Критерий сводимости задачи об опасной близости к задаче о прокалывании

Е. А. Снегова

В работе рассматривается задача о поиске движущихся объектов, которые могут столкнуться с движущимся объектом-запросом, где под столкновением понимается нахождение объектов в опасной близости. Приведен критерий сводимости данной задачи к одномерной задаче о прокалывании.

Ключевые слова: базы данных движущихся объектов, пространственно-временные базы данных, информационный граф, сложность.

1. Введение

Традиционно в системах управления базами данных предполагается, что каждый движущийся объект имеет свою собственную независимую скорость и собственное направление движения, то есть объекты движутся хаотично. В данной статье рассматриваются потоки движущихся объектов и конфликты между потоками.

Приведем пример приложения задачи об опасной близости.

Рассмотрим квадрат над аэропортом и два типа самолетов: самолеты одного типа (запросы) движутся с юга на север внутри квадрата, а самолеты другого типа (объекты) движутся с запада на восток также внутри квадрата. Каждый самолет, когда он появляется на границе квадрата, объявляет координаты появления и время своего появления. Задача об опасной близости заключается в перечислении для каждого нового самолета-запроса тех и только тех самолетов-объектов, которые будут в некоторый момент времени в процессе своего движения на расстоянии не более, чем ρ от запроса по Манхэттену.

Расстояние ρ может быть интерпретировано следующим образом: рассмотрим самолет, представляющий из себя круг радиуса ρ в Манхэттеновской метрике, как это показано на рис. 1. Задача об опасной близости заключается в том, чтобы для каждого самолета-запроса перечислить те и только те самолеты-объекты, которые будут пересекаться с запросом в процессе своего движения.

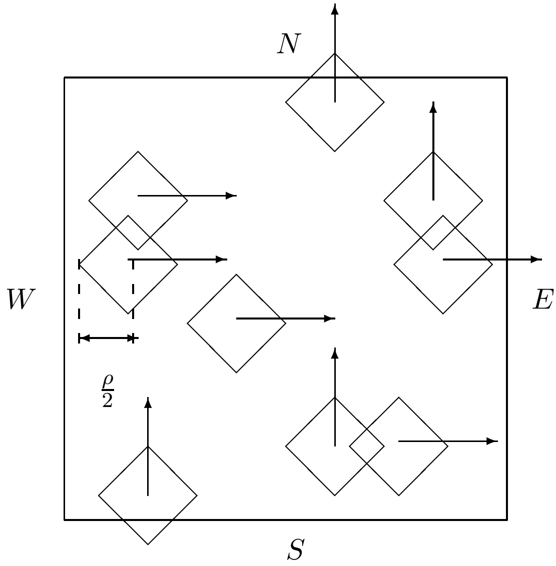

Рис. 1. Движение объектов и запросов в задаче об опасной близости.

В основной части этой статьи приводится формальная постановка задачи об опасной близости, формулируется и доказывается критерий сводимости данной задачи к одномерной задаче о прокалывании.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Обзор литературы

Задача об опасной близости тесно связана с задачей поиска объекта, ближайшего к запросу. Рассмотрим существующие методы решения последней задачи и сравним их с решением задачи об опасной близости в том случае, когда она сводится к задаче одномерного интервального поиска.

В большей части методов решения задачи поиска объекта, ближайшего к запросу, используются структуры данных, основанные на конструкции R-дерева [1].

Первая группа методов относится к случаю статической базы данных, состоящей из неподвижных точек, и статического точечного запроса [2]. Идея этих методов заключается в многоступенчатой проверке данных, происходящей до тех пор, пока не достигается подходящий радиус. Например, Korn [2] и др. разработали алгоритм, состоящий из нескольких предварительных и одного финального этапа отбора.

Для движущихся объектов и статических запросов Roussopoulos и др. [3] разработали алгоритм, позволяющий получать ответ на запрос о положении объектов в пространстве. Структура данных для этого алгоритма основана на R^*-дереве [4] — модификации R-дерева. Cheung и Fu [5] упростили их алгоритм без потери в эффективности, а Benetis [6] и др. расширили его на случай непрерывно движущихся объектов.

В [7] Song и Roussopoulos предложили решение задачи нахождения k ближайших к запросу объектов. Большинство алгоритмов для случая непрерывного движения объектов основываются на повторных применениях алгоритмов для решения обычной задачи о нахождении ближайшего соседа, что приносит значительные издержки (см., например, [8]). В отличие от этого подхода, Тао и др. [9] разработали методы, которые решают данную задачу путем формирования единого запроса для всей базы данных.

Случай движущихся объектов и движущихся запросов — самый близкий к задаче об опасной близости. Gedik ввел понятие MobiEyes [10] — структуры, позволяющей в режиме реального времени определять текущее положение объектов.

Все методы, приведенные выше, основаны на структуре R-дерева или ее модификации, предназначенной для хранения двух- или трехмерных объектов. Данные методы полезны в случае хаотического движения объектов. Во всех работах нет аналитических оценок сложности, и авторы показывают эффективность их результатов с помощью экспериментов. Но не трудно заметить, что в худшем случае оценки не более чем линейные от размера базы данных.

Случай предопределенного движения объектов рассмотрен в [11] Attalah'ом. Автор предложил алгоритмы для поиска самых близких к запросу и самых быстрых относительно запроса объектов и также алгоритмы для вычисления выпуклой оболочки движущихся точек. Для некоторых алгоритмов автор доказал линейные нижние оценки сложностей.

В данной работе также рассматривается случай предопределенного движения объектов. Данные о законах движения объектов и запросов позволяют нам в каждом конкретном случае определить, может ли задача об опасной близости быть сведена к задаче одномерной задаче о прокалывании.

Решения одномерной задачи о прокалывании приведены в работах Lars Arge'a и др. [14] и P. Kanellakis'a и др. [15]. В обеих работах [14], [15] описаны алгоритмы решения имеющий логарифмическую сложность поиска без перечисления ответа, линейный объем памяти и логарифмическую сложность вставки/удаления с расчетом на одну операцию (amortized). Недостатком алгоритма из [15] является тот факт, что сложность перечисления ответа пропорциональна длине ответа, а не равна ей, в отличии от алгоритма, описанного в [14]. Кроме того, алгоритм [14] позволяет получить логарифмическую сложность вставки/удаления в худшем случае с помощью постоянной перестройки дерева базы данных и хранения нескольких копий базы.

Сложности упомянутых алгоритмов значительно меньше, чем оценки, полученные Attalah'ом [11].

3. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть заданы две функции $f : [0, \tau_{\max}] \to [-\rho, 1+\rho]$ и $f_q : [0, \tau^q_{\max}] \to [-\rho, 1+\rho]$, называемые *законами движения объектов и объектов-запросов*, соответственно. Функции являются непрерывными и строго монотонными на всей области определения, и удовлетворяют условиям $f(0) = f_q(0) = -\rho$, $f(\tau_{\max}) = f_q(\tau^q_{\max}) = 1 + \rho$.

