# Конструирование движущихся изображений клеточными автоматами

Е. Е. Титова

В работе рассматривается задача конструирования движущихся изображений клеточным автоматом на экране, представляющем из себя конечную либо бесконечную полосы. Найдены алгоритмы построения движущихся изображений для некоторых классов изображений. Показано, что для любого бесконечного экрана существует закон движения, не реализуемый на этом экране.

**Ключевые слова:** клеточный автомат, бесконечный экран, универсальный экран, конструирование движущихся изображений, автономное движение, скорость движения.

## 1. Введение

В работе рассматривается клеточный автомат, представляющий собой однородную структуру [1, 2], заданную на конечной либо на бесконечной в одну сторону полосе. Некоторая часть состояний автоматами названа метками и интерпретируется как черные точки изображения, черные точки изображения мы будем также называть просто точками изображения. Остальные состояния автомата интерпретируются как белые точки изображения. Левый вход первого автомата полосы называется управляющим и через него подаются управляющие воздействия, позволяющие конструировать изображения в данной однородной структуре, называемой экраном. При этом если экран конечный, то правый вход последнего автомата не изменяется и всегда равен нулю.

Ранее, в [3] и [4] исследовались способы и условия построения стационарных изображений на экране.

В данной статье исследуются движения изображений на экране. Показано, что для любого натурального $k$ существует такой клеточный автомат, что для любого натурального $m$ и любого изображения, состоящего из не более чем $k$ точек, на экране из $m$ таких клеточных автоматов можно так подобрать управляющие воздействия, что данное изображение будет двигаться на данном экране по любому наперед заданному закону движения.

В работе также исследуются движения одноточечного изображения на бесконечном экране. Показано, что для любого бесконечного экрана существует закон движения, который нельзя реализовать на данном экране. Рассматриваются также автономные бесконечные экраны. Это такие экраны, что на управляющий вход, начиная с какого-то момента, подаются только нули (то есть воздействие не производится). Для автономных экранов исследуются скорости движения изображений. Под скоростью движения одноточечного изображения понимается предел отношения позиции точки на экране к текущему моменту времени. Таким образом, максимальной скоростью является 1, это когда точка в каждый момент сдвигается на 1 вправо, а минимальная скорость равна нулю, когда точка начиная с некоторого момента перестает двигаться. Показано, что для любого рационального числа $v$ из отрезка $[0, 1]$ существует такой автономный экран, что точка на нем будет двигаться со скоростью $v$. Более того показано, что существует такой автономный экран, что точка на нем будет двигаться по такому закону, что для любого вещественного числа $v$ из отрезка $[0, 1]$ существует такая подпоследовательность моментов времени, что если взять предел по этой подпоследовательности, то точка будет двигаться со скоростью $v$, то есть на этом экране одновременно реализуются все возможные скорости движения.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

## 2. Основные понятия и формулировка результатов

Рассмотрим *экран*, представляющий из себя конечную последовательность из $m$ одинаковых элементарных автоматов $A$ с двумя входами. Входы автомата $A$ называются левым и правым и ими соответственно являются состояния левого и правого соседа. Правый вход последнего $m$-го автомата доопределяется как тождественный ноль, а левый вход первого автомата называется свободным и подключен к выходу управляющего автомата $A_e$. При этом функцию переходов состояний автомата $A$ обозначим через $\varphi(l, q, r)$, где $q$ — текущее состояние автомата, $l, r$ — состояния его левого и правого соседей соответственно. Положим для любого экрана выполнено свойство $\varphi(0, 0, 0) = 0$. Через $S(A, m)$ будем обозначать экран длины $m$ с элементарным автоматом $A$. Через $Q(S)$ будем обозначать мощность множества состояний элементарного автомата экрана $S$. Тройку $G = \langle A_e, A, m\rangle$ будем называть *генератором.* Среди состояний элементарного автомата выделим непустое подмножество $L$, не содержащее элемент 0, и элементы этого множества будем называть *метками.*

*Изображением* будем называть слово в алфавите $\{0, 1\}$, начинающееся и заканчивающееся единицей. Длиной слова $A$ будем называть количество букв в слове $A$ и обозначать $|A|$. Если изображение имеет длину 1, то будем называть его *точкой* и обозначать через $I^1$, то есть $I^1$ — слово, состоящее из одной буквы 1. Для произвольного изображения $I$ ненулевые буквы изображения будем называть *точками.* Также *точками* будем называть метки на экране.

*Законом движения $F$ для экрана* $S(A, m)$ будем называть слово в алфавите $\{0, 1\}$, которое заканчивается единицей и содержит ровно $m$ единиц. Множество всех законов движения для экрана $S(A, m)$ будем обозначать через $\mathcal{F}_m$.

Будем говорить, что *на экране* $S(A, m)$ *реализуется движение изображения* $I^1$ *по закону* $F$ из $\mathcal{F}_m$, если выполняются следующие условия:

1) в некоторый момент времени в самой левой ячейке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток), этот момент будем называть *моментом начала движения* или *началом движения*;

2) изменение позиции метки на экране в $i$-й момент от начала движения ($1 < i \leqslant |F|$) соответствует $i$-й букве в слове $F$, а именно, если $F(i) = 0$, то в $(i + 1)$-й момент метка остается в той же ячейке, где была в текущий момент, если $F(i) = 1$, то в $(i+1)$-й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, по сравнению со своим текущим положением;

3) в каждый момент времени после начала движения и до $|F|$-го такта от начала движения (этот момент называем *моментом окончания движения*) на экране есть ровно одна метка.

Понятно, что поскольку в законе движения $F$ ровно $m$ единиц и $F$ заканчивается на единицу, то после окончания движения на экране не будет ни одной метки.

Если $S(A, m)$ — экран, $I$ — изображение, содержащее $l$ единиц, причем $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_l = |I|$ — позиции единиц, считая слева направо и $F \in \mathcal{F}_m$ — закон движения, то будем говорить, что на экране $S$ реализуется движение изображения $I$ по закону $F$, если выполнены следующие условия:

1) до некоторого момента $t^*$ на экране нет ни одной метки, а в момент $t^*$ появляется точка, которая далее движется по закону $F$, при этом когда мы говорим, что точка движется по закону $F$, предполагаем, что пункт 3) определения движения точки может не выполняться, поскольку на экране могут двигать сразу несколько точек изображения (здесь $t^*$ — *момент начала движения*, а появившаяся точка — это последняя точка изображения, то есть находящаяся в позиции $i_l = |I|$);
2) в момент $t^* + i_l - i_k, 1 \leqslant k < l$ на экране появляется $k$-я точка изображения (то есть находящаяся в позиции $i_k$), которая далее движется по закону $F$;
3) в каждый момент времени после начала движения $l$-й точки изображения до окончания движения первой точки изображения на экране не более $l$ меток.

Экран $S(A, m)$ будем называть *универсальным для изображения $I$ и множества законов движения $\mathcal{F}$*, если существует такой управляющий автомат $A_e$, что генератор $G = \langle A_e, A, m\rangle$ формирует на экране изображение $I$, движущееся по любому наперед заданному закону движения $F$ из $\mathcal{F}$. Множество всех таких экранов будем обозначать через $\mathcal{U}(I, \mathcal{F}, m)$.

Экран $S(A, m)$ будем называть *универсальным для изображения $I$*, если он является универсальным для изображения $I$ и множества $\mathcal{F}_m$ всех законов движения для экрана $S$.

Если $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_m$, то обозначим $Q(I, \mathcal{F}, m) = \min_{S \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F}, m)} Q(S)$, $Q(I, m) = Q(I, \mathcal{F}_m, m)$.

Через $\mathcal{F}^{r,d}$ обозначим множество таких законов движения $F$, в которых начиная с момента $d+1$ не встречается более чем $r$ единиц подряд, $r, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Законы движения из $\mathcal{F}^{r,d}$ будем назвать *законами движения с ограниченной скоростью с параметром* $r$, $r \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{F}^{r,0}$ — множество законов движения, в которых не встречается более чем $r$ единиц подряд.

