_0,y_0) — текущее расположение W_1. В случае же $(P_{bort}^1(W_1)=0)$, коллектив K переходит к действиям п. 15 (далее по порядку).

4. Подколлектив $(W_5,\ldots,W_{27})$ переходит в сильную нижнюю $(a)(n,p,q)$-расстановку с центром $(x_0,1)$, где $(a)(n,p,q)$-расстановка — текущая расстановка подколлектива $(W_1,\ldots,W_4)$. После этого подколлектив $(W_5,\ldots,W_{27})$ функционирует так же, как коллектив K^2.

5. Если в какой-то такт подколлектив $(W_5,\ldots,W_{27})$, завершив те действия, которые должен выполнять коллектив K^2, оказывается в канонической расстановке, автоматы $W_5,\ldots,W_{27}$ перемещаются в угол, а затем «змейкой», по аналогии с действиями 10)–14) автомата

$\mathcal{A}_1$ из леммы 10, идут вплоть до встречи с автоматом W_1 и оказываются в той же клетке, что и W_1.

6. Сразу после того, как подколлектив $(W_5, \ldots, W_{27})$ начинает функционировать по алгоритму коллектива K^2, автоматы W_{28} и W_{29} идут вправо со скоростью V и догоняют автомат W_{52}. После этого W_{29} становится в ту клетку, в которой он догнал W_{52}, а W_{28} идет обратно к W_1. После этого W_{28} совершает проходы со скоростью V от W_1 к W_{52}, и обратно, каждый раз на обратном пути сдвигая W_{29} на одну клетку влево, до тех пор, пока W_{29} не окажется в одной клетке с W_1.

7. Когда W_{29} оказывается в одной клетке с W_1, автомат W_{28} завершает проходы к W_1. Если к этому моменту автоматы $W_5, \ldots, W_{27}$ еще не находятся в одной клетке с W_1, подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ переходит в сильную нижнюю $(a)(n, p, q)$-расстановку с центром $(x_0, 1)$, где $(a)(n, p, q)$-расстановка — текущая расстановка подколлектива $(W_1, \ldots, W_4)$, (x_0, y_0) — текущее расположение W_1. После этого подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ функционирует так же, как коллектив K^4. Если же к этому моменту автоматы $W_5, \ldots, W_{27}$ находятся в одной клетке с W_1, то выполняются действия п. 14 (далее по порядку).

8. Если в какой-то такт подколлектив $(W_5, \ldots, W_{27})$, завершив те действия, которые должен выполнять коллектив K^2, оказывается в канонической расстановке, то подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$, также, завершив те действия, которые должен выполнять коллектив K^4, окажется в в канонической расстановке. Доопределим подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ так, чтобы, если, в процессе выполнения подколлективом $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ действий коллектива K^4, ни один из автоматов $W_{28}, \ldots, W_{50}$ не побывал в одной клетке ни с одним из автоматов $W_5, \ldots, W_{27}$, а по завершении действий, которые должен выполнять коллектив K^4, подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ оказался в канонической расстановке, то автоматы $W_{28}, \ldots, W_{50}$, по аналогии с автоматами $W_5, \ldots, W_{27}$, перемещаются в угол, а затем в клетку, в которой находится W_1. Затем выполняются действия п. 14 (далее по порядку).

9. Переопределим подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ так, чтобы, в случае, если, после того, как $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ начал функционировать по алгоритму коллектива K^4, некоторый автомат подколлектива $(W_5, \ldots, W_{27})$ оказывается в одной клетке с некоторым автоматом

подколлектива $(W_{28}, \ldots, W_{50})$, то подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$, после того, как окажется в некоторой сильной нижней или левой $(a')(n', p', q')$-расстановке, или в канонической расстановке, возвращался к W_1, по аналогии с тем, как описано в п. 5. Переопределим подколлектив $(W_5, \ldots, W_{27})$ так, чтобы, после такой встречи, как только подколлектив $(W_5, \ldots, W_{27})$ окажется в канонической расстановке, автоматы $W_5, \ldots, W_{16}, W_{18}, \ldots, W_{27}$ возвращались к W_1 так, как описано в п. 5, а автомат W_{17} оставался на месте в состоянии q_1^{17}, до того, как произойдет его встреча с некоторым автоматом W_j подколлектива $(W_{28}, \ldots, W_{50})$, находящимся в одном из специальных состояний, а если после такой встречи подколлектив $(W_5, \ldots, W_{27})$ окажется в некоторой сильной нижней или левой $(a')(n', p', q')$-расстановке, то сразу после этого автоматы $W_5, \ldots, W_{16}, W_{18}, \ldots, W_{27}$ возвращались к W_1 так, как описано в п. 5, а автомат W_{17} оставался на месте в состоянии q_2^{17}, до того, как произойдет его встреча с автоматом W_{40}, находящимся в одном из специальных состояний. Подмножество таких специальных состояний автомата W_j $(j \in \{28, \ldots, 50\})$ обозначим Q^j.