Считаем, что на плоскости имеется счетное множество объектов, движущихся таким образом, что их координаты в зависимости от времени задаются парой $(f(t-t_i), y_i)$, где $i \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0,1]$, а t_i образует строго возрастающую последовательность вещественных чисел. Аналогично, движение объекта-запроса задается парой $(x, f_q(t-t_q))$, где $x \in [0,1]$, t_q — вещественное число.

Библиотекой $V(t_q)$ назовем множество объектов, находящихся в текущий момент времени t_q внутри прямоугольника $[-\rho, 1+\rho] \times [0,1]$, то есть

$$V(t_q) = \{(t_i, y_i) : t_q \in [t_i, t_i + \tau_{\max}], y_i \in [0,1]\}.$$

Вместо $V(t_q)$ будем писать просто V, понимая под этим множество всех объектов, находящихся в текущий момент времени внутри квадрата. Через $|V|$ обозначим число объектов в этой библиотеке.

В задаче требуется для произвольного запроса перечислить все объекты из библиотеки, с которыми он в процессе своего движения будет находиться на расстоянии меньшем, чем ρ по Манхэттену, то есть *ответом на запрос* $q = (t_q, x)$ при библиотеке $V = V(t_q)$ и расстоянии опасной близости ρ является множество

$$J(\rho, q, V) = \{o_i \in V |\ \exists\ t : |f(t-t_i) - x| + |y_i - f_q(t-t_q)| \leqslant \rho\}.$$

Тройку (f, f_q, ρ) будем называть *задачей об опасной близости.*

Задачей о прокалывании назовем пару $(\mathbb{R}, Z)$, где библиотека Z есть конечное множество всех интервалов с концами из $\mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ есть множество всех действительных чисел. Содержательно эта задача состоит в том, чтобы для произвольного запроса $p \in \mathbb{R}$ перечислить все те и только те отрезки из Z, которые содержат p.

Ответ на запрос $p \in \mathbb{R}$ при библиотеке Z в задаче о прокалывании есть множество $J(p, Z) = \{z \in Z : p \in z\}$.

Будем говорить, что задача об опасной близости (f, f_q, ρ) *сводится* с задаче о прокалывании, если существуют такие отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, что для любой библиотеки $V = V(t_q)$, любого запроса $q = (t_q, x)$ и любого объекта $o \in V$ верно

$$o \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow [\varphi_1(o), \varphi_2(o)] \in J(\varphi(q), Z),$$

где $Z = \{[\varphi_1(o), \varphi_2(o)] : o \in V\}$.

Тройку $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ будем называть *функциями сведения.*

Аналогично критерию сводимости к задаче одномерного интервального поиска обозначим

$$Y_R = \{y \in [0,1] : \exists\, x \;\; F_R(x,y) \leqslant 0\}, \tag{1}$$

$$Y_L = \{y \in [0,1] : \exists\, x \;\; F_L(x,y) \leqslant 0\}, \tag{2}$$

$$X_L = \{x \in [0,1] : \exists\, y \;\; F_L(x,y) \leqslant 0\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче о прокалывании тогда и только тогда, когда существуют функции $\psi, \psi_L, \psi_R : [0,1] \to \mathbb{R}$ такие, что для любой пары (x,y), для которой выполнено условие $F_L(x,y) \leqslant 0$, верно, что*

$$F_L(x,y) = \psi(x) + \psi_L(y), \tag{4}$$

а для любой пары (x,y), такой, что $F_R(x,y) \leqslant 0$, верно, что

$$F_R(x,y) = \psi(x) + \psi_R(y). \tag{5}$$

При этом если выполнены условия (4) и (5) и

$$\psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } x \in X_L, \\ F_L(0,1), & \text{если } x \notin X_L, \end{cases} \tag{6}$$

$$\psi_R^*(y) = \begin{cases} \psi_R(y), & \text{если } y \in Y_R, \\ F_R(0,1), & \text{если } y \notin Y_R, \end{cases} \tag{7}$$

$$\psi_L^*(y) = \begin{cases} \psi_L(y), & \text{если } y \in Y_L, \\ F_L(0,1), & \text{если } y \notin Y_L, \end{cases} \tag{8}$$

то функции сведения $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ имеют вид

$$\varphi(t_q, x) = t_q + \psi^*(x), \tag{9}$$

$$\varphi_1(t_i, y_i) = t_i - \psi_R^*(y_i), \tag{10}$$

$$\varphi_2(t_i, y_i) = t_i - \psi_L^*(y_i). \tag{11}$$

4. Доказательство основного результата

4.1. Свойства функций $F_R(x,y)$, $F_L(x,y)$

Перечислим некоторые свойства функций $F_L(x,y), F_R(x,y)$.

Свойство 1. *Функции $F_R(x,y)$, $F_L(x,y)$ строго возрастают по y и убывают по x.*

Доказательство. Покажем, для примера, что $F_L(x,y)$ возрастает по y. Возьмем $y_1 < y_2$ и фиксируем некоторый ξ_2, такой, что $\xi_2 \in \arg\min\limits_{\xi\in[0,\rho]}[f_q^{-1}(y+\xi-\rho)-f^{-1}(x+\xi)]$. Тогда верна следующая цепочка неравенств:

$$F_L(x,y_2) = f_q^{-1}(y_2+\xi_2-\rho) - f^{-1}(x+\xi_2) >$$
$$> f_q^{-1}(y_1+\xi_2-\rho) - f^{-1}(x+\xi_2) \geqslant \min_{\xi\in[0,\rho]}[f_q^{-1}(y_1+\xi-\rho) - f^{-1}(x+\xi)].$$

Отсюда вытекает, что $F_L(x,y)$ возрастает по y.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Свойство 1 доказано.

Свойство 2. *Функции $F_R(x,y)$, $F_L(x,y)$ непрерывны по y при фиксированном x и непрерывны по x при фиксированном y.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность x_n, стремящуюся к x. Тогда

$$\lim_{x_n\to x} F_L(x_n,y) = \lim_{x_n\to x}\min_{\xi\in[0,\rho]}(f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - f^{-1}(x_n+\xi)) =$$
$$= \min_{\xi\in[0,\rho]}(f_q^{-1}(y+\xi-\rho) - f^{-1}(x+\xi))$$

в силу непрерывности функции f^{-1}.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Свойство 2 доказано.

Свойство 3. *Для любой пары $(x,y)\in[0,1]^2$*

$$F_L(x,y) + \tau_{\max} > 0.$$

Доказательство.

$$F_L(x,y) \geqslant F_L(1,0) = \min_{\xi \in [0,\rho]} (f_q^{-1}(\xi - \rho) - f^{-1}(1+\xi)) \geqslant$$
$$\geqslant f_q^{-1}(0) - f^{-1}(1+\rho) > -f^{-1}(1+\rho) = \tau_{\max},$$

так как $f_q^{-1}(0) > f_q^{-1}(-\rho) = 0$.