**Утверждение 1.** *Если $m \geqslant 2, m \in \mathbb{N}$, то $Q(I^1, \mathcal{F}^{1,0}, m) = 4$.*

**Теорема 1.** *Для любого натурального $k$ существует такой элементарный автомат $A$ с $7^k$ состояниями, что для любого натурального $m$ экран $S(A, m)$ является универсальным для любого изображения $I$, состоящего из не более чем $k$ точек.*

**Следствие 1.** *Если $m \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant 2$, то $4 \leqslant Q(I^1, m) \leqslant 7$.*

Если на изображения наложить некоторые ограничения, то можно построить более дешевые универсальные экраны. Приведем несколько таких примеров.

Изображение вида $I^1_{seg} = 1^k$ для натурального $k > 1$ будем называть отрезком длины $k$.

**Утверждение 2.** *Если $k, m \geqslant 2, k, m \in \mathbb{N}$ и $I^1_{seg} = 1^k$, то*

$$Q(I^1_{seg}, \mathcal{F}^{1,0}, m) \leqslant 12.$$

Через $\mathcal{F}^{r,d,h}$ обозначим множество таких законов движения $F$, в которых начиная с момента $d+1$ не встречается более чем $r$ единиц подряд, и не встречается более чем $h$ нулей подряд $r, d, h \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathcal{I}^k$ множество изображений, состоящих из $k$ точек, позиции которых в изображении равны соответственно $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и удовлетворяют условию $i_j - i_{j-1} \geqslant j+1$ для любого $j$, $2 \leqslant j \leqslant k$.

**Утверждение 3.** *Для любых натуральных $k, m \geqslant 2$ и любого изображения $I$ из $\mathcal{I}^k$, такого, что $s = |I| + k \geqslant k^2/2 + 3k/2$, выполнено*

$$Q(I, \mathcal{F}^{1,0} \setminus \mathcal{F}^{1,0,s-1}, m) \leqslant 9.$$

Обозначим через $\mathcal{I}^k_{seg}$ множество изображений, состоящих из $k$ отрезков, $k \in \mathbb{N}$ с координатами левых концов, $1 = l_1 < l_2 < \ldots < l_k$, и с координатами правых концов, $1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_k$, таких, что $l_j - l_{j-1} \geqslant j+1$ и $r_j - r_{j-1} \geqslant j+1$ для любого $j$, $2 \leqslant j \leqslant k$.

**Утверждение 4.** *Для любых натуральных $k, m \geqslant 2$ и любого изображения $I$ из $\mathcal{I}^k_{seg}$, такого, что $s = |I| + k \geqslant k^2/2 + 3k/2$, выполнено*

$$Q(I, \mathcal{F}^{1,0} \setminus \mathcal{F}^{1,0,s-1}, m) \leqslant 50.$$

Через $S(A)$ будем обозначать бесконечный в одну сторону (вправо) экран.

*Законом движения для бесконечного экрана* будем называть сверхслово $F \in \{0,1\}^\infty$.

Будем говорить, что *на экране $S(A)$ реализуется движение изображения $I^1$ по закону $F$*, если выполняются следующие условия:

1) в некоторый момент времени в самой левой ячейке экрана появляется метка (до этого на экране нет меток), этот момент будем называть *моментом начала движения* или *началом движения*;
2) изменение позиции метки на экране в $i$-й момент от начала движения соответствует $i$-й букве в сверхслове $F$, а именно, если $F(i) = 0$, то в $(i+1)$-й момент метка остается в той же ячейке, где была в текущий момент, если $F(i) = 1$, то в $(i+1)$-й момент метка сдвинется на одну ячейку вправо, по сравнению со своим текущим положением;
3) в каждый момент времени после начала движения на экране есть ровно одна метка.

Экран $S(A)$ будем называть *универсальным для изображения $I^1$ и множества законов движения $\mathcal{F}$*, если существует такой управляющий автомат $A_e$, что генератор $G = \langle A_e, A, \infty\rangle$ формирует на экране изображение $I^1$, движущееся по любому наперед заданному закону движения $F$ из $\mathcal{F}$. Множество всех таких экранов будем обозначать через $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

Если $\mathcal{F} \subseteq \{0,1\}^\infty$, то обозначим $Q(\mathcal{F}) = \min_{S \in \mathcal{U}(\mathcal{F})} Q(S)$.

**Теорема 2.** *Для любого бесконечного экрана $S(A)$ существует такой закон движения $F \in \{0,1\}^\infty$, что на экране $S(A)$ невозможно реализовать движение изображения $I^1$ по закону $F$.*

Как и ранее через $\mathcal{F}^{r,d}$ обозначим множество таких законов движения $F$ (но теперь уже сверхслов), в которых начиная с момента $d+1$ не встречается более чем $r$ единиц подряд, $r, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Утверждение 5.** *Если $s, d \in \mathbb{N}$, то имеют место следующие оценки*

$$3 \leqslant Q(\mathcal{F}^{s,0}) \leqslant 2s+2;$$
$$3 \leqslant Q(\mathcal{F}^{s,d}) \leqslant 2s+9.$$

Движение изображения на экране будем называть *автономным*, если начиная с некоторого момента $t \in \mathbb{N}$, $t < \infty$ на свободный вход экрана не поступает ненулевых значений.

Обозначим $\nu_F(t)$ — количество единиц в префиксе длины $t$ закона движения $F$.

Если для закона движения $F$ существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\nu_F(t)}{t}$, то будем называть его *скоростью движения точки по закону $F$* и обозначать через $v(F)$.

**Теорема 3.** *Для любого рационального числа $a$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, существует непериодический закон $F_a$, такой что $v(F_a) = a$ и $\mathcal{U}(\{F_a\}) \neq \varnothing$.*

Скажем, что в *законе движения $F$ реализуется скорость $v \in \mathbb{R}$*, если существует такая бесконечная возрастающая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \in \mathbb{N}$, что $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\nu_F(t_i)}{t_i} = v$.

**Теорема 4.** *Существует бесконечный экран $S(A)$, на котором реализуется такой закон движения $F$ изображения $I^1$, что в $F$ реализуются все скорости $v$ из отрезка $[0, 1]$.*

**Следствие 2.** *Существует автономный бесконечный экран, реализующий для изображения $I^1$ закон движения с растущим числом идущих подряд нулей и растущим числом идущих подряд единиц.*

## 3. Движение точки на конечном экране

Данный раздел посвящен движению одной точки на конечном экране.

**Лемма 1.** *Если $m \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant 2$, то $Q(I^1, \mathcal{F}_m, m) > 3$.*

**Доказательство.** Будем доказывать утверждение от противного. Пусть $S(A,m)$ — экран, удовлетворяющий условию леммы и пусть $A$ — его элементарный автомат, причем $Q(A) = 2$. Пусть тогда для определенности $Q = \{0,1\}$, $1 \in L, 0 \in Q \setminus L$ и $\mathcal{A}_e$ — управляющий автомат, такой, что для любого $m \in \mathbb{N}$ генератор $\langle \mathcal{A}_e, A, m\rangle$ формирует на экране изображение, состоящее из одной точки, которое движется по закону $F \in \mathcal{F}^{1,0}$.

Поскольку $\varphi(0,0,0) = 0$ и существует момент, когда на экране появится метка, то $\varphi(1,0,0) = 1$. Но это означает, что в каждый следующим момент в соседней справа от метки клетке будет появляться метка, то есть изображение всегда будет двигаться по закону $F = 1^m$, что противоречит нашему предположению.

Предположим теперь, что $Q(A) = 3$, $Q = \{0,1,2\}$, пусть $1 \in L, 0 \in Q \setminus L$ и пусть $\mathcal{A}_e^F$ — управляющий автомат, такой что для любого $m \in \mathbb{N}$ генератор $\langle \mathcal{A}_e, A, m\rangle$ формирует на экране изображение, состоящее из одной точки, которое движется по закону $F \in \mathcal{F}^{1,0}$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $2 \in L$. Тогда $\{\varphi(1,0,0), \varphi(2,0,0)\} = \{0,a\}$, где $a$ — метка. Иначе метка либо никогда не появится на экране (если $\{\varphi(1,0,0), \varphi(2,0,0)\} = \{0\}$), либо появится и будет двигаться по закону $F = 1^m$ (если $\{\varphi(1,0,0), \varphi(2,0,0)\} = \{a,b\}$, где $a$ и $b$ — метки, возможно $a = b$). Без ограничения общности будем считать $\varphi(1,0,0) = 0, \varphi(2,0,0) = a$.