10. По алгоритму леммы 16 автоматы $W_1, W_2, W_6, W_7, W_8, W_9$ вычисляют значение $R(n+1)n$, после чего автомат W_6 оказывается на $R(n+1)n$ клеток правее W_1.

11. Подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$, вернувшись к W_1, переходит в сильную нижнюю $(a)(n, p, q)$-расстановку с центром $(x_0, 1)$, где $(a)(n, p, q)$-расстановка — текущая расстановка подколлектива $(W_1, \ldots, W_4)$, (x_0, y_0) — текущее расположение W_1. После этого подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ функционирует так же, как коллектив K^2. Переопределим подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ так, чтобы, в случае, если, после того, как $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ начал функционировать по алгоритму коллектива K^2, некоторый автомат подколлектива $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ оказывается в одной клетке с автоматом W_{17}, находящимся в состоянии q_1^{17}, то подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$, после того, как окажется в некоторой сильной нижней или левой $(a')(n', p', q')$-расстановке, или в канонической расстановке, возвращался к W_1, по аналогии с тем, как описано в п. 5. Такое же точно возвращение автоматов $W_{28}, \ldots, W_{50}$ к W_1 происходит, если автомат W_{40} оказывается в одной клетке с автоматом W_{17}, находящимся в состоянии q_2^{17}. Затем,

если автоматы W_1 и W_6 находятся в разных клетках, W_6 перемещается на 1 клетку влево, после чего снова выполняются действия п. 11.

12. Если после выполнения действий п. 11 автоматы W_1 и W_6 находятся в одной клетке, то подколлектив $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ снова функционирует так же, как коллектив K^2, а после встречи одного из своих автоматов с W_{17}, находящимся в состоянии q_1^{17}, а также после встречи автомата W_{40} с W_{17}, находящимся в состоянии q_2^{17}, возвращается к W_1, но, во время выполнения этих действий, каждый автомат W_j $(j \in \{28, \ldots, 50\})$ находится в состояниях из множества Q^j.

13. Переопределим автомат W_{17} так, чтобы в случае, если, после того, как $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ начал функционировать по алгоритму коллектива K^2, автомат W_{40}, находясь в состоянии из множества Q^{40}, оказывается в одной клетке с автоматом W_{17}, находящимся в состоянии q_2^{17}, то автомат W_{17} возвращался к W_1 так, как описано в п. 5.

14. Подколлектив $(W_1, \ldots, W_4)$ находится в $(a)(n,p,q)$-расстановке. Если $a < (R'+1)^2$, то подколлектив $(W_1, \ldots, W_4)$ переходит в $(a+1)(n,p,q)$-расстановку, если $a = (R'+1)^2$, $q < n$ (то есть, автомат W_4 расположен ближе к W_1, чем автомат W_2), то подколлектив $(W_1, \ldots, W_4)$ переходит в $(1)(n,p,q+1)$-расстановку, если $a = (R'+1)^2$, $q = n$, $n < p$ (то есть, автомат W_2 расположен ближе к W_1, чем автомат W_3), то подколлектив $(W_1, \ldots, W_4)$ переходит в $(1)(n+1,p,1)$-расстановку, если $a = (R'+1)^2$, $q = n = p$ и автомат W_3 находится на меньшем расстоянии от W_1, чем расстояние от автомата W_{51} до угла, то подколлектив $(W_1, \ldots, W_4)$ переходит в $(1)(1,p+1,1)$-расстановку. Во всех этих случаях центр расстановки и ее вид (нижняя или левая) остаются теми же, что были до выполнения действий п. 14. Затем выполняются действия п. 4 (далее по порядку). Если же $a = (R'+1)^2$, $q = n = p$ и автомат W_3 находится на том же расстоянии от W_1, что и расстояние от автомата W_{51} до угла (это проверяется при помощи 3 автоматов, первый из которых, W_{48}, передвигает два других, W_{49} и W_{50}, от автомата W_3 до W_1 и от автомата W_{51} до угла), то выполняются действия п. 15.

15. Все автоматы $W_2, \ldots, W_{50}$ перемещаются в клетку, в которой находится W_1. Если автоматы W_1 и W_{51} находятся в разных клетках, то автоматы $W_1, \ldots, W_{50}$ перемещаются в ту же клетку, в которую переместился бы из этого расположения автомат $\mathcal{A}_1$ из леммы 10,

в случае, когда в этой клетке нет автомата $\mathcal{A}_2$. Затем выполняются действия п. 3 (далее по порядку). Если же автоматы W_1 и W_{51} находятся в одной клетке, то выполняются действия п. 2 (далее по порядку).

Таким образом, коллектив K построен.