Свойство 3 доказано.

Свойство 4. *Для любой пары* $(x,y) \in [0,1]^2$

$$F_R(x,y) - F_L(x,y) > 0.$$

Доказательство. Заметим, что $F_R(x,y) \geqslant f_q^{-1}(y+\rho) - f^{-1}(x)$, а $F_L(x,y) \leqslant f_q^{-1}(y-\rho) - f^{-1}(x)$. То есть

$$F_R(x,y) - F_L(x,y) \geqslant f_q^{-1}(y+\rho) - f_q^{-1}(y-\rho) > 0,$$

так как функция f_q^{-1} строго возрастает.

Свойство 4 доказано.

4.2. Основная лемма

Лемма 1. *Объект* $o_i = (t_i, y_i)$ *из библиотеки* $V = V(t_q)$ *принадлежит ответу на запрос* $q = (t_q, x)$ *(то есть* $o_i \in J(\rho, q, V)$*) тогда и только тогда, когда*

$$t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)]. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $o_i \in V$. Тогда по определению

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow \exists t : |f(t - t_i) - x| + |f_q(t - t_q) - y_i| \leqslant \rho.$$

Обозначим: $\xi = f(t - t_i) - x$.

Тогда $o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow \exists \xi : g(\xi) = |\xi| + |f_q(f^{-1}(x+\xi) + t_i - t_q) - y_i| \leqslant \rho$.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x \geqslant 0$. Этот случай соответствует ситуации, когда объект пролетел точку x к моменту, когда запрос достиг точки y_i. Раскрывая это неравенство, получаем

$$f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i \geqslant f^{-1}(x),$$
$$t_i - t_q \leqslant f_q^{-1}(y_i) - f^{-1}(x) \leqslant f_q^{-1}(y_i + \rho) - f^{-1}(x) \leqslant F_R(x, y_i).$$

Нетрудно заметить, что в данном случае минимум $g(\xi)$ нужно искать на отрезке $[0, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$, на котором

$$g(\xi) = \xi - f_q(f^{-1}(x+\xi) + t_i - t_q) + y_i \leqslant \rho.$$

Последнее равносильно $t_i - t_q \geqslant f_q^{-1}(y_i + \xi - \rho) - f^{-1}(x+\xi)$.

Теперь покажем, что условие $\xi \in [0, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$ эквивалентно условию $\xi \in [0, \rho]$. Если $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x \leqslant \rho$, то возьмем $\xi_1 = f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x$ и, очевидно, $g(\xi_1) \leqslant \rho$, а если $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x > \rho$, то для любого $\xi_2 \in (\rho, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$ выполнено $g(\xi_2) \geqslant \xi_2 > \rho$, то есть в этом случае искомая точка минимума лежит на отрезке $[0, \rho]$.

Второй случай: $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x < 0$. Этот случай соответствует ситуации, когда запрос достиг точки y_i, а объект еще не долетел до точки x. Раскрывая это неравенство, получаем

$$f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i < f^{-1}(x),$$
$$t_i - t_q > f_q^{-1}(y_i) - f^{-1}(x) \geqslant f_q^{-1}(y_i - \rho) - f^{-1}(x) \geqslant F_L(x, y_i).$$

Нетрудно заметить, что в данном случае минимум $g(\xi)$ нужно искать на отрезке $[f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x, 0]$, на котором

$$g(\xi) = -\xi - y_i + f_q(f^{-1}(x+\xi) + t_i - t_q) \leqslant \rho.$$

Последнее равносильно $t_i - t_q \leqslant f_q^{-1}(y_i + \xi + \rho) - f^{-1}(x+\xi)$.

Аналогично первому случаю условие $\xi \in [f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x, 0]$ можно заменить на условие $\xi \in [-\rho, 0]$.

Лемма 1 доказана.

4.3. Достаточность

Пусть выполнены условия теоремы 1 и существуют некоторые функции $\psi, \psi_L, \psi_R : [0,1] \to \mathbb{R}$ такие, что выполнены условия (4), (5). Пусть Y_R, Y_L, и X_L — множества задаваемые соотношениями (1), (2) и (3) соответственно.

Заметим, что $Y_R \subseteq Y_L$ и некоторые из этих множеств могут быть пустыми. Поскольку функции $F_R(x,y)$, $F_L(x,y)$ возрастают и непрерывны по x при фиксированном y, и убывают и непрерывны по y при фиксированном x, то для множества Y_R верно, что если оно не пусто, то $Y_R = [0, \alpha_{xR}]$ для некоторого положительного α_{xR}.

Аналогично, если $Y_L \neq \varnothing$, то $Y_L = [0, \alpha_{xL}]$, и если $X_L \neq \varnothing$, то $X_L = [\alpha_{yL}, 1]$.

Пусть $\psi^*, \psi^*_R, \psi^*_L, : [0,1] \to \mathbb{R}$ — функции определяемые соотношениями (6), (7) и (8) соответственно.

По определению и свойствам 1 ψ^* не убывает на всей области определения, а ψ^*_L, ψ^*_R — не возрастают, и при этом для любого x из отрезка $[0,1]$ $\psi^*_L(x) \leqslant \psi^*_R(x)$.

Покажем, что если выполнены условия теоремы 1, то для любой пары (x, y), такой, что $F_L(x, y) > 0$, верно что

$$\psi^*(y) + \psi^*_L(x) > 0, \tag{13}$$

а для любой пары (x, y), такой, что $F_R(x, y) > 0$, верно что

$$\psi^*(y) + \psi^*_R(x) > 0. \tag{14}$$

Докажем (13). Пусть $F_L(x, y) > 0$. Возможны два случая.

1. $x \geqslant \alpha_{xL}$. Следовательно, существует $y_1 < y$, такой, что $F_L(x_1, y) \leqslant 0$. Из непрерывности и возрастания $F_L(x, y)$ по y при фиксированном x следует, что существует $y_0 \in [y_1, y]$, такой что

$$0 = F_L(x, y_0) = \psi^*_L(y_0) + \psi^*(x) < \psi^*_L(y) + \psi^*(x).$$

Последнее неравенство выполняется в силу возрастания функции $\psi_L(y)$.

2. $x < \alpha_{xL}$. Следовательно,

$$\psi^*_L(x) + \psi^*(y) = \psi^*_L(x) + F_L(0,1) \geqslant \psi^*_L(y) + \psi^*(\alpha_{xL}) > 0.$$

Последнее неравенство выполняется в силу предыдущего пункта.

Аналогично доказывается неравенство (14).

Пусть $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ — отображения, задаваемые соотношениями (9),(10) и (11) соответственно.