Если $\varphi(2,0,0) = 2$, то как только на экране появится метка, каждый такт она будет двигаться на одну клетку вправо, то есть будет двигаться по закону $F = 1^m$, что противоречит нашему предположению, значит, $\varphi(2,0,0) = 1$.

Рассмотрим, чему равно значение $\varphi(0,1,0)$.

Если $\varphi(0,1,0) = 0$, то изображение исчезает, чего не может быть по определению, поскольку после начала движения и до конца движения на экране всегда есть ровно одна метка.

Если $\varphi(0,1,0) = 1$, то метка на экране никогда не поменяет своего положения.

Если $\varphi(0,1,0) = 2$, то на экране реализуется движение изображения только по закону $1(01)^m$, и не реализуются другие законы движения.

Значит, в случае $2 \in L$ наше предположение неверно и $Q(A) > 3$.

2. Пусть теперь $2 \in Q \setminus L$ и пусть изображения строятся с предобработкой, то есть к моменту появления первой метки конфигурация на экране состоит из элементов множества $Q \setminus L = \{0, 2\}$. Значит существует конфигурация $(1, a, b), a, b \in \{0, 2\}$, такая что $\varphi(1, a, b) = 1$. Но это означает, что как только на экране появляется одна метка, появление следующих меток полностью определяется конфигурацией из нулей и двоек на экране, заданной во время предобработки. Поскольку таких конфигураций конечное число, то и законов движения, реализуемых с их помощью, будет конечное число, что противоречит предположению.

**Утверждение 6.** *Если $m \geqslant 2, m \in \mathbb{N}$, то $Q(I^1, \mathcal{F}^{1,0}, m) = 4$.*

**Доказательство.**

В лемме 1 было доказано неравенство $Q(I^1, \mathcal{F}_{I^1,m}, m) > 3$. Построим экран $S(A, m)$, для которого $Q(A) = 4$. Для элементарного автомата этого экрана входной и выходной алфавиты и множество состояний равны $E_3$. Функция переходов имеет следующий вид:

$\varphi(3, 0, 0) = 1$,

$\varphi(a, b, c) = a$ для любого $a, b \in \{0, 2\}, c \in E_3$,

$\varphi(2, 1, 0) = 3$,

$\varphi(a, 3, 0) = a$, для любого $a \in \{0, 2\}$,

в остальных случаях $\varphi(a, b, c) = b$, $a, b, c \in E_3$.

Множество меток положим $L = \{1, 3\}$. Метка 1 остается без изменения до тех пор, пока соседний слева автомат не примет состояние 2. В этом случае она меняется на метку 3. Метка 3 исчезает в следующий такт, одновременно с этим справа от нее появляется метка 1. Сигнал 2 является вспомогательным сигналом, он сам движется со скоростью 1. Фактически этот сигнал дает метке команду в следующий такт передвинуться на одну клетку вправо. Движущий сигнал 2 можно подавать с любой частотой, тем самым двигая точку по любому наперед заданному закону движения $F \in \mathcal{F}^1$.

**Лемма 2.** *Существует такой элементарный автомат $A$ с 7 состояниями, что для любого натурального $m$ экран $S(A, m)$ является универсальным для изображения $I^1$.*

**Доказательство.** Чтобы получить алгоритм, который строит точку, движущуюся по любому наперед заданному закону движения, модифицируем алгоритм из доказательства утверждения 6.

В функции переходов состояний заменим равенство $\varphi(3,0,0) = 1$ равенством $\varphi(3,0,0) = 3$. Таким образом каждый такт метка будет двигаться на одну клетку вправо.

Введем специальное стоп-состояние $s$, которое останавливает движение метки 3, если метка оказывается слева клетки, находящейся в стоп-состоянии. При этом метка 3 исчезает, а стоп-состояние переходит в метку 1 из доказательства утверждения 6.

Таким образом, используя движущие сигналы, мы можем заставить метку двигаться, а используя стоп-сигналы — остановиться.

Остается предварительно расставить стоп-состояния, останавливающие движение со скоростью 1.

Расставим стоп-состояния с помощью следующего алгоритма. Пусть $Q' = \{0, s, 5, 6\}$, где $s$ — стоп-состояние. Зададим функцию переходов:

$\varphi(l, 6, r) = l$ для любого $l, r \in Q'$,
$\varphi(l, 5, r) = l$ для любого $l, r \in Q'$,
$\varphi(5, q, 5) = 5$ для любого $q \in Q'$,
$\varphi(5, q, 6) = 5$ для любого $q \in Q'$,
$\varphi(6, q, r) = 6$ для любого $q \in Q'$,
$\varphi(l, q, r) = q$ в остальных случаях.

Допустим, мы хотим расставить на экране стоп-состояния на те же места, что и в слове $i_1, i_2, \ldots, i_m$, где $i_j \in \{0, s\}$ при $1 \geqslant j \geqslant m$. Запустим сначала состояние 6, которое каждый такт будет двигаться вправо на одну клетку. Далее, будем подавать на вход слово $i_m 5 i_{m-1} 5 \ldots i_2 5 i_1$. Пока на экране будет оставаться состояние 6, все слово будет двигаться вправо на одну клетку каждый такт. Как только состояние 6 дойдет до границы экрана и исчезнет, $i_m$ и следующая за ней пятерка перестанут двигаться вправо, при этом состояние $i_m$ примет последняя $m$-я ячейка экрана. В следующий такт $(m-1)$-я ячейка примет состояние $i_{m-1}$ и так далее все слово $i_1, i_2, \ldots, i_m$ восстановится на экране. На это потребуется $2m$ тактов: $m$ тактов нужно, чтобы состояние 6 дошло до последней ячейки экрана. Далее каждый такт одно состояние $i_j$ доходит до своей позиции и останавливается, то есть, чтобы все значения заняли свои позиции, нужно еще $m$ тактов.

Итак, произвольный закон движения реализуем следующим образом. Сначала расставим стоп-сигналы. Затем запустим метку 3, которая движется вперед (вправо) до тех пор, пока не встретит стоп-сигнал. Когда 3 встречает стоп-сигнал, состояние 3 исчезает, а стоп-сигнал переходит в состояние 1, которое также является меткой. Состояние 1 остается на месте. Чтобы сдвинуть это состояние, пошлем к нему сигнал 2. Когда он достигнет метки 1, метка превратится в метку 3, которая снова будет двигаться до тех пор, пока не встретит стоп-сигнал.

Итак, множество состояний построенного автомата следующее $Q = \{0, 1, 2, 3, s, 5, 6\}$, $L = \{1, 3\}$, то есть, автомат имеет 7 состояний.

Таким образом, существует универсальный экран $S(A, m)$ для изображения $I^1$, такой, что $Q(A) = 7$, отсюда следует оценка числа состояний универсального автомата, удовлетворяющего условию леммы.

Из лемм 1 и 2 имеем следствие.

**Следствие 3.** *Если $m \in \mathbb{N}$ и $m \geqslant 2$, то $4 \leqslant Q(I^1, m) \leqslant 7$.*

## 4. Движение многоточечных изображений на конечном экране

**Теорема 5.** *Для любого натурального $k$ существует такой элементарный автомат $A$ с $7^k$ состояниями, что для любого натурального $m$ экран $S(A, m)$ является универсальным для любого изображения $I$, состоящего из не более чем $k$ точек.*

**Доказательство.** Требуемый элементарный автомат можно получить как $k$-кратное декартово произведение элементарного автомата из леммы 2. При этом каждый из $k$ автоматов будет изображать движение своей точки.

Если на изображения наложить некоторые ограничения, то можно построить более дешевые универсальные экраны. В этом разделе приводятся несколько таких примеров, когда изображения состоят из нескольких точек или отрезков.

**Лемма 3.** *Для любого изображения $I$ и закона $F = 1^m$ выполнено $\mathcal{U}(I, F, m) \neq \varnothing$, причем $Q(I, F, m) = 2$.*

**Доказательство.** Элементарный автомат $A$ имеет входной и выходной алфавиты, а также множество состояний, равные $E_2$. Функция переходов имеет вид $\varphi(a,b,c) = a$ для любых $a,b,c \in E_2$. Очевидно, для любого изображения существует входная последовательность для экрана (совпадающая с кодом этого изображения, записанным начиная с последнего элемента и заканчивая первым), при подаче которой на свободный вход на экране сформируется это изображение и оно будет двигаться по закону $F = (1^m)$.