Пусть дан произвольный автомат-жертва $U(R', V')$ с траекторией типа 2 и кодом (n, p). Рассмотрим траекторию U то его обнаружения хищниками. Найдется такой такт времени τ_0, начиная с которого, все клетки, в которых окажется U, удалены от угла более чем на $4R \cdot k_0^2(n+1)^2 \cdot V$ (в противном случае, U должен был бы перемещаться по периодической траектории, то есть иметь траекторию типа 1). Обозначим наименьший такт, превосходящий τ_0, в который автомат U, впервые за данный проход от левого борта к нижнему (см. лемму 3), видит нижний борт, как τ_1. Следующий такой такт обозначим как τ_3, следующий — как τ_5, и т. д. Аналогично, обозначим наименьший такт, превосходящий τ_1, в который автомат U, впервые за данный проход от нижнего борта к левому, видит нижний борт, как τ_2. Следующий такой такт обозначим как τ_4, следующий — как τ_6, и т. д. Обозначим входной символ U в такт τ_i ($i \in \mathbb{N}$) как a_i, состояние U в такт τ_i как q_i, а клетку, в которой окажется U в такт τ_i — как (x_i, y_i). Как следует из леммы 3, последовательности $(x_1, \ldots, x_t, \ldots)$ и $(y_1, \ldots, y_t, \ldots)$ — бесконечно большие.

Покажем, что коллектив K удовлетворяет условию леммы. Пусть K стартовал из произвольной канонической расстановки. Автомат W_{52}, после выполнения остальными автоматами действий п. 1 (которые совершаются однократно), в любой такт времени τ находится на расстоянии τ от угла. Как легко видеть из п. 15 и 2, автомат W_1 обходит все клетки квадранта счетное число раз, причем, после выполнения действий п. 1, для любой клетки, находящейся у нижнего борта, при каждом новом попадании W_1 в эту клетку совершаются действия п. 3–15. При каждом новом попадании W_1 в данную клетку, расстояние от автомата W_{51} до угла на 2 больше, чем при предыдущем попадании W_1 в эту клетку. При каждом перемещении W_1 все автоматы $W_2, \ldots, W_{50}$ находятся в той же клетке, что и W_1.

Каждый раз при выполнении для очередной клетки $(x, 1)$, в которой оказался автомат W_1 действий п. 3–15, происходит перебор всех возможных нижних $(a)(n,p,q)$-расстановок подколлектива $(W_1,\ldots,W_4)$, таких, что p не больше расстояния от W_{51} до угла. Для каждой такой расстановки производится запуск подколлектива $(W_5,\ldots,W_{27})$ по алгоритму коллектива K^2. Пусть U — автомат, который имеет код (n,p) и в некоторый такт находится в клетке (x,a_0) (где a_0 — расстояние, на котором автомат находится от нижнего борта при входном вимволе a) в состоянии q, имея при этом траекторию типа 2. В процессе исполнения подколлективом $(W_5,\ldots,W_{27})$ алгоритма коллектива K^2 автомат W_{17} проходит клетки вида (x_i,y_i) при $i \geqslant i_0$ $(i_0 \in \mathbb{N})$, для указанного автомата U до тех пор, пока исполнение этого алгоритма подколлективом $(W_5,\ldots,W_{27})$ не прекратится в связи с тем, что W_{17} останется на некоторое время в текущей клетке, и в связи с возвращением остальных автоматов подколлектива к W_1, в соответствии с описанием п. 9, или в связи с возвращением автоматов $W_5,\ldots,W_{27}$ к W_1, в соответствии с описанием п. 5.

Возвращение к W_1, в соответствии с описанием п. 5, возможно в случае, когда не существует автомата U с указанными свойствами, либо когда такой автомат U через некоторое время после попадания в клетку (x,a_0) в состоянии q оказывается в $4R\cdot k_0^2(n+1)^2\cdot V$-окрестности угла. В противном случае (в соответствии с п. 9) автоматы $W_5,\ldots,W_{27}$ спустя некоторое время прекращают действовать по алгоритму коллектива K^2. Автоматы $W_5,\ldots,W_{16},W_{18},\ldots,W_{27}$ возвращаются к W_1, а автомат W_{17} остается на месте. Это достигается при помощи подколлектива $(W_{28},\ldots,W_{50})$, который, спустя некоторое время, запускается по алгоритму коллектива K^4, то есть вдогонку подколлективу $(W_5,\ldots,W_{27})$. Траектории автоматов W_j и W_{j+23} $(j=5,\ldots,27)$ совпадают, но W_{j+23} при перемещениях на длинных участках своей траектории стоит на месте только один раз за $2k$ тактов, в то время, как W_j стоит на месте один раз за каждые k тактов. На прочих же участках траектории W_j и W_{j+23} перемещаются одинаково. Значит, W_{j+23} догонит W_j, оказавшись в той же клетке. После первой же встречи одного из автоматов подколлектива $(W_{28},\ldots,W_{50})$ с некоторым автоматом подколлектива $(W_5,\ldots,W_{27})$, в соответствии с п. 9, автоматы $W_5,\ldots,W_{16},W_{18},\ldots,W_{50}$ возвращаются к W_1, а автомат W_{17} остается на месте, на некоторое время. Если подколлектив $(W_5,\ldots,W_{27})$ возвращается к W_1, в соответствии с п. 5, то подколлектив $(W_{28},\ldots,W_{50})$, в соответствии с п. 8, также возвращается к W_1. Запуск подколлектива $(W_{28},\ldots,W_{50})$ по алгоритму коллектива K^4 осуществляется не ранее, чем через $\tau\cdot D$ тактов после запуска подколлектива $(W_5,\ldots,W_{27})$ по алгоритму коллектива K^2, где τ — такт, в который началось выполнение п. 3–15, D — расстояние от автомата W_{51} до угла.