Покажем, что для произвольного запроса $q = (t_q, x)$ и произвольного объекта $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ выполнено

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z),$$

где $Z = \{[\varphi_1(o), \varphi_2(o)] : o \in V\}$.

По лемме 1

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)].$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть (x, y_i) такие, что $F_R(x, y_i) \leqslant 0$. Тогда по условию верно, что $F_L(x, y_i) = \psi^*(x) + \psi_1^*(y_i)$, $F_R(x, y_i) = \psi^*(x) + \psi_2^*(y_i)$, то есть

$$t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_q + \psi^*(x) \in [t_q - \psi_2^*(y_i), t_q + -psi_2^*(y_i)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z),$$

где $Z = \{[\varphi_1(o), \varphi_2(o)] : o \in V\}$.

2. Пусть (x, y_i) такие, что $F_L(x, y_i) \leqslant 0, F_R(x, y_i) > 0$. Тогда по доказанному ранее верно, что $F_L(x, y_i) = \psi^*(x) + \psi_1^*(y_i)$, $\psi^*(x) + \psi_2^*(y_i) > 0$. Поскольку $o_i \in V(t_q)$, то $t_i - t_q \leqslant 0$, и

$$t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] \Leftrightarrow t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), \psi^*(x) + \psi_2^*(y_i)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_i - t_q \in [\psi^*(x) + \psi_1^*(y_i), \psi^*(x) + \psi_2^*(y_i)] \Leftrightarrow \varphi(q) \in [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z).$$

3. Пусть (x, y) такие, что $F_L(x, y) > 0$. Тогда по доказанному раннее верно, что $\psi^*(x) + \psi_1^*(y) > 0$, $\psi^*(x) + \psi_2^*(y) > 0$. Поскольку $o_i \in V(t_q)$, то $t_i - t_q \leqslant 0$, и

$$t_i - t_q \notin [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t_i - t_q \notin [\psi^*(x) + \psi_2^*(y_i), \psi^*(x) + \psi_2^*(y_i)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q), Z).$$

Достаточность доказана.

4.4. Необходимость

Лемма 2. *Если для задачи об опасной близости (f, f_q, ρ) существует четыре объекта $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ и четыре запроса $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, такие что*

$$\begin{gathered}
V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\} = V, \\
J(\rho, q_1, V) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \\
J(\rho, q_2, V) = \{o_1, o_3\}, \\
J(\rho, q_3, V) = \{o_2, o_4\}, \\
J(\rho, q_4, V) = \{o_3, o_4\},
\end{gathered} \tag{15}$$

то задача об опасной близости (f, f_q, ρ) не может быть сведена к задаче о прокалывании.

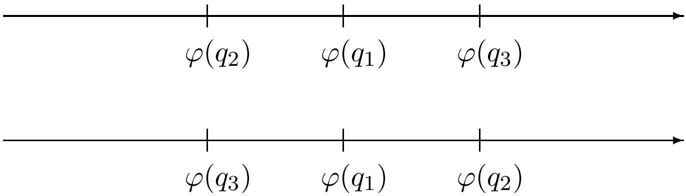

Рис. 2. Два возможных расположения точек $\varphi(o_1), \varphi(o_2), \varphi(o_3)$.

Доказательство. Пусть утверждение леммы не верно. Тогда существуют отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, такие, что для библиотеки V, любого запроса q_j, $j \in \{1,2,3,4\}$ и любого объекта o_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ верно

$$o_i \in J(\rho, q_j, V) \Leftrightarrow [\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)] \in J(\varphi(q_j), Z),$$

где $Z = \{[\varphi_1(o_i), \varphi_2(o_i)]) : i \in \{1,2,3,4\}\}$.

Так как $o_1 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_1 \in J(\rho, q_2, V)$ и $o_1 \notin J(\rho, q_3, V)$, $o_1 \notin J(\rho, q_4, V)$, то на прямой $\mathbb{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_1), \varphi_2(o_1)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_2)$ и не содержит точки $\varphi(q_3), \varphi(q_4)$.

Так как $o_2 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_2 \in J(\rho, q_3, V)$ и $o_2 \notin J(\rho, q_2, V)$, $o_2 \notin J(\rho, q_4, V)$, то на прямой $\mathbb{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_2), \varphi_2(o_2)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_3)$ и не содержит точки $\varphi(q_2), \varphi(q_4)$.

Отсюда следует, что возможны только два расположения тройки точек $\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3)$ (они показаны на рисунке 2), и при этом в обоих случаях $\varphi(q_4)$ не может лежат между $\varphi(q_2)$ и $\varphi(q_3)$.

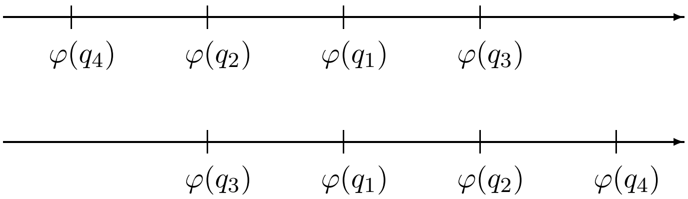

Рис. 3. Два возможных расположения точек $\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_3), \varphi(q_4)$.

Так как $o_3 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_3 \in J(\rho, q_2, V)$, $o_3 \in J(\rho, q_3, V)$ и $o_3 \notin J(\rho, q_4, V)$, то на прямой $\mathbb{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_3), \varphi_2(o_3)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_2), \varphi(q_4)$ и не содержит точки $\varphi(q_3)$. Тогда в первом случае точка $\varphi(q_4)$ должна располагаться на прямой $\mathbb{R}$ правее $\varphi(q_2)$, а во втором случае — левее $\varphi(q_2)$. Данное расположение показано на рисунке 3.

Но, так как $o_4 \in J(\rho, q_1, V)$, $o_4 \in J(\rho, q_3, V)$, $o_4 \in J(\rho, q_4, V)$ и $o_4 \notin J(\rho, q_2, V)$, то на прямой $\mathbb{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(o_4), \varphi_2(o_4)]$, который содержит только точки $\varphi(q_1), \varphi(q_3), \varphi(q_4)$ и не содержит точки $\varphi(q_2)$. На рисунке 3 видно, что такого отрезка не существует для обоих случаев.

Тем самым лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче о прокалывании, то существуют функции $\psi'_L, \psi'_R : [0,1] \to \mathbb{R}$ и функция $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ такие, что для любой пары (x, y) такой, что $F_R(x, y) \leqslant 0$*

$$F_L(x, y) = g(x, y) + \psi'_L(y),$$
$$F_R(x, y) = g(x, y) + \psi'_R(y).$$

Доказательство. Докажем утверждение для случая $F_R(x, y) < 0$. Пусть

$$\zeta(x, y) = F_R(x, y) - F_L(x, y).$$

Покажем, что $\zeta(x, y)$ зависит существенно только от y. Предположим, это не так. Тогда существует тройка (y^0, x^1, x^2), такая что $F_R(x^1, y^0) < 0$, $F_R(x^2, y^0) < 0$ и

$$\xi(x^1, y^0) > \xi(x^2, y^0).$$

Для произвольного запроса $q = (t_q, x)$ обозначим:

$$t_q{}' = t_q + F_L(x, y^0),$$
$$t_q{}'' = t_q + F_L(x, y^0).$$

Для доказательства будем использовать схему (15).