**Утверждение 7.** *Если* $k,m \geqslant 2, k,m \in \mathbb{N}$ *и* $I^1_{seg} = 1^k$, *то*

$$Q(I^1_{seg}, \mathcal{F}^{1,0}, m) \leqslant 12.$$

**Доказательство.** Здесь считаем, что отрезок состоит из трех типов точек — левый край, внутренние точки и правый край. Если отрезок имеет длину 1, считаем, что он состоит из одной правой граничной точки, если длину 2, то из двух граничных точек без внутренних. Граничные точки отрезка будем двигать согласно алгоритму из доказательства утверждения 6.

Обозначим через $1^l, 2^l, 3^l$ состояния для левой границы отрезка, соответствующие состояниям 1, 2 и 3 из доказательства утверждения 6, $1^r, 2^r, 3^r$ — соответствующие состояния для правой границы отрезка. Положим 0 — начальное состояние, 1 — состояние внутренней точки отрезка.

| | $1$ | $1^l$ | $2^l$ | $3^l$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | - | - | - | - |
| $1^r$ | - | - | - | - |
| $2^r$ | + | + | + | + |
| $3^r$ | - | - | - | - |

Рис. 1. Таблица 1.

Рассмотрим всевозможные декартовы произведения состояний из множества $\{1^l, 2^l, 3^l, 0, 1\}$ и $\{1^r, 2^r, 3^r, 0, 1\}$ и будем называть их комбинациями. Выберем только те комбинации, которые могут встретиться при движении отрезка на экране, это: $\{1, 2^r\}, \{2^l, 2^r\}, \{3^l, 2^r\}, \{1^l, 2^r\}$. На рис. 1 изображена таблица, где знаком плюс отмечены комбинации, которые могут встретиться на экране, а знаком минус — комбинации, которые не встретятся.

Таким образом, построено множество состояний автомата $A$: $Q = \{0, 1, 1^l, 2^l, 3^l, 1^r, 2^r, 3^r, \{1, 2^r\}, \{2^l, 2^r\}, \{3^l, 2^r\}, \{1^l, 2^r\}\}$, $L = \{1, 1^l, 3^l, 1^r, 3^r, \{1, 2^r\}, \{3^l, 2^r\}, \{1^l, 2^r\}\}$.

В состояниях, которые являются декартовыми произведениями, компоненты с индексами $l$ и $r$ меняются независимо друга по законам, описанным в доказательстве утверждения 6. Переходы состояния 1 аналогичны переходам состояния 0.

Таким образом, построен автомат $A$, для которого $Q(A) = 12$, и существует управляющий автомат $\mathcal{A}_e$, такой что для любого $m \in \mathbb{N}$ генератор $\langle \mathcal{A}_e, \mathcal{A}, m \rangle$ формирует на экране изображение, состоящее из одного отрезка, который движется по закону $F \in \mathcal{F}^{1,0}$.

**Утверждение 8.** *Для любых натуральных $k, m \geqslant 2$ и любого изображения $I$ из $\mathcal{I}^k$, такого, что $s = |I| + k \geqslant k^2/2 + 3k/2$, выполнено*

$$Q(I, \mathcal{F}^{1,0} \setminus \mathcal{F}^{1,0,s-1}, m) \leqslant 9.$$

**Доказательство.** Реализовать движение нескольких точек можно, преобразовав алгоритм из утверждения 6 — для каждой точки посылать сигнал отдельного типа, который влияет на движение только этой точки. Минус такого преобразования алгоритма в том, что здесь количество состояний автомата зависит от числа точек в изображении.

Чтобы этого избежать, добавим каждому движущему сигналу некоторый след — цепочку автоматов в специальном состоянии, причем функцию переходов состояний зададим так, что при прохождении через метку длина следа уменьшается на одну клетку. Когда сигнал без следа достигает метки, это означает, что он предназначен этой метке и она передвигается на одну клетку вправо. Другими словами, длина следа сигнала — это номер точки, которой предназначен этот сигнал. При прохождении через метку длина следа уменьшается на одну ячейку.

При таком алгоритме расстояние между движущими сигналами должно быть таким, чтобы след сигнала не перекрывался со следующим сигналом и его следом. Отсюда получается условие на закон движения изображения, реализуемый данным алгоритмом: $F = 10^{s_1}10^{s_2}\ldots$, где $s_i \geqslant i_k - i_1 + k + 1 \geqslant k^2/2 + 3k/2, s \in \mathbb{N}$

От такого ограничения на закон движения можно отказаться за счет увеличения числа состояний, добавив новые состояния при наложении следов сигналов друг на друга. При этом снова число состояний будет зависеть от конкретного закона движения.

Построим элементарный автомат, на основе которого получается экран, удовлетворяющий условиям утверждения.

Положим входной и выходной алфавиты и множество состояний равными $Q = \{0, 1, 2, 3, 1^3, 1^{0,3}, 1^{2,3}, 1^2, 1^{3,3}\}$. Множество меток положим равным $L = \{1, 1^3, 1^{0,3}, 1^{2,3}, 1^2, 1^{3,3}\}$.

Функцию переходов зададим следующим образом:

$\varphi(3, 1, r) = 1^3$, где $r \in Q$;

$\varphi(0, 1^3, r) = 1^{0,3}$, где $r \in Q$;

$\varphi(l, 1^{0,3}, r) = l$, где $l, r \in Q$;

$\varphi(1^{0,3}, q, r) = 1$, где $q, r \in Q$;

$\varphi(3, 0, r) = 3$, где $r \in Q$;

$\varphi(2, 1^3, r) = 1^{2,3}$, где $r \in Q$;

$\varphi(1^{2,3}, 0, r) = 3$, где $r \in Q$;

$\varphi(0, 1^{2,3}, r) = 1$, где $r \in Q$;

$\varphi(2, 1^{2,3}, r) = 1^2$, где $r \in Q$;

$\varphi(0, 1^2, r) = 1$, где $r \in Q$;

$\varphi(1^2, 2, r) = 2$, где $r \in Q$;

$\varphi(1, 2, r) = 0$, где $r \in Q$;

$\varphi(3, 1^{0,3}, r) = 3$, где $r \in Q$;

$\varphi(2, 3, r) = 2$, где $r \in Q$;

$\varphi(l, 2, r) = 0$, где $l, r \in Q, l \neq 2, l \neq 1^2$;

$\varphi(3, 1^3, r) = 1^{3,3}$, где $r \in Q$;

$\varphi(1^{3,3}, 0, r) = 1^3$, где $r \in Q$;

$\varphi(2, 1^{3,3}, r) = 2$, где $r \in Q$;

$\varphi(l, q, r) = q$, в остальных случаях.

Используя построенный таким образом автомат можно реализовать движение точек, удовлетворяющее условию утверждения.

**Утверждение 9.** *Для любых натуральных $k, m \geqslant 2$ и любого изображения $I$ из $\mathcal{I}^k_{seg}$, такого, что $s = |I| + k \geqslant k^2/2 + 3k/2$, выполнено*

$$Q(I, \mathcal{F}^{1,0} \setminus \mathcal{F}^{1,0,s-1}, m) \leqslant 50.$$

| | 1 | $l$ | $2l$ | $3l$ | $1^3l$ | $1^{0,3}l$ | $1^{2,3}l$ | $1^2l$ | $1^{3,3}l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | + | + | - | - | - | - | - |
| $r$ | - | - | + | + | - | - | - | - | - |
| $2r$ | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| $3r$ | + | + | + | + | + | + | + | + | + |
| $1^3r$ | - | - | + | + | - | - | - | - | - |
| $1^{0,3}r$ | - | - | + | + | - | - | - | - | - |
| $1^{2,3}r$ | - | - | + | + | - | - | - | - | - |
| $1^2r$ | - | - | + | + | - | - | - | - | - |
| $1^{3,3}r$ | - | - | + | + | - | - | - | - | - |

Рис. 2. Таблица 2.