Если автомат W_{17} остался на месте, в соответствии с п. 9, когда автоматы $W_5,\ldots,W_{16},W_{18},\ldots,W_{50}$ вернулись к W_1, то после этого подколлектив $(W_{28},\ldots,W_{50})$ запускается $R(n+1)n+1$ раз по алгоритму коллектива K^2, до того, как хотя бы один из автоматов $W_{28},\ldots,W_{50}$ окажется в одной клетке с W_{17}, находящимся в состоянии q_2^{17}, или до того, как автомат W_{40} окажется в одной клетке с W_{17}, находящимся в состоянии q_1^{17}. После такой встречи подколлектив $(W_{28},\ldots,W_{50})$ возвращается к W_1, после чего снова запускается по алгоритму коллектива K^2. После последнего запуска все автоматы $W_2,\ldots,W_{50}$ возвращаются к W_1. На этом работа с данной нижней $(a)(n,p,q)$-расстановкой подколлектива $(W_1,\ldots,W_4)$ заканчивается и подколлектив $(W_1,\ldots,W_4)$ перемещается в следующую такую расстановку, в соответствии с п. 14 или 15.

Автомат U на каждый проход от нижнего борта к левому, от клетки (x_{2i-1},y_{2i-1}) до клетки (x_{2i},y_{2i}) $\langle$от левого борта к нижнему, от клетки (x_{2i},y_{2i}) до клетки $(x_{2i+1},y_{2i+1})\rangle$ тратит не менее $]\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V'}[-T_0(p)$ $\langle]\frac{y_{2i}+x_{2i+1}}{V'}[-T_0(p)\rangle$ тактов, где $T_0(p)$ — некоторая функция параметра p.

По лемме 21, в процессе выполнения коллективом K действий п. 4, то есть в то время, когда подколлектив $(W_5,\ldots,W_{27})$ функционирует так же, как коллектив K^2, автомат W_{17} будет тратить на перемещение от клетки (x_{2i-1},y_{2i-1}) до клетки (x_{2i},y_{2i}) $\langle$на перемещение от клетки (x_{2i},y_{2i}) до клетки $(x_{2i+1},y_{2i+1})\rangle$ не более $3]\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V(k_0-1)}[\cdot k_0+T_2(p)$ $\langle 3]\frac{y_{2i}+x_{2i+1}}{V(k_0-1)}[\cdot k_0+T_2(p)\rangle$ тактов, где $T_2(p)$ — некоторая функция параметра p.

Из соотношения $k_0=]\frac{V}{V-3V'}[+1$ следует, что $\frac{V(k_0-1)}{3k_0}>V'$. Положим $\varepsilon=(\frac{1}{V'}-\frac{3k_0}{V(k_0-1)})>0$. Тогда имеем

$$\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V'}-3\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V(k_0-1)}\cdot k_0=(x_{2i-1}+y_{2i})\cdot\varepsilon.$$

Откуда получаем

$$(\,]\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V'}[-T_0(p)\,)\;-\;(\,3]\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V(k_0-1)}[\cdot k_0+T_2(p)\,)\;\geqslant$$
$$\geqslant\;(x_{2i-1}+y_{2i})\cdot\varepsilon\;-\;(T_0(p)+T_2(p)+3k_0).$$

и, аналогично,

$$(\,]\frac{y_{2i}+x_{2i+1}}{V'}[-T_0(p)\,)\;-\;(\,3]\frac{y_{2i}+x_{2i+1}}{V(k_0-1)}[\cdot k_0+T_2(p)\,)\;\geqslant$$
$$\geqslant\;(y_{2i}+x_{2i+1})\cdot\varepsilon\;-\;(T_0(p)+T_2(p)+3k_0).$$