Тогда для объекта $o_i = (t_i, y^0) \in V(t_q)$ и запроса $q = (t_q, x)$ в соответствии с леммой 1 верно, что

$$o_i \in J(\rho, q, V) \Leftrightarrow t_i \in [t_q{}', t_q{}''].$$

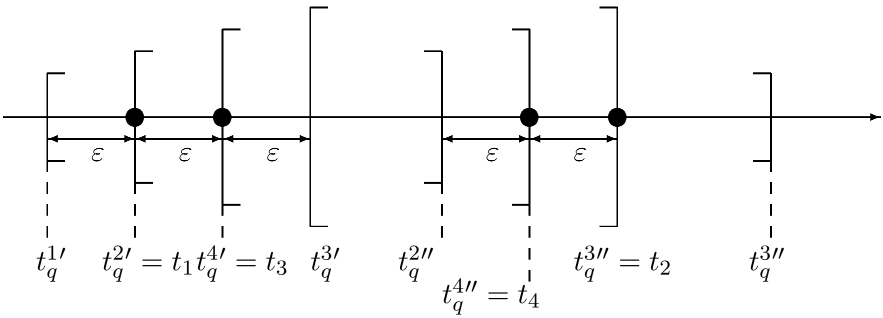

Рис. 4. Расположение моментов появления объектов и запросов

Выберем

$$\varepsilon \in \Big(0, \min\Big\{ \tfrac{\xi(x^1,y^0)-\xi(x^2,y^0)}{3}, \tfrac{\zeta(x^2,y^0)}{2}, -\tfrac{F_R(x^2,y^0)}{2}, \\ -\tfrac{F_R(x^1,y^0)}{3} + \tfrac{\xi(x^1,y^0)-\xi(x^2,y^0)}{3}, \tfrac{1}{2}(F_L(x^2, y^0) + \tau_{\max})\Big\}\Big), \quad (16)$$

и произвольное число t. Зададим запросы следующим образом

- $q_1 = (t - F_L(x^1, y^0), x^1)$,
- $q_2 = (t - F_L(x^2, y^0) + \varepsilon, x^2)$,
- $q_3 = (t - F_L(x^2, y^0) + 3\varepsilon, x^2)$,
- $q_4 = (t - F_L(x^2, y^0) + 2\varepsilon, x^2)$.

Для этих объектов

$$t_q^{1\prime} = t, t_q^{2\prime} = t + \varepsilon, t_q^{3\prime} = t + 3\varepsilon, t_q^{4\prime} = t + 2\varepsilon,$$
$$t_q^{1\prime\prime} = t + \xi(x^1, y^0), t_q^{2\prime} = t + \varepsilon + \xi(x^2, y^0), t_q^{3\prime} = t + 3\varepsilon + \xi(x^2, y^0),$$
$$t_q^{4\prime} = t + 2\varepsilon + \xi(x^2, y^0).$$

Зададим объекты следующим образом

- $o_1 = (t + \varepsilon, y^0)$,
- $o_2 = (t + 3\varepsilon + \xi(x^2, y^0), y^0)$,
- $o_3 = (t + 2\varepsilon, y^0)$,
- $o_4 = (t + 2\varepsilon + \xi(x^2, y^0), y^0)$.

Моменты $t_q^{i\prime}, t_q^{i\prime\prime}$ и o_j показаны на рис. 4.

Покажем, что $V = V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}$, то есть $t_q^j \in [t_i, t_i + \tau_{\max}]$, где $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для этого необходимо показать, что $\min\limits_{j=\overline{1,4}} t_q^j \geqslant \max\limits_{i=\overline{1,4}} t_i$ и $\max\limits_{j=\overline{1,4}} t_q^j \leqslant \min\limits_{i=\overline{1,4}} t_i + \tau_{\max}$.

- $\min\limits_{j=\overline{1,4}} t_q^j = \min\{t - F_L(x^1, y^0), t - F_L(x^2, y^0) + \varepsilon\} \geqslant \max\limits_{i=\overline{1,4}} t_i = t + 3\varepsilon + \xi(x^2, y^0)$, что равносильно $\varepsilon \leqslant \min\{-\frac{F_R(x^1,y^0)}{3} + \frac{\xi(x^1,y^0)-\xi(x^2,y^0)}{3}, \frac{-F_R(x^2,y^0)}{2}\}$ и это верно из-за выбора ε;
- $\max\limits_{j=\overline{1,4}} t_q^j = \max\{t - F_L(x^1, y^0), t - F_L(x^2, y^0) + 3\varepsilon\} \leqslant \min\limits_{i=\overline{1,4}} t_i + \tau_{\max} = t + \varepsilon\} + \tau_{\max}$, что выполнено, поскольку в силу выбора ε верно, что $\varepsilon \leqslant \frac{F_L(x^2,y^0)+\tau_{\max}}{2}$.

Используя утверждение леммы 1, покажем, что выполнено

$$J(\rho, q_1, V) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\},$$
$$J(\rho, q_2, V) = \{o_1, o_3\},$$
$$J(\rho, q_3, V) = \{o_2, o_4\},$$
$$J(\rho, q_4, V) = \{o_3, o_4\}.$$

- $o_1 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, \xi(x^1, y^0)]$, что верно, поскольку в силу (16) $\varepsilon < \xi(x^2, y^0) < \xi(x^1, y^0)$;

- $o_2 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, \xi(x^1, y^0) - \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_3 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \in [0, \xi(x^1, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \in J(\rho, q_1, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \in [-\xi(x^2, y^0), \xi(x^1, y^0) - \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_1 \in J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow F_L(x^2, y^0) \in [F_L(x^2, y^0), F_R(x^2, y^0)]$, что верно;
- $o_2 \notin J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \notin [-\xi(x^2, y^0), 0]$, что верно, так как $\varepsilon > 0$;
- $o_3 \in J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \notin J(\rho, q_2, V) \Leftrightarrow \varepsilon \notin [-\xi(x^2, y^0), 0]$, что верно в силу (16);
- $o_1 \notin J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow 2\varepsilon \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_2 \in J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow \xi(x^2, y^0) \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно;
- $o_3 \notin J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow -\varepsilon \notin [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \in J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_1 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow -\varepsilon \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_2 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [-\xi(x^2, y^0), 0]$, что верно в силу (16);
- $o_3 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16);
- $o_4 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow \xi(x^2, y^0) \in [0, \xi(x^2, y^0)]$, что верно в силу (16).