**Доказательство.** Для реализации движения нескольких отрезков преобразуем алгоритм из доказательства утверждения 8. Как мы уже делали это ранее, разобьем точки отрезков на три типа: левые концы отрезков, правые концы и внутренние точки отрезков. Как и ранее будем считать, что если отрезок состоит из одной точки, то он состоит только из правой граничной точки. Движение всех левых концов и всех правых концов отрезков будем реализовывать по построенному в доказательстве утверждения 8 алгоритму. При этом обозначим состояния, реализующие движение левых концов отрезков через $Q_l = \{l, 2l, 3l, 1^3l, 1^{0,3}l, 1^{2,3}l, 1^2l, 1^{3,3}l\}$ и назовем их первой группой состояний, а состояния, реализующие движение правых концов отрезков обозначим через $Q_r = \{r, 2r, 3r, 1^3r, 1^{0,3}r, 1^{2,3}r, 1^2r, 1^{3,3}r\}$ и назовем их второй группой состояний. Внутренние точки отрезков будем обозначать состоянием 1. При этом метками будут все состояния, содержащие в своем коде цифру 1.

Далее, рассмотрим декартово произведение $Q_l \times Q_r$. Элементы этого множества, которые могут встретиться при построении движения, добавим в множество состояний автомата. На рисунке 2 плюсами отмечены элементы, которые необходимо добавить, и минусами —

комбинации, которые не встретятся на экране, а, потому, добавлены в множество состояний не будут. Так как точка не может быть одновременно точкой нескольких типов (правым и левым концом отрезка), то элементы из квадрата $A$ на экране не появятся. По этим же причинам не будут добавлены в множество состояний точки из прямоугольников $B, C$ и квадрата $D$. Получаем, что в множестве состояний будет $2 + 2 * 8 + 32 = 50$.

## 5. Движущиеся изображения на бесконечном экране

В данном разделе исследуются способы построения движущихся изображений на бесконечном в одну сторону экране. Найдены законы движения, которые не могут быть реализованы на экране, элементарный автомат которого имеет конечное число состояний. Для некоторых классов законов движений найдены алгоритмы построения изображений, движущихся по этим законам.

Здесь экран представляет из себя бесконечную последовательность из одинаковых элементарных автоматов $A$, имеющих по два входа. Как и ранее, входы автомата $A$ называются левым и правым и ими соответственно являются состояния левого и правого соседа. Левый вход первого автомата называется свободным и подключен к выходу управляющего автомата $A_e$. При этом функцию переходов состояний автомата $A$ обозначим через $\varphi(l, q, r)$, где $q$ — текущее состояние автомата, $l, r$ — состояния его левого и правого соседей соответственно. Положим для любого экрана свойство $\varphi(0, 0, 0) = 0$. Бесконечный экран с элементарным автоматом $A$ будем обозначать через $S(A)$. Пару $G = \langle A_e, A \rangle$ будем называть *генератором.* Среди состояний элементарного автомата выделим непустое подмножество $L$, не содержащее нулевой элемент, и элементы этого множества будем называть *метками.*

*Отрезком предобработки экрана в момент* $t$ будем называть отрезок подряд идущих ячеек на экране, удовлетворяющий следующим условиям:

1) началом отрезка является ячейка, следующая после самом правой метки на экране;
2) состояние самой правой ячейки отрезка отлично от 0;

3) состояние всех ячеек экрана, следующих за последней (самой правой) ячейкой отрезка предобработки равно 0;
4) среди состояний ячеек отрезка нет меток.

**Лемма 4.** *Пусть $S(A)$ — бесконечный экран, и $Q(S) = q$, и на этом экране движется изображение $I^1$. Если в момент $t^*$ после начала движения отрезок предобработки экрана имеет длину $p$ и начиная с момента времени $t^*$ точка двигалась вправо $(q-1)^{p+1}+1$ тактов подряд, то во все последующие такты точка будет двигаться по закону $F = 1^\infty$.*

**Доказательство.** Пусть $Q$ — множество состояний автомата $A$, $L \subset Q$ — множество меток.

Введем несколько обозначений.

Пусть $s$ — отрезок подряд идущих ячеек на экране. Через $C_t(s)$ будем обозначать конфигурацию состояний ячеек этого отрезка в момент времени $t$. Через $O^{a,b}(s)$ обозначим отрезок экрана, включающий сам отрезок $s$, а также $a$ ячеек слева и $b$ ячеек справа от отрезка $s$. $O^{a,b}(s)$ будем называть окрестностью отрезка $s$. Через $M^i(s)$ будем обозначать отрезок экрана, полученный из $s$ сдвигом вправо на $i$ ячеек, или сдвигом влево на $|i|$ ячеек при отрицательном $i$.

Обозначим теперь через $s_{t^*}^{p+1}$ такой отрезок ячеек экрана, что в момент времени $t^*$ первой ячейкой отрезка является ячейка, состояние которой является меткой, и отрезок имеет длину $p+1$.

Рассмотрим последовательность отрезков $s_{t^*}^{p+1}$, $M^i(s_{t^*}^{p+1})$ при $i = 1, \ldots, (q-1)^{p+1}+1$ и последовательность конфигураций этих отрезков $C_{t^*+i}s_{t^*}^{p+1}$, $C_{t^*+i}(M^i(s_{t^*}^{p+1}))$.

Ясно, что конфигурация отрезка $M^i(s_{t^*}^{p+1})$ в момент времени $t_* + i$ зависит от конфигурации отрезка $O^{1,1}(M^i(s_{t^*}^{p+1}))$ в предыдущий момент времени. Кроме того, поскольку максимальная скорость распространения сигнала равна одной клетке в один такт, то две последние ячейки отрезка $O^{1,1}(M^i(s_{t^*}^{p+1}))$ в момент времени $t^* + i - 1$ находятся в состоянии 0, то есть $C_{t^*+i-1}(O^{1,1}(M^i(s_{t^*}^{p+1})) = (C_{t^*+i-1}(M^{i-1}(s_{t^*}^{p+1}), 0, 0)$. Это означает, что в приведенной последовательности каждая следующая конфигурация определяется предыдущей.

По условию все конфигурации $C_{t^*+i}s_{t^*}^{p+1}$, $C_{t^*+i}(M^i(s_{t^*}^{p+1}))$ при $i = 1 \ldots (q-1)^{p+1}+1$ начинаются с меток.

Количество таких конфигураций не превосходит $|L| \cdot |Q \setminus L|^p$. Но поскольку существует хотя бы одно состояние, не являющееся меткой, то $|L| \leqslant |Q| - 1 = q - 1$, и существует хотя бы одно состояние, являющееся меткой, то $|Q \setminus L| \leqslant |Q| - 1 = q - 1$. Следовательно, $|L| \cdot |Q \setminus L|^p \leqslant (q-1)^{p+1}$.

Значит, среди перечисленных конфигураций найдутся две одинаковые конфигурации. Это означает, что последовательность конфигураций с некоторого момента зациклится, то есть все последующие конфигурации будут начинаться с меток. А это означает, что начиная с момента $t^*$ точка будет двигаться по закону $F = 1^\infty$, что и требовалось доказать.

**Теорема 6.** *Для любого бесконечного экрана $S(A)$ существует такой закон движения $F \in \{0,1\}^\infty$, что на экране $S(A)$ невозможно реализовать движение изображения $I^1$ по закону $F$.*

**Доказательство.** Пусть $S(A)$ — бесконечный экран и его элементарный автомат $A$ имеет $q$ состояний. Положим $F_q = 101^{(q-1)}01^{(q-1)^2} 0 \ldots 1^{(q-1)^{2(i-1)}}0\ldots$. Допустим, что на экране $S(A)$ реализуется движение изображения $I^1$ по закону $F_q$ с предобработкой $p$, $p \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Тогда к моменту, когда на экране начинается движение, реализующее $i$-й отрезок единиц закона движения $F_q$, отрезок предобработки имеет длину $p + i - 1$. Но тогда существует такое $i$, что $(q-1)^{2(i-1)} > (q-1)^{p+i-1+1}$, а именно любое $i > p+2$. То есть мы находимся в условии леммы 4, и во все последующие такты точка будет двигаться со скоростью 1. Значит, на экране с $q$ состояниями закон движения $F_q$ одной точки реализовать нельзя.