Поскольку автомат U имеет n состояний, $y_{2i}\leqslant n\cdot x_{2i-1}+T_3(n)$, $x_{2i+1}\leqslant n\cdot y_{2i}+T_4(n)$, где $T_3(n)$ и $T_4(n)$ — некоторые функции от n. Откуда получаем: $x_{2i+1}\leqslant n^2\cdot x_{2i-1}+T_5(n)$, где $T_5(n)$ — некоторая функция от n. Поскольку последовательности $(x_1,\ldots,x_t,\ldots)$ и $(y_1,\ldots,y_t,\ldots)$ — бесконечно большие, существует такое i_1, что для всех $i\geqslant i_1$, верны неравенства

$$\Bigg(\Bigg]\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V'}\Bigg[-T_0(p)\Bigg)-\Bigg(3\Bigg]\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V(k_0-1)}\Bigg[\cdot k_0+T_2(p)\Bigg)\geqslant$$
$$\geqslant(x_{2i-1}+y_{2i})\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\Bigg(\Bigg]\frac{y_{2i}+x_{2i+1}}{V'}\Bigg[-T_0(p)\Bigg)-\Bigg(3\Bigg]\frac{y_{2i}+x_{2i+1}}{V(k_0-1)}\Bigg[\cdot k_0+T_2(p)\Bigg)\geqslant$$
$$\geqslant(y_{2i}+x_{2i+1})\cdot\frac{\varepsilon}{2}\;,$$
$$3]\frac{x_{2i-1}+y_{2i}}{V(k_0-1)}[\cdot k_0+T_2(p)\;\leqslant\;(x_{2i-1}+y_{2i})\frac{4k_0}{V(k_0-1)}\;,$$
$$3]\frac{y_{2i}+x_{2i+1}}{V(k_0-1)}[\cdot k_0+T_2(p)\;\leqslant\;(y_{2i}+x_{2i+1})\frac{4k_0}{V(k_0-1)}\;.$$
$$y_{2i}\leqslant 2n\cdot x_{2i-1},$$
$$x_{2i+1}\leqslant 2n^2\cdot x_{2i-1}.$$

Для любого $D_0\in\mathbb{N}$, $D_0>p$, существует такт $\widehat{\tau}_{i_1}(D_0)$, когда автомат W_1 окажется в клетке (x_{2i_1-1},y_{2i_1-1}), причем $\widehat{\tau}_{i_1}(D_0)\geqslant\tau_{2i_1-1}$, то есть, в такт $\widehat{\tau}_{i_1}(D_0)$ автомат U уже успел побывать в клетке (x_{2i_1-1},y_{2i_1-1}), и в такт $\widehat{\tau}_{i_1}(D_0)$ расстояние D от автомата W_{51} до угла удовлетворяет условию $D > D_0 > p$. После этого K совершит действия п. 3–15. В процессе выполнения этих действий подколлектив $(W_1, \ldots, W_4)$ окажется в $(a_{i_1})(n, p, q_{i_1})$-расстановке, после чего будут выполнены действия п. 4–13. Как показано выше, в течении, как минимум, $\widehat{\tau}_{i_1}(D_0) \cdot D$ тактов автомат W_{17} будет перемещаться по траектории автомата $\mathcal{A}_{13}^2$ коллектива K^2. За это время W_{17} совершит проходы от клетки (x_{2i_1-1}, y_{2i_1-1}) к клетке (x_{2i_1}, y_{2i_1}), от клетки (x_{2i_1}, y_{2i_1}) к клетке (x_{2i_1+1}, y_{2i_1+1}), …, от клетки (x_{2i_2}, y_{2i_2}) к клетке (x_{2i_2+1}, y_{2i_2+1}), где i_2 — такое натуральное число, что

$$\frac{4k_0}{V(k_0-1)} \sum_{t=i_1}^{i_2} (x_{2t-1} + 2y_{2t} + x_{2t+1}) \leqslant \widehat{\tau}_{i_1}(D_0) \cdot D \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4k_0}{V(k_0-1)} \sum_{t=i_1}^{i_2+1} (x_{2t-1} + 2y_{2t} + x_{2t+1})\,.$$

(Возможно, что будет совершено больше проходов, чем до клетки (x_{2i_2+1}, y_{2i_2+1}), но точно не меньше). Как следует из приведенных выше неравенств,

$$\sum_{t=i_1}^{i_2} (x_{2t-1} + 2y_{2t} + x_{2t+1}) + (x_{2i_2+1} + 4n \cdot x_{2i_2+1} + 2n^2 \cdot x_{2i_2+1}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\widehat{\tau}_{i_1}(D_0) \cdot D \cdot V(k_0-1)}{4k_0}.$$

Откуда получим:

$$(2 + 4n + 2n^2) \cdot \sum_{t=i_1}^{i_2} (x_{2t-1} + 2y_{2t} + x_{2t+1}) \geqslant \frac{\widehat{\tau}_{i_1}(D_0) \cdot D \cdot V(k_0-1)}{4k_0}\,,$$

$$\sum_{t=i_1}^{i_2} (x_{2t-1} + 2y_{2t} + x_{2t+1}) \geqslant \frac{\widehat{\tau}_{i_1}(D_0) \cdot D \cdot V(k_0-1)}{8k_0 \cdot (1 + 2n + n^2)}\,.$$