Докажем теперь утверждение для случая $F_R(x, y) = 0$. Подберем последовательность $(y_n) \to y$ такую, что $y_n < y$. Для этой последовательности получим, что $F_R(x, y_n) < 0$ и $F_R(x, y_n) \to F_R(x, y)$, $F_L(x, y_n) \to F_L(x, y)$. По доказанному верно, что $F_R(x, y_n) - F_L(x, y_n)$ зависит только от y_n. Обозначим эту функцию $\psi(y_n)$. Данная функция непрерывна, так как непрерывны функции $F_R(x, y_n)$, $F_L(x, y_n)$. Следовательно, разница $F_R(x, y) - F_L(x, y) = \psi(y)$ и также не зависит от x.

Лемма 3 доказана.

Обозначим:

$$h_{y^0, 1}(x) = F_L(x, y^1) - F_L(x, y^0).$$

Лемма 4. *Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска, то для любых $y^0, y^1 \in [0, 1]$*

таких, что $x^0 < y^1$, *функция* $h_{y^0,1}(x)$ *принимает не более двух значений для* x *из области*

$$\begin{cases} F_L(x, y^1) < 0, \\ h_{y^0,1}(x) \leqslant F_L(1,0) + \tau_{\max}. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. Сначала заметим, что $h_{y^0,1}(x) > 0$ для любого x при $y^0 < y^1$.

Предположим утверждение леммы не верно, то есть существуют $x^0, x^1, x^2 \in [0,1]$ из области (17), такие что

$$0 < h_{y^0,1}(x^0) < h_{y^0,1}(x^1) < h_{y^0,1}(x^2). \tag{18}$$

Будем использовать схему доказательства (15).

Выберем

$$\begin{gathered} \varepsilon \in (0, \min\{-F_L(x^0, y^1), -F_L(x^1, y^1), -F_L(x^1, y^0), \\ h_{y^0,y^1}(x^1) - h_{y^0,y^1}(x^0), h_{y^0,y^1}(x^2) - h_{y^0,y^1}(x^1), \\ F_R(x^1, y^0) - F_L(x^1, y^0), F_R(x^2, y^0) - F_L(x^2, y^0), \\ F_R(x^0, y^1) - F_L(x^0, y^1), F_L(x_1, y^0) + \tau_{\max}\}). \end{gathered} \tag{19}$$

Обозначим $t_2 = -F_L(x^1, y^0) + F_L(x^1, y^1) = h_{y^0,y^1}(x^1)$. Заметим, что согласно (19) $t_2 > \varepsilon > 0$.

Зададим параметры объектов и запросов следующим образом:

- $q_1 = (t_q^1, x^1) = (-F_L(x^1, y^1) + t_2 - \varepsilon, x^1) = (-F_L(x^1, y^0) - \varepsilon, x^1)$,
- $q_2 = (-F_L(x^2, y^0) - \varepsilon, x^2)$,
- $q_3 = (t_2 - F_L(x^0, y^1) - \varepsilon, x^0)$,
- $q_4 = (-F_L(x^1, y^0), x^1)$,
- $o_1 = (-\varepsilon, y^0)$,
- $o_2 = (t_2 - \varepsilon, y^1)$,
- $o_3 = (0, y^0)$,
- $o_4 = (t_2, y^1)$.

Покажем, что выполнено $V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}$.

По определению $o = (t, y) \in V(t_q)$, если $t_q \in [t, t + \tau_{\max}]$.

Таким образом, необходимо показать, что $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant 4} t_q^j \geqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4} t_i$ и $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 4} t_q^j \leqslant \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant 4} t_i + \tau_{\max}$.

1) $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 4} t_q^j \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 4} t_i \Leftrightarrow \min\{-F_L(x^1,y^0)+F_L(x^1,y^1)-F_L(x^0,y^1)-\varepsilon, -F_L(x^2,y^0)-\varepsilon, -F_L(x^1,y^0)-\varepsilon\} \geqslant F_L(x^1,y^1)-F_L(x^1,y^0)\}$, что верно в силу (19),
2) $\max\limits_j t_q^j \leqslant \min\limits_i t_i + \tau_{\max} \Leftrightarrow \max\{-F_L(x^1,y^0)+F_L(x^1,y^1)-F_L(x^0,y^1)-\varepsilon, -F_L(x^2,y^0)-\varepsilon, -F_L(x^1,y^0)\} \leqslant -\varepsilon+\tau_{\max}$, что верно в силу (19) и в силу условия 17:

$$h_{y^0,y^1}(x^1) \leqslant F_L(1,0)+\tau_{\max} \leqslant F_L(x^0,y^1)+\tau_{\max}.$$

Теперь, используя утверждение леммы 1, покажем, что

$$\begin{gathered} J(\rho,q_1,V)=\{o_1,o_2,o_3,o_4\},\\ J(\rho,q_2,V)=\{o_1,o_3\},\\ J(\rho,q_3,V)=\{o_2,o_4\},\\ J(\rho,q_4,V)=\{o_3,o_4\}. \end{gathered}$$

- $o_1 \in J(\rho,q_1,V) \Leftrightarrow t_2 \in [t_2, t_2+F_R(x^1,y^1)-F_L(x^1,y^1)]$, что верно;
- $o_2 \in J(\rho,q_1,V) \Leftrightarrow F_L(x^1,y^0) \in [F_L(x^1,y^0), F_R(x^1,y^1)]$, что верно;
- $o_3 \in J(\rho,q_1,V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, F_R(x^1,y^0)-F_L(x^1,y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_4 \in J(\rho,q_1,V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, F_R(x^1,y^1)-F_L(x^1,y^1)]$, что верно в силу (19);
- $o_1 \in J(\rho,q_2,V) \Leftrightarrow F_L(x^2,y^0) \in [F_L(x^2,y^0), F_L(x^2,y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_2 \notin J(\rho,q_2,V) \Leftrightarrow h_{y^0,y^1}(x^1) \notin [h_{y^0,y^1}(x^2), h_{y^0,y^1}(x^1)+F_R(x^2,y^0)-F_L(x^2,y^0)]$, что верно, поскольку $h_{y^0,y^1}(x^2) > h_{y^0,y^1}(x^1)$;
- $o_3 \in J(\rho,q_2,V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, F_R(x^2,y^0)-F_L(x^2,y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_4 \notin J(\rho,q_2,V) \Leftrightarrow h_{y^0,y^1}(x^1)+\varepsilon \notin [h_{y^0,y^1}(x^2), h_{y^0,y^1}(x^1)+F_R(x^2,y^0)-F_L(x^2,y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_1 \notin J(\rho,q_3,V) \Leftrightarrow -h_{y^0,y^1}(x^1) \notin [-h_{y^0,y^1}(x^0), -h_{y^0,y^1}(x^0)+F_R(x^0,y^0)-F_L(x^0,y^0)]$, что верно, поскольку $h_{y^0,y^1}(x^1) > h_{y^0,y^1}(x^0)$;
- $o_2 \in J(\rho,q_3,V) \Leftrightarrow 0 \in [0, F_R(x^0,y^1)-F_L(x^0,y^1)]$, что верно;