Теорема 6 означает, что для изображения $I^1$ не существует универсального бесконечного экрана.

## 6. Движение с ограниченной скоростью на бесконечном экране

В этом разделе будем рассматривать законы движения с ограниченным числом идущих подряд единиц.

В лемме 1 показано, что если для конечного экрана длины $m \geqslant 2$ выполнено $Q(S) = 2$, то на нем реализуется единственный закон движения $F = 1^m$. Ясно, что на бесконечном экране $S$, для которого

$Q(S) = 2$ также реализуется только один закон движения $F = 1^\infty$, то есть, имеет место утверждение.

**Лемма 5.** *Если в множестве $\mathcal{F}$ имеется закон движения, содержащий бесконечное число нулей и бесконечное число единиц, и $\mathcal{U}(\mathcal{F}) \neq \varnothing$, то $Q(\mathcal{F}) \geqslant 3$.*

Используя алгоритм, полученный в утверждении 6, можно строить изображение $I^1$, движущееся по закону $F \in \mathcal{F}^{1,0}$, то есть, имеет место следующее утверждение.

**Лемма 6.** *$\mathcal{U}(\mathcal{F}^{1,0}) \neq \varnothing$ и $Q(\mathcal{F}^{1,0}) \leqslant 4$.*

Рассмотрим класс законов движения $\mathcal{F}^{s,0}$.

**Лемма 7.** *Если $s \in \mathbb{N}, s \geqslant 2$, то $Q(\mathcal{F}^{s,0}) \leqslant 2s + 2$.*

**Доказательство.** Построим универсальный экран $S$, для которого $Q(S) = 2s+2$. Для элементарного автомата $A$ экрана $S$ положим $Q = \{0, d^1, \ldots, d^s, l^0, l^1, \ldots, l^s\}$. Зададим функцию переходов следующим образом:

$\varphi(l^0, 0, r) = 0$, $r \in Q$;
$\varphi(l^i, 0, r) = l^{i-1}$, где $1 \leqslant i \leqslant s$, $r \in Q$;
$\varphi(l, d^i, r) = l$, где $l = 0$ или $l = d^i, 1 \leqslant i \leqslant s, r \in Q$;
$\varphi(d^i, l^j, 0) = d^i$, где $1 \leqslant i, j \leqslant s$;
$\varphi(d^i, q, 0) = d^i$, где $q = 0$ или $q = l^j, 1 \leqslant i, j \leqslant s$;
$\varphi(0, l^j, r) = 0$, где $1 \leqslant j \leqslant s$, $r \in Q$;
$\varphi(d^i, l^0, 0) = l^i$, где $1 \leqslant i \leqslant s$;
$\varphi(l, q, r) = q$ в остальных случаях.

Положим $L = \{l^i, 0 \leqslant i \leqslant s\}$. Группу состояний $d^i, 1 \leqslant i \leqslant s$ назовем движущими сигналами.

По построению функции $\varphi$ видно, что метка $l^0$ стоит на месте до тех пор, пока ее левым соседом не станет движущий сигнал.

Будем говорить, что остальные метки $l^i, 1 \leqslant i \leqslant s$ имеют счетчик, который отсчитывает, сколько тактов точка будет двигаться вперед со скоростью 1. Таким образом, каждая метка $l^i, 1 \leqslant i \leqslant s$ остается на экране ровно один такт, причем в следующий такт соседняя справа клетка становится меткой со значением счетчика на 1 меньше, чем имела метка в предыдущий момент. Когда значение счетчика становится равным 0, метка останавливается, пока в соседней слева клетке снова не появится движущий сигнал. При этом уже в следующий такт после остановки метка снова может начать движение.

Таким образом, можно подавать такие движущие сигналы, что на построенном экране можно реализовать любой наперед заданный закон движения, имеющий не более чем $s$ единиц подряд. Поскольку движение метки зависит от состояния самой ячейки и состояния ячейки слева от нее, то состояние правой ячейки не влияет на движение и движение реализуется без предобработки.

Итак, построен экран, удовлетворяющий условию утверждения, элементарный автомат которого имеет $2s+2$ состояния, следовательно, получена оценка $Q(\mathcal{F}^{s,0}) \leqslant 2s+2$ и лемма доказана.

Заметим, что классы $\mathcal{F}^{1,0}$ и $\mathcal{F}^{s,0}$ можно расширить, добавив в начало закона движения произвольный отрезок длины $d$ из нулей и единиц, то есть, можем рассмотреть классы $\mathcal{F}^{1,d}$ и $\mathcal{F}^{s,d}$, $d \in \mathbb{N}$. Для начального отрезка длины $d$ закона движения $F$ из одного из упомянутых классов, сделаем предобработку экрана, расставив на экране стоп-сигналы по аналогии с тем, как это делалось в доказательстве утверждения. Чтобы реализовать движение изображения в первые $d$ тактов, достаточно не более семи дополнительных состояний. Одно состояние будет двигаться вправо со скоростью одна клетка в два такта и ограничивать длину предобработки. Четыре состояния необходимы для того, чтобы расставить стоп-сигналы. Еще одно состояние-метка будет двигаться на одну клетку вправо каждый такт, пока не встретит стоп-сигнал. Наконец, еще одно состояние будет переводить метку, которая находится в покое, в метку, движущуюся со скоростью 1. Предобработка такого вида займет $2d+1$ такт. Таким образом, с учетом лемм 5, 6 и 7 имеет место теорема.

**Утверждение 10.** *Если $s, d \in \mathbb{N}$, то имеют место следующие оценки*

$$3 \leqslant Q(\mathcal{F}^{s,0}) \leqslant 2s+2;$$
$$3 \leqslant Q(\mathcal{F}^{s,d}) \leqslant 2s+9.$$

## 7. Автономно движущиеся изображения на бесконечном экране

**Замечание.** Автономными движениями реализуется счетное число законов движения.

Поскольку конечных автоматов счетное число и предобработок — счетное число, то автономными движениями можно реализовать не более чем счетное число законов движения. Очевидно, что любой периодический закон движения реализуется автономными движениями, а значит, ими реализуется в точности счетное число законов движения.

**Лемма 8.** *Существует непериодический закон движения $F$, для которого выполнено $v(F) = 1$ и $\mathcal{U}(\{F\}) \neq \varnothing$.*

**Доказательство.** Построим экран $S(A)$, на котором реализуется автономное движение изображения $I^1$ со скоростью 1. Для этого построим элементарный автомат этого экрана. Положим $Q = \{0, 0^c, 1^c, 2^c, 3, 4\}$ и $L = \{3, 4\}$ и

$\varphi(0^c, 0, 0) = 1^c$;
$\varphi(1^c, 0, 0) = 2^c$;
$\varphi(2^c, 0, 0) = 0^c$;
$\varphi(0^c, 2^c, r) = 1^c$, $r \in Q$;
$\varphi(1^c, 2^c, r) = 2^c$, $r \in Q$;
$\varphi(0^c, 0^c, r) = 0^c$, $r \in Q$;
$\varphi(1^c, 0^c, r) = 1^c$, $r \in Q$;
$\varphi(2^c, 0^c, r) = 0^c$, $r \in Q$;
$\varphi(0^c, 1^c, r) = 0^c$, $r \in Q$;
$\varphi(1^c, 1^c, r) = 1^c$, $r \in Q$;
$\varphi(2^c, 1^c, r) = 0^c$, $r \in Q$;
$\varphi(3, 0^c, r) = 3$, $r \in Q$;
$\varphi(0, 3, 1^c) = 4$;
$\varphi(3, 1^c, r) = 0^c$, $r \in Q$;
$\varphi(0, 4, 0^c) = 0$;
$\varphi(4, 0^c, r) = 3$, $r \in Q$.