W_{17} на совершение этих проходов потратит на Δ тактов меньше, чем U, где

$$\Delta \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{t=i_1}^{i_2} (x_{2t-1} + 2y_{2t} + x_{2t+1}) \geqslant \frac{\varepsilon \cdot \widehat{\tau}_{i_1}(D_0) \cdot D \cdot V(k_0-1)}{16k_0 \cdot (1+2n+n^2)} \; .$$

При $D_0 = \max\{\,]\frac{16k_0\cdot(1+2n+n^2)}{\varepsilon\cdot V(k_0-1)}[\; , p\,\}$ получим $\Delta \geqslant \widehat{\tau}_{i_1}(D_0)$, то есть автомат W_{17} окажется в клетке (x_{2i_2+1}, y_{2i_2+1}) не позже, чем автомат U. Легко видеть, что для любого $i > i_2$, автомат W_{17} окажется в клетках (x_{2i}, y_{2i}) и (x_{2i+1}, y_{2i+1}) не позже, чем U. В одной из таких клеток, назовем ее (x, y), автомат W_{17} будет остановлен на некоторое время в результате встречи с одним из автоматов подколлектива $(W_{28}, \ldots, W_{50})$, так как описано в п. 9. Заметим, что это произойдет, когда подколлектив $(W_5, \ldots, W_{27})$ окажется в некоторой сильной нижней или левой $(a')(n', p', q')$-расстановке (поскольку подколлектив $(W_5, \ldots, W_{27})$ моделирует поведение автомата U вне $4R\cdot k_0^2(n+1)^2\cdot V$-окрестности угла). Значит, автомат W_{17} окажется в состоянии q_2^{17}. До того, как W_{17} покинет клетку (x, y), действия п. 11 выполнятся $R(n+1)n$ раз. При этом автомат W_{40} $R(n+1)n$ раз совершит путь от автомата W_1, находящегося в клетке (x_{2i_1-1}, y_{2i_1-1}), к клетке (x, y). Пусть на каждый такой путь от клетки (x_{2i_1-1}, y_{2i_1-1}) к клетке (x, y) автомат W_{40} будет тратить $\widetilde{\tau}_0$ тактов времени, а автомат U на этот же путь тратит $\widetilde{\tau}$ тактов времени. Предпериод автомата U при каждом проходе от нижнего борта к левому или от левого борта к нижнему не превосходит $R(n+1)n$, автомат W_{40} в составе подколлектива $(W_{28}, \ldots, W_{50})$ моделирует этот предпериод не менее, чем за 1 такт. Во время же прохождения автоматом U периода своей выходной последовательности при проходе от нижнего борта к левому или от левого борта к нижнему каждую «ступеньку» ширины $n(k_0-1)(2k_0-1)V\cdot|s_1|$ и высоты $n(k_0-1)(2k_0-1)V\cdot|s_2|$ автомат U проходит не более, чем за $n^2(k_0-1)(2k_0-1)V$ тактов, а W_{40} — не более, чем за $n(k_0-1)(2k_0-1)\cdot|s_1|$ тактов. Кроме этого, моделируя поведение U на предпоследней и последней «ступеньками», перед попаданием U в зону видимости борта, W_{40} тратит на моделирование каждого хода U несколько тактов. К тому же, W_{40}, в процессе моделирования, совершает «лишние» перемещения, которых U не делает. Таким образом, $\widetilde{\tau} \leqslant \widetilde{\tau}_0 \cdot R(n+1)n$. Поскольку W_{17} находится в клетке (x, y) не менее $\widetilde{\tau}_0 \cdot R(n+1)n$ тактов, автомат U, за время нахождения W_{17} в клетке (x, y), если не будет обнаружен хищниками ранее, сам дойдет до этой клетки. Таким образом, U будет обнаружен. Поскольку автомат U выбирался произвольно, показано, что любой автомат-жертва $U(R, V')$ с траекторией типа 2 будет обнаружен хищниками. Причем, поскольку моментов $\widehat{\tau}_{i_1}(D_0)$, таких, как указано выше, существует счетное множество, то, в случае, если бы обнаружение жертвы не приводило к изменинию траектории жертвы или ее уничтожению, то каждая бы жертва с траекторией типа 2 была бы обнаружена счетное число раз. Лемма доказана.

Лемма 23. *При $V > 3 \cdot V'$ существует коллектив хищников $K(R, V) = (W_1, \ldots, W_{104})$, который, стартуя из любого канонического расположения в L_4, ловит любую конечную независимую систему жертв $S(R, V')$, при любом таком начальном расположении жертв в L_4, при котором траектория каждой жертвы имеет тип 2.*

Доказательство. Пусть в квадранте перемещается произвольная независимая система жертв $S = (U_1, \ldots, U_n)(R, V')$. При $R = V$ обнаружение жертвы означает ее поимку и утверждение леммы прямо следует из леммы 22.