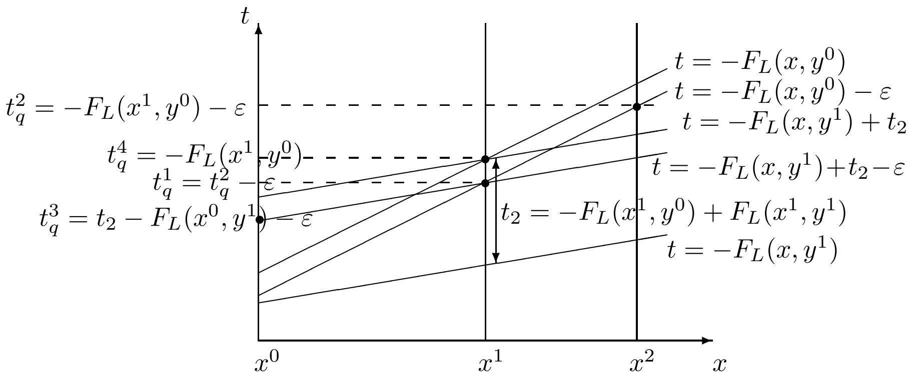

Рис. 5. Расположение моментов появления объектов и запросов для случая $x^0 < x^1 < x^2$

- $o_3 \notin J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow -h_{y^0,y^1}(x^1) + \varepsilon \in [-h_{y^0,y^1}(x^0), -h_{y^0,y^1}(x^0) + F_R(x^0, y^0) - F_L(x^0, y^0)]$, что верно в силу (19);
- $o_4 \in J(\rho, q_3, V) \Leftrightarrow \varepsilon \in [0, F_R(x^0, y^1) - F_L(x^0, y^1)]$, что верно;
- $o_1 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow -\varepsilon \notin [0, F_R(x^1, y^0) - F_L(x^1, y^0)]$, что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;
- $o_2 \notin J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow -\varepsilon \notin [0, F_R(x^1, y^1) - F_L(x^1, y^1)]$, что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;
- $o_3 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, F_R(x^1, y^0) - F_L(x^1, y^0)]$, что верно;
- $o_4 \in J(\rho, q_4, V) \Leftrightarrow 0 \in [0, F_R(x^1, y^1) - F_L(x^1, y^1)]$, что верно.

Отсюда согласно лемме 1 получаем справедливость утверждения леммы 4. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим теперь графическую интерпретацию доказательства леммы 4. Вспомним, что по основной лемме 1 объект $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ принадлежит ответу на запрос $q = (t_q, x)$ (то есть $o_i \in J(\rho, q, V)$) тогда и только тогда, когда $t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)]$. Рассмотрим двумерный график на рисунке 5. На оси абсцисс будем откладывать координаты появления запросов, а на оси ординат — моменты появления запросов. Таким образом, каждому запросу $q_j = (t_q^j, x^j)$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ будет соответствовать точка с координатой x^j по оси абсцисс и координатой t_q^j по оси ординат. На рис. 5 изображены данные точки для случая $x^0 < x^1 < x^2$.

Каждому объекту (t_i, y_i) в данных координатах поставим в соответствие две функции $t_L(x) = t_i - F_R(x, y_i)$ и $t_R(x) = t_i - F_L(x, y_i)$. Таким образом, по основной лемме объект (t_i, y_i) попадет в ответ на те запросы, которым соответствуют точки, лежащие между линиями $t_L(x)$ и $t_R(x)$ (либо на самих линиях).

На рис. 5 для удобства изображены только «верхние» функции, соответствующие объектам o_1, o_2, o_3 и o_4, в виде прямых. Из рисунка 5 видно, что

$$\begin{aligned} J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \\ J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) &= \{o_2, o_4\}, \\ J(\rho, q_4, V) &= \{o_3, o_4\}. \end{aligned}$$

Пусть как и раньше

$$\Delta = F_L(1, 0) + \tau_{\max}.$$

Лемма 5. *Существует число $\delta_1 > 0$, такое, что для любых $x, y \in [0, 1]$*

$$F_L(x, y + \delta_1) - F_L(x, y) < \Delta.$$

Справедливость данной леммы следует из непрерывности $F_L(x, y)$ по x и по y внутри квадрата $[-\rho, 1 + \rho]^2$.

Лемма 6. *Если δ_1 — число, существование которого доказывается леммой 5, то для любой пары $(x, y) \in [0, 1]^2$ такой, что $F_L(x, y) \leqslant 0$ и для любого $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ верно, что*

$$h_{y+\delta_2, y}(y) = h_{y+\delta_2, y}(1).$$

Доказательство. Сначала докажем, что утверждение верно для пары (x_1, y_1) такой, что $F_L(x_1, y_1) < 0$.

Для $x_1 = 1$ утверждение очевидно. Пусть $x_1 < 1$.

Допустим противное:

$$h_{y+\delta_2,y}(x) \neq h_{y+\delta_2,y}(1).$$

Поскольку $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, то по лемме 5 $h_{y+\delta_2,y}(y) = F_L(x, y_1 + \delta) - F_L(x, y_1) < \Delta$ и, значит, по лемме 4 $h_{y,y+\delta_2}(x)$ на отрезке $[0, 1]$ может принимать не более двух различных значений. По предположению одно из этих значений равно $h_{y+\delta_2,y}(x_1)$, а другое — $h_{y+\delta_2,y}(0)$.

Построим две бесконечные последовательности (x_n^0) и (x_n^1), такие, что $h_{y+\delta_2,y}(x_n^0) = h_{y+\delta_2,y}(0)$, $h_{y+\delta_2,y}(x_n^1) = h_{y+\delta_2,y}(x_1)$.

На первом шаге отнесем к первой последовательности 0, а ко второй — x_1, то есть $x_1^0 = 1$, $x_1^1 = x_1$.

На втором шаге рассмотрим $x_2 = \frac{|x_1^0 - x_1^1|}{2}$. Если $h_{y+\delta_2,y}(x_2) = h_{y+\delta_2,y}(0)$, то $x_2^0 = y_2$, $x_2^1 = y_1$, а если $h_{y+\delta_2,y}(x_2) = h_{y+\delta_2,y}(x_1)$, то $x_2^0 = x_0$, $x_2^1 = x_2$.