Ненулевая часть входной последовательности будет равняться $(0^c, 0^c, 3)$ (элементы последовательности слева направо подаются на свободный вход экрана). Предобработка экрана будет состоять из элементов $0^c, 1^c, 2^c$. Состояния 3 и 4 являются метками. Метка 3 двигается на одну клетку вправо каждый такт, пока соседняя справа от нее клетка находится в состоянии $0^c$. Как только это условие нарушается, и клетка справа от метки 3 переходит в состояние $1^c$, это становится сигналом для остановки. Метка переходит в состояние 4, в котором, согласно построенной функции переходов, находится один такт, а затем снова возвращается в состояние 3. Итак, ясно, что скорость движения зависит от того, как часто перед меткой возникает состояние $1^c$.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t=0$ | $0^c$ | | | | | | | | | | | | | | |
| $t=1$ | $0^c$ | $1^c$ | | | | | | | | | | | | | |
| $t=2$ | 3 | $0^c$ | $2^c$ | | | | | | | | | | | | |
| $t=3$ | | 3 | $1^c$ | $0^c$ | | | | | | | | | | | |
| $t=4$ | | 4 | $0^c$ | $1^c$ | $1^c$ | | | | | | | | | | |
| $t=5$ | | | 3 | $0^c$ | $1^c$ | $2^c$ | | | | | | | | | |
| $t=6$ | | | | 3 | $0^c$ | $2^c$ | $0^c$ | | | | | | | | |
| $t=7$ | | | | | 3 | $1^c$ | $0^c$ | $1^c$ | | | | | | | |
| $t=8$ | | | | | 4 | $0^c$ | $1^c$ | $0^c$ | $2^c$ | | | | | | |
| $t=9$ | | | | | | 3 | $0^c$ | $1^c$ | $1^c$ | $0^c$ | | | | | |
| $t=10$ | | | | | | | 3 | $0^c$ | $1^c$ | $1^c$ | $1^c$ | | | | |
| $t=11$ | | | | | | | | 3 | $0^c$ | $1^c$ | $1^c$ | $2^c$ | | | |

Рис. 3. Автономное движение со скоростью 1.

Рассмотрим теперь предобработку экрана. Содержательно, в предобработке экрана записано почти бинарное число из $0^c$ и $1^c$ (почти, потому что в некоторых разрядах стоит $2^c$). При этом каждые два из трех тактов к младшему разряду этого числа прибавляется по единице. Предобработка отличается от бинарной записи числа тем, что некоторые разряды в нем переполнены, и поэтому в них стоит значение $2^c$. Разряд остается переполненным ровно один такт, а в следующий такт он обнуляется, а значение следующего за ним старшего разряда увеличивается на единицу. Как только переполненным становится самый старший (самый левый) разряд, длина предобработки увеличивается на единицу, и тем самым метка получает сигнал к остановке.

На рисунке 3 показаны несколько начальных тактов движения по описанным правилам.

Итак, будем рассматривать конфигурацию предобработки экрана как число, записанное в двоичной системе с некоторыми переполненными разрядами. Посмотрим, как часто длина этого числа будет увеличиваться, а соответственно, метка будет останавливаться на один такт.

Как уже говорилось выше, за 3 такта записанное в предобработке число увеличивается на две единицы. Это означает, что новые двойки образуются в младшем разряде предобработки через три такта. Кроме того, разряд остается переполненным ровно один такт, а на следующий такт он обнуляется, и, возможно, становится переполненным следующий разряд. То есть, двойка в предобработке движется влево со скоростью 1 разряд в 1 такт (и в какой-то момент исчезает совсем). Значит, переполнения разряда больше чем на единицу не произойдет (не будет значений переполненных разрядов, превосходящих $2^c$).

Для двоичной записи числа увеличение его длины на один разряд означает, что число увеличилось вдвое. Пусть на каком-то такте наше число в предобработке имеет длину $k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$, а в предыдущий такт имело длину $k-1$. Ясно, что когда мы прибавим к этому числу $2^{k-1}$ единиц (на это потребуется $2^{k-1}+2^{k-2}$ тактов), а также, когда последняя прибавленная единица дойдет до старшего разряда (на это нужно еще $k$ тактов), произойдет переполнение старшего разряда. То есть, переполнение произойдет не позже, чем через $2^{k-1}+2^{k-2}+k$ тактов.

Кроме этого, то, что длина записанного в предобработке числа увеличилась с $k-1$ до $k$, означает, что $2^{k-1}$-я единица, прибавленная к записанному в предобработке числу успела дойти до старшего разряда, а это заняло $k-1$ такт. Значит, переполнение старшего разряда в следующий раз произойдет через $2^{k-1}+2^{k-2}+k-(k-1) = 2^{k-1}+2^{k-2}+1$.

Поскольку каждое переполнение разряда влечет за собой остановку движения метки на 1 такт, значит, когда в предобработке записано число из $k$ разрядов, к этому моменту метка остановилась $k-1$ раз, то есть, в законе движения встретился $k-1$ ноль.

Итак, построен экран и на нем построено движение точки закону, который обозначим через $F$.

Посчитаем скорость движения точки по закону $F$: $v = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\nu_t(F)}{t} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^{k-1}+2^{k-2}+C}{2^{k-1}+2^{k-2}+(k-1)+C} = 1$, где $0 \leqslant C \leqslant 2^{k-1}+2^{k-2}$.

Итак, построенные экран и автономный закон движения на нем удовлетворяют удовлетворяет условиям леммы.

В доказательстве леммы 8 в предобработке находилось число в двоичной записи с некоторыми переполненными разрядами. Очевидно, что по аналогии можно использовать в предобработке число в $q$-ичной записи с переполненными разрядами для любого натурального $q$. Тем самым мы получим сразу целое множество экранов и законов движения на них, реализующих автономные движения со скоростью 1. Ясно, что с ростом $q$ переполнение разрядов в отрезке предобработки будет происходить реже, чем при меньших $q$, то есть, движение будет в некотором смысле «быстрее» (при этом скорость движения, определенная выше, будет по-прежнему равняться единице).

**Лемма 9.** *Существует непериодический закон движения $F$, для которого выполнено $v(F) = 0$ и $\mathcal{U}(\{F\}) \neq \varnothing$.*

**Доказательство.** Идея построения экрана и закона движения, удовлетворяющих условиям леммы, та же, что и в доказательстве леммы 3. Модифицируем построенный алгоритм для работы экрана следующим образом. Сначала запустим на экран метку, которая будет оставаться на месте, пока не получит сигнал слева. Кроме того, слева от метки запустим $q$-ичное растущее число, причем его разряды будут расти слева направо, то есть слева будет самый младший разряд, а справа — самый старший. Число и метка будут отделены нулевым разрядом числа. Как только длина числа будет увеличиваться на единицу, то есть разделяющий разряд между числом и меткой станет равным единице, это будет сигналом для метки, что ей нужно сдвинуться на одну клетку вправо.

Ясно, что при таком алгоритме можно построить элементарный автомат для экрана, и количество состояний автомата будет зависеть от $q$. При этом, для построенного алгоритма движения справедливы оценки времени, необходимого для переполнения разрядов, полученные в предыдущем утверждении, то есть, скорость движения изображения по описанному алгоритму равна 0.

Пусть $0 < a < 1$, $a \in \mathbb{Q}$, причем $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, тогда через $F_a$ будем обозначать закон движения $(1^p 0^{q-p})^\infty$.

**Лемма 10.** *Если* $0 < a < 1$, $a \in \mathbb{Q}$, *то существует непериодический закон* $F$, *такой что* $v(F) = a$ *и* $\mathcal{U}(\{F\}) \neq \varnothing$.

**Доказательство.** Очевидно, что определенный выше закон $F_a$ удовлетворяет условию $v(F) = a$. Также ясно, существует экран $S_a$, для которого $Q(S_a) = q$, на котором реализуется движение точки по закону $F_a$. Обозначим через $Q_a$ множество состояний элементарного автомата экрана $S_a$, $L_a$ — множество меток.

Выше был приведен класс непериодических законов движения со скоростью $v = 0$ и для каждого закона приведена идея построения экрана, на котором реализуется движение точки по этому закону. Возьмем тот закон, в котором за основание числа в предобработке взято число 2 и обозначим его через $F_0$. Экран, на котором реализуется движение по закону $F_0$ обозначим через $S_0$, $Q_0$ — множество состояний элементарного автомата экрана $S_0$, $L_0$ — множество меток.

Положим $Q_g = \{0, g\}$ $g \notin Q_a \cup Q_0$.

Построим экран, на котором реализуется непериодическое движение точки со скоростью $a$.

Положим множество состояний элементарного автомата $Q = Q_a \times Q_0 \times Q_g$, множество меток $L = L_a \times Q_0 \times Q_g$.