Предположим, $R > V$. В лемме 12 (см. стр. 208) построен автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}(R, V)$, который, не видя жертв, стоит на месте, а увидев какую-либо из жертв, $\mathcal{A}$ не позднее, чем через $(R - V)$ тактов ловит некоторую жертву и возвращается в исходное расположение. Переобозначим начальное и финальное состояния этого автомата, как q_0 и q_1, соответственно.

В лемме 22 построен коллектив хищников, обнаруживающий любой автомат-жертву $U = U(R, V - 1)$ в квадранте. Переобозначим этот коллектив как $K_1 = (W'_1, \ldots, W'_{52})(R, V)$. Внутренний алфавит W'_i $(1 \leqslant i \leqslant 52)$ переобозначим как Q'_i, а его начальное состояние как q^i_0.

При функционировании коллектива K_1, перемещение автомата W'_{51} (см. стр. 248) происходит не чаще, чем раз в 10 тактов. Действительно, не менее 5 тактов тратится на перемещение автоматов

$W'_1, \ldots, W'_{50}$ из угла в клетку, где находится W'_1, при этом не менее двух раз подколлектив $(W'_1, \ldots, W'_4)$ будет переходить в нижнюю $(1)(1,1,1)$-расстановку и обратно (см. доказательство леммы 22). За 10 подряд идущих тактов W'_{51} делает 1 ход, перемещаясь на некоторый вектор $\vec{s}$, такой что $|\vec{s}| \leqslant 2$. Автомат W'_{52}, после того, как автомат W'_1 впервые окажется в углу, за каждый такт перемещается на вектор $(1,0)$.

Добавим к коллективу K_1 автоматы $W''_1, \ldots, W''_{52}$, устроенные следующим образом.

До попадания автомата W'_i $(i \in \{1, \ldots, 51\})$ в угол, автомат W''_i перемещается вместе с ним. Аналогично, до того, как автомат W'_{52} окажется на расстоянии 1 от нижнего борта, автомат W''_{52} перемещается вместе с ним.

Каждый хищник W''_i при $i = 1, \ldots, 52$, перемещается совместно с W'_i, сразу после того, как он впервые окажется в углу, если $i \neq 52$, и сразу после того, как он окажется на расстоянии 1 от нижнего борта, если $i = 52$, до тех пор, когда он увидит какую-либо жертву. Увидев какую-либо жертву (после первого попадания в угол для $W''_1, \ldots, W''_{51}$, и после того, как окажется у нижнего борта для W''_{52}), W''_i функционирует как автомат $\mathcal{A}$ и, за время, не большее $2(R-V)$ ловит некоторую жертву и возвращается в клетку, из которой он начинал преследование жертвы, оказавшись в состоянии q_1.

Перемещение $\vec{s_{51}}$ автомата W'_{51} за время преследования автоматом W''_{51} жертвы таково, что $|\vec{s_{51}}| \leqslant 2 \cdot]2(R-V)/10[\leqslant (R-V)/2 + 2 \leqslant R/2 + 1 \leqslant R$. То есть автомат W''_{51}, оказавшись в состоянии q_1, увидит W'_{51}. Доопределим W''_{51}, так что W''_{51} в состоянии q_1, видя W'_{51}, идет к нему со скоростью V, а, оказавшись в одной клетке с W'_{51}, — снова начинает перемещаться совместно с W'_{51}, до следующего обнаружения некоторой жертвы, то есть действовать так, как описано в предыдущем абзаце. Таким образом, не позднее, чем через $\tau = 2(R-V) + 10]R/8[$ тактов после обнаружения жертвы, W''_{51} вернется к W'_{51}.

Доопределим W''_{52} так, что он, находясь в состоянии q_1, не видя W'_{52}, идет со скоростью V в направлении $(1,0)$, пока не увидит W'_{52}, а видя W'_{52} — идет к нему со скоростью V. Таким образом, не позднее, чем через $\tau = 4(R-V)$ тактов после обнаружения жертвы, W''_{52}

вернется к W'_{52}. Оказавшись в одной клетке с W'_{52}, автомат W''_{52} начинает перемещаться совместно с W'_{52}, до следующего обнаружения некоторой жертвы, как описано выше.