На k-ом шаге рассмотрим $x_k = \frac{|x_{k-1}^0 - x_{k-1}^1|}{2}$. Если $h_{y+\delta_2,y}(x_k) = h_{y+\delta_2,y}(0)$, то $x_k^0 = x_k$, $x_k^1 = x_{k-1}^1$, а если $h_{y+\delta_2,y}(x_k) = h_{y+\delta_2,y}(x_1)$, то $x_k^0 = x_{k-1}^0$, $x_k^1 = x_k$.

Таким образом получаем, что все три последовательности (x_n^0), (x_n^1) и $(x_n^0) \cup (x_n^1)$ имеют единственную предельную точку, одинаковую для всех трех последовательностей, то есть все три последовательности сходятся к одному пределу. Обозначим этот предел x_*.

Функция $h_{y+\delta_2,y}(x)$ непрерывна и

$$h_{y+\delta_2,y}(x_*) = h_{y+\delta_2,y}(\lim_{n\to\infty} x_n^0) = \lim_{n\to\infty} h_{y+\delta_2,y}(x_n^0) = h_{y+\delta_2,y}(1).$$

Аналогично,

$$h_{y+\delta_2,y}(x_*) = h_{y+\delta_2,y}(\lim_{n\to\infty} x_n^1) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} h_{y+\delta_2,y}(x_n^1) = h_{y+\delta_2,y}(x_1) \neq h_{y+\delta_2,y}(1).$$

Противоречие.

Покажем теперь, что для пары (x, y), такой, что $F_L(x, y) = 0$ также верно утверждение леммы. Возьмем произвольную последовательность $(yx_n) \to x$, $x_n > x$ для любого n. Так как $F_L(x_n, y) < 0$, то по только что доказанному для любой пары (x_n, y) верно утверждение леммы. Функция $F_L(x, y)$ непрерывна по x, следовательно утверждение верно и для пары (x, y).

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче о прокалывании, то для любой пары (x, y) такой, что $F_L(x, y) \leqslant 0$ верно, что*

$$F_L(x, y) = F_L(1, y) + F_L(x, 0) - F_L(1, 0).$$

Доказательство. Для произвольной пары $(x, y) \in [0, 1]^2$, такой, что $F_L(x, y) \leqslant 0$ обозначим:

$$k = \left]\frac{y}{\delta_1}\right[,$$
$$\delta_0 = \frac{y}{k} \leqslant \delta_1.$$

Здесь δ_1 — число из формулировки леммы 5, $]a[$ — наименьшее целое, не меньшее чем a.

Напишем следующую цепочку равенств, верных по лемме 6:

$$h_{y,y-\delta_2}(x) = h_{y,y-\delta_2}(1),$$
$$h_{y,y-2\delta_2}(x) = h_{y,y-2\delta_2}(1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$h_{y+k\delta_2,y+(k-1)\delta_2}(x) = h_{y+k\delta_2,y+(k-1)\delta_2}(1).$$

Данная цепочка равенств равносильна следующей цепочке равенств:

$$F_L(x, y - \delta_2) - F_L(1, y - \delta_2) = F_L(x, y) - F_L(1, y),$$
$$F_L(x, y - 2\delta_2) - F_L(1, y - 2\delta_2) = F_L(x, y - \delta_2) - F_L(1, y - \delta_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_L(x, y - k\delta_2) - F_L(1, y - k\delta_2) = \\ = F_L(x, y - (k-1)\delta_2) - F_L(1, y - (k-1)\delta_2).$$

По определению δ_0

$$F_L(x, y - k\delta_2) - F_L(1, y - k\delta_2) = F_L(x, 0) - F_L(1, 0).$$

Таким образом , получаем, что

$$F_L(x, y) - F_L(1, y) = F_L(x, 0) - F_L(1, 0),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство необходимости.

Пусть $\psi(x) = F_L(x, 0) - F_L(1, 0)$, $\psi_L(y) = F_L(1, y)$.

Тогда по лемме 7

$$F_L(x, y) = \psi(x) + \psi_L(y).$$

По лемме 3 $F_R(x, y) = F_L(x, y) + \psi'_R(y) - \psi'_L(y)$.

Обозначим $\psi_R(y) = \psi'_R(y) - \psi'_L(y) + \psi_L(y)$.

Тогда

$$F_R(x, y) = \psi(x) + \psi_R(y).$$

Необходимость доказана.

Список литературы

[1] Guttman A. R-Trees: A Dynamic Index Structure for Spatial Searching // Proceedings of the 1984 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. 1984. P. 47–57.

[2] Korn F., Sidiropoulos N., Faloutsos C., Siegel E., Protopapas Z. Fast nearest neighbor search in medical image databases // Proceedings of International Conference on Very Large Database. Mumbai, India, 1996.

[3] Roussopoulos N., Kelley S., Vincent F. Nearest neighbor queries // Proceedings of ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. San Jose, USA, 1995.

[4] Beckmann N., Kriegel H.-P., Schneider R., Seeger B. The R*-Tree: An Efficient and Robust Access Method for Points and Rectangles // Proceedings of the 1990 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. 1990. P. 322–331.

[5] Cheung K. L., Fu A. W. Enhanced Nearest Neighbour Search on the R-tree // SIGMOD Record. 27 (3). 1998. P. 16–21.

[6] Benetis R., Jensen C. S., Karciauskas G., Saltenis S. Nearest and Reverse Nearest Neighbor Queries for Moving Objects // The VLDB Journal. 2002. P. 229–249.

[7] Song Z., Roussopoulos N. K-Nearest Neighbor Search for Moving Query Point // Proceedings of the 7th International Symposium on Spatial and Temporal Databases. 2001. P. 79–96.

[8] Seidl T., Kriegel H. Optimal multi-step k-nearest neighbor search // Proceedings of ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. Seattle, USA, 1998.

[9] Tao Y., Papadias D., Shen Q. Continuous Nearest Neighbor Search // VLDB. 2002.

[10] Gedik B., Liu L. MobiEyes: A distributed location monitoring service using moving location queries // IEEE TMC. 5 (10). 2006. P. 1384–1402.

[11] Atallah M. Dynamic Computational Geometry // Proc. 24th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci. 1983.

[12] Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б. Теория хранения и поиска информации. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[13] Лапшов И. С. Динамические базы данных с оптимальной по порядку временной сложностью // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 89–100.

[14] Arge L., Jeffrey S. Vitter Optimal Dynamic Interval Management in External Memory // FOCS'96 Proceedings of the 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science.

[15] Kanellakis P. C., Ramaswamy S., Vengroff D. E., Vitter J. S. Indexing for data models with constraints and classes // Proceeding PODS'93 Proceedings of the twelfth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of database systems.

[16] Скиба Е. А. Логарифмическое решение задачи об опасной близости // Интеллектуальные системы. 2007. Т. 11, вып. 1–4. С. 693–719.

[17] Снегова Е. А. Случай задачи об опасной близости, сводящийся к одномерному интервальному поиску // Интеллектуальные системы. 2009. Т. 13, вып. 1–4. С. 97–118.

[18] Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М., 2001.