Итак $(q_1, q_2, q_3) \in Q$ и можем запустить на экране независимо друг от друга в координате $q_1$ движение метки из $L_a$ по закону $F_a$ и в координате $q_2$ движение метки $L_0$ по закону $F_0$.

При этом как только метка из $L_0$ будет двигаться вперед на одну клетку, она будет запускать в координате $q_3$ сигнал $g$, который каждый такт двигается вправо на одну клетку. Как только этот сигнал достигнет ячейки, содержащей метку из $L_a$, он на один такт заморозит ее счетчик, то есть, метка будет оставаться на месте на один такт дольше, чем при обычном периодическом движении. Поскольку в законе движения $F_0$ интервалы нулей между единицами увеличиваются, то тормозящий сигнал для меток из $L_a$ будет посылаться все реже, а значит, движение меток из $L_a$ будет непериодическим. Поскольку скорость движения меток из $L_0$ равна нулю, то скорость движения меток из $L$ будет совпадать со скоростью движения меток из $L_a$ и равняться $a$.

Из доказанных лемм следует теорема.

**Теорема 7.** *Для любого рационального числа* $a$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, *существует непериодический закон* $F_a$, *такой что* $v(F_a) = a$ *и* $\mathcal{U}(\{F_a\}) \neq \varnothing$.

**Теорема 8.** *Существует бесконечный экран $S(A)$, на котором реализуется такой закон движения $F$ изображения $I^1$, что в $F$ реализуются все скорости $v$ из отрезка* $[0, 1]$.

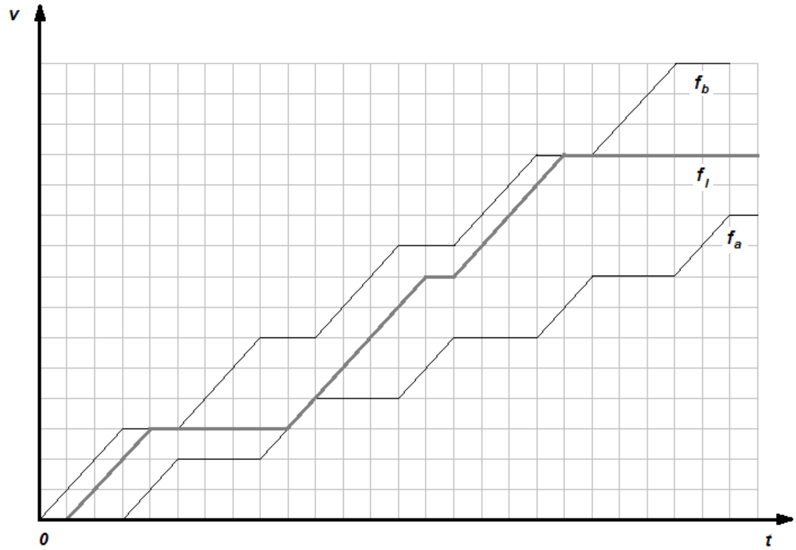


Рис. 4. Пример графиков законов движения.

**Доказательство.** Пусть $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{q}$ — рациональные числа. Ясно, что существуют экраны, на которых реализуются законы движения $F_a = (1^p 0^{q-p})^\infty$ и $F_b = (1^r 0^{q-r})^\infty$ изображения $I^1$. Запустим на экране сигнал $f_b$, и через некоторое время сигнал $f_a$, движущиеся соответственно по законам $F_b$ и $F_a$. Третий сигнал $f_l$ запустим так, чтобы он двигался по закону $F_l = (1^s 0^{q-s})^\infty$, где $s > r$ (в частности, можно положить $F_l = 1^\infty$) до тех пор, пока не встретит сигнал $f_b$. Далее сигнал $f_l$ стоит на месте до тех пор, пока его не догонит сигнал $f_a$. Таким образом, сигнал $f_l$ всегда находится между сигналами $f_a$ и $f_b$.

Ясно, что для любой последовательности $\{t_i\} \subseteq \mathbb{N}$ если существует предел $\lim\limits_{t_i \to \infty} \frac{\nu_{t_i}(f_l)}{t_i} = v$, то $a \leqslant v \leqslant b$.

Изобразим на двумерной плоскости графики зависимости количества единиц от времени в законах движения сигналов $f_a$, $f_b$ и $f_l$. На рисунке 4 изображен пример таких графиков.

Будем рассматривать точки пересечения графиков, причем, если координаты точки пересечения оказываются не целыми, будем округлять их до целых.

По аналогии с тем, как строили законы движения $f_a$ и $f_b$, для $c \in \mathbb{Q}$, $a \leqslant c \leqslant b$ построим закон $f_c$ и его график зависимости количества единиц от времени. Наконец, в качестве последовательности $\{t_i^c\}$ возьмем моменты времени, когда графики $f_l$ и $f_c$ пересекаются.

Поскольку по условию $c \in (a, b)$, то график закона $f_c$ начиная с некоторого момента будет всегда находиться между графиками $f_a$ и $f_b$. Кроме того, график закона $f_l$ также находится между графиками $f_a$ и $f_b$, и он достигает каждого из граничных графиков поочередно бесконечное число раз. Таким образом, график $f_c$ будет пересекаться с $f_l$ также бесконечное число раз.

Ясно, что для построенной последовательности $\{t_i\}$ $\lim\limits_{t_i \to \infty} \frac{\nu_{t_i}(f_l)}{t_i} = \lim\limits_{t_i \to \infty} \frac{\nu_{t_i}(f_c)}{t_i} = c$. Это означает, что все рациональные скорости реализуются в законе движения $f_l$.

Для $a \leqslant c \leqslant b, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, построим возрастающую последовательность рациональных чисел $\{c_j\}$, сходящуюся к $c$. Далее, для каждой $\{c_j\}$ построим последовательность $\{t_i^{c_j}\}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Ясно, что для этого $\varepsilon$ существует $N > 0$, такое что для любого $n \geqslant N$ выполнено $|c - c_n| < \varepsilon/2$ и существует $M > 0$, такое что для любого $m \leqslant M$ выполнено $|\frac{\nu_{t_M}(f_N)}{t_M} - c_N| < \varepsilon/2$.

Далее, для любого $i \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_i = 1/2^i$. Для каждого $\varepsilon_i = 1/2^i$ найдем соответствующие указанным выше условиям $N_i$ и $M_i$.

Положим $t_1^c = t_{M_1}^{c_{N_1}}$, $t_i^c = t_{M_i}^{c_{N_i}}$ и так далее.

Очевидно, что $\lim\limits_{t_i^c \to \infty} \frac{\nu_{t_i}(f_l)}{t_i} = c$. Таким образом, на построенном экране и в построенном законе движения на нем реализуются все скорости $c$ для любого $c \in (a, b)$.

Возьмем теперь в качестве сигнала $f_a$ построенный выше сигнал $f_0$, движущийся по непериодическому закону $F_0$, для которого $v(F_0) = 0$, в качестве сигнала $f_b$ возьмем построенный выше сигнал $f_1$, движущийся по непериодическому закону $F_1$, для которого $v(F_1) = 1$, а в качестве сигнала $f_l$ возьмем сигнал, который двигается по закону $F_l = 1^\infty$ до тех пор, пока не встретит сигнал $f_1$. Далее сигнал $f_l$ стоит на месте до тех пор, пока его не догонит сигнал $f_0$. Таким образом, сигнал $f_l$ всегда находится между сигналами $f_0$ и

$f_1$ и все сказанное выше применимо к построенному сигналу $f_l$. Значит, на этом экране построено движение изображения по закону $F_l$, в котором реализуются все скорости $v$, где $0 \leqslant v \leqslant 1$.

**Следствие 4.** *Существует автономный бесконечный экран, реализующий для изображения $I^1$ закон движения с растущим числом идущих подряд нулей и растущим числом идущих подряд единиц.*

## Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. — М.: Наука, 1990.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. — М.: Наука, 1985.

[3] Титова Е. Е. Конструирование изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2008. Т. 12, вып. 1–4. — С. 105–121.

[4] Титова Е. Е. Линейное по времени конструирование изображений клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. — 2012. Т. 16, вып. 1–4. — С. 215–234.