Пусть $i \in \{1, \ldots, 50\}$. Изменим функции переходов и выходов автоматов W'_i, так, чтобы все эти автоматы, оказавшись в углу (после выполнения действий п. 2, см. лемму 22) перемещались далее только тогда, когда в одной клетке с ними находятся все автоматы W''_i, $i \in \{1, \ldots, 50\}$, и совместно с ними. То есть, если в момент, когда автоматам W'_i надо переместиться, в соответствии с действиями п. 3 из лемму 22, в одной клетке с ними не находятся все автоматы W''_i, они ждут, пока все они также не окажутся в углу, и затем передвигаются вместе с ними. Понятно, что такие изменения коллектива $(W'_1, \ldots, W'_{52})$, не влияют на факт обнаружения им любой жертвы.

Доопределим каждый автомат W''_i $i \in \{1, \ldots, 50\}$ так, чтобы, оказавшись в состоянии q_1, он возвращался в угол. Находясь после этого в углу W''_i ждет, пока все автоматы W'_i, W''_i при $i \in \{1, \ldots, 50\}$, не окажутся также в углу. После этого каждый автомат W'_i продолжает перемещаться в соответствии со своим алгоритмом, а W''_i перемещается совместно с ним до обнаружения некоторой жертвы. Увидев некоторую жертву, W''_i снова ее преследует, как описано выше.

Обозначим полученный коллектив $K = (W_1, \ldots, W_{104}) = (W'_1, \ldots, W'_{52}, W''_1, \ldots, W''_{52})$. Покажем, что K удовлетворяет условию леммы. Подколлектив $(W'_1, \ldots, W'_{52})$ функционирует так же, как коллектив K_1, только, возможно, с большим числом пауз в работе всех автоматов, кроме W'_{52}. Однако, как следует из доказательства леммы 22, и приведенных выше построений, эти паузы не влияют на факт обнаружения коллективом K_1 любой жертвы с траекторией типа 2. Пусть в некоторый такт τ_0 уже поймано h жертв $(0 \leqslant h \leqslant n-1)$, причем пойманы не все жертвы с траекторией типа 2. Проведем доказательство от противного, то есть, предположим, что после этого ни одна жертва не будет поймана. Обозначим следующий после τ_0 момент, когда все автоматы W'_i, W''_i, $i \in \{1, \ldots, 50\}$ перемещаются из угла в следующую клетку, как τ_1. Тогда не позднее, чем в такт $\max\{\tau_1, \tau_0 + \tau_2\}$, каждый хищник W''_i $(i = 1, \ldots, 52)$ окажется в той же клетке и в том же состоянии, что и W'_i. Здесь под τ_2 понимается максимальное время, которое требуется W''_i для возвращения к

W_i' после обнаружения жертвы, при $i \in \{51, 52\}$ (эти величины подсчитаны выше). После этого, хищники W_i'' и W_i' передвигаются совместно, пока не обнаружат (согласно лемме 22) некоторую жертву с траекторией типа 2 . Как указано выше, в такой ситуации W_i'' начнет преследовать обнаруженную жертву, и поймает некоторую жертву. Это противоречит предположению о том, что никакая новая жертва не будет поймана. Это противоречие показывает, что поимка новых и новых жертв будет продолжаться, пока не пойманы все жертвы с траекторией типа 2. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Обозначим коллективы, построенные в леммах 12, 23 как $K'(R,V) = (W_1', \ldots, W_{24}')$ и $K''(R,V) = (W_1'', \ldots, W_{104}'')$, соответственно. Рассмотрим коллектив $K(R,V) = (W_1', \ldots, W_{24}', W_1'', \ldots, W_{44}'') = (W_1, \ldots, W_{128})$. Легко видеть, что наличие в квадранте жертв, имеющих траектории типа 2, не мешает автоматам $W_1', \ldots, W_{24}'$ поймать все жертвы с траекториями типа 1 (отвелекаться на поимку жертв, имеющих траектории типа 2, хищникам приходится лишь конечное число раз). Аналогично, наличие в квадранте жертв, имеющих траектории типа 1, не мешает автоматам $W_1'', \ldots, W_{104}''$ поймать все жертвы, имеющие траектории типа 2. Таким образом, из лемм 12, 23 следует, что коллектив K, стартуя в квадранте из канонического расположения, ловит любую конечную независимую систему жертв, при любом их начальном расположении. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва—Ижевск, 2004.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15, вып. 2. 2003.

[4] Килибарда Г., Кудрявцев В.Б., Ушчумлич Ш. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. Т. 15, вып. 3. 2003.

[5] Грунская В. И. О динамическом взаимодействии автоматов // Математическая кибернетика и ее приложения к биологии. М.: МГУ, 1987. С. 8–18.

[6] Волков Н.Ю. Об автоматной модели преследования // Дискретная математика. Т. 19, вып. 2. 2007. С. 131–160.

[7] Волков Н.Ю. Об автоматной модели преследования в базовых плоских областях // Интеллектуальные системы. Т. 11, вып. 1–4. 2007. С. 361–402.

[8] Волков Н.Ю. Об автоматной модели преследования внутри квадрата // Интеллектуальные системы. Т. 12, вып. 1–4. 2008. С. 137–158.