Оценка числа полиномиально задаваемых функций

М. В. Носов

В работе представлен вывод оценки числа способов разбиений вершин единичного куба полиномиально задаваемой поверхностью.

Ключевые слова: булевская функция, полиномиальная отделимость.

Приведем определение [1].

Определение. Булевская функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется M_k — пороговой, если существует многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ с действительными коэффициентами степени не более k, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Longleftrightarrow P(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$
$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Longleftrightarrow P(x_1, \ldots, x_n) < 0.$$

При $k = 1$ это определение пороговой функции. Пусть $N_k(n)$ — число M_k-пороговых функций.

Теорема 1. *При $2 \leqslant k \leqslant n$ имеет место следующая оценка:*

$$2^A \leqslant N_k(n) \leqslant 2 \sum_{j=0}^{B} \binom{2^n - 1}{j},$$

где

$$A = 4 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n-2}{i} + \binom{n}{k+1}, \quad B = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} - 1.$$

Следствие 1. *Имеет место следующая оценка:*

$$\sqrt{2^{2^{2m+1}(1+o(1))}} \leqslant N_m(2m+1) \leqslant \frac{1}{2} 2^{2^{2m+1}}.$$

Содержанием статьи является доказательство этих оценок. Результат ранее анонсирован в [4].

Доказательство нижней оценки. Очевидно, что M_k-пороговую функцию можно задать многочленом, который в вершинах куба не равен 0. Представим E^n в виде объединения двух множеств E_0^{n-1} и E_1^{n-1}: $x_n = 0$ и $x_n = 1$, соответственно. Если на E_0^{n-1} определена M_k-пороговая функция F_0, задаваемая многочленом $P_0(x_1, \dots, x_{n-1})$, $degP_0 \leqslant k$, а на E_1^{n-1} определена M_{k-1}-пороговая функция F_1, задаваемая многочленом $P_1(x_1, \dots, x_{n-1})$, $degP_1 \leqslant k-1$, которая в вершинах не равна 0, то на E^n можно задать M_k-пороговую функцию $F(x_1, \dots, x_n)$, что $F(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = F_0(x_1, \dots, x_{n-1})$, $F(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = F_1(x_1, \dots, x_{n-1})$. Эта функция определяется многочленом степени не более k

$$P(x_1, \dots, x_n) = P_0(x_1, \dots, x_{n-1}) + Kx_nP_1(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где K такое положительное число, что

$$K \min_{E_1^{n-1}} |P_1(x_1, \dots, x_{n-1})| \geqslant \max_{E_0^{n-1}} |P_0(x_1, \dots, x_{n-1})|.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$N_k(n) \geqslant N_k(n-1) \cdot N_{k-1}(n-1).$$

Продолжая спуск по размерности кубов, получаем неравенство

$$N_k(n) \geqslant \prod_{i=0}^{l} N_{k-i}^{\binom{l}{i}}(n-l)$$

Очевидно, что любая булевская функция от k является M_k-пороговой. Ввиду этого, спуск по размерности кубов производится до тех пор пока размерность куба не совпадет со степенью многочлена или степень многочлена станет равна 1. Воспользуемся следующей оценкой числа пороговых функций:

$$N_1(n) \geqslant 2^{\binom{n}{2}}.$$

Получаем оценку

$$N_k(n) \geqslant 2^{G_1+G_2},$$

где

$$G_1 = 2^k + \binom{n-k}{n-k-1}2^{k-1} + \binom{n-k+1}{n-k-1}2^{k-2} + \ldots + \binom{n-3}{n-k-1}2^2,$$

$$G_2 = \binom{k-1}{0}\binom{n-k+1}{2} + \binom{k-1}{1}\binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}\binom{n-k-1}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n-3}{n-k-1}\binom{2}{2}.$$

Воспользуемся методом [2] для суммирования (все интегралы берутся по окружности малого радиуса с центром в начале координат)

$$G_1 - 2^k = 2^k\left(\frac{1}{2}\binom{n-k}{n-k-1} + \ldots + \frac{1}{2^{k-2}}\binom{n-3}{n-k-1}\right) =$$
$$= \frac{2^k}{2\pi i}\left(\oint \frac{(1+w)^{n-k}}{2w^{n-k}}dw + \ldots + \oint \frac{(1+w)^{n-3}}{2^{k-2}w^{n-k}}dw\right) =$$
$$= \frac{2^k}{2\pi i}\oint \frac{1}{w^{n-k}}\left(\frac{(1+w)^{n-k}}{2} + \ldots + \frac{(1+w)^{n-3}}{2^{k-2}}\right)dw =$$
$$= \frac{2^k}{2\pi i}\oint \frac{1}{w^{n-k}}\frac{\frac{(1+w)^{n-k}}{2}\left(1-\left(\frac{(1+w)}{2}\right)^{k-2}\right)}{1-\frac{1+w}{2}}dw =$$
$$= \frac{4}{2\pi i}\oint \frac{(1+w)^{n-k}\left(2^{k-2}-(1+w)^{k-2}\right)}{w^{n-k}(1-w)}dw =$$
$$= 2^n - 2^k - 4\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{n-2}{i} = 4\sum_{i=0}^{k-2}\binom{n-2}{i} - 2^k.$$

Далее

$$G_2 - \binom{n-k+1}{2} = \binom{k-1}{1}\binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}\binom{n-k-1}{2} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n-3}{n-k-1}\binom{2}{2} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\oint\left(\frac{(1+w)^{k-1}}{w^2}\cdot\frac{(1+z)^{n-k}}{z^3} + \frac{(1+w)^k}{w^3}\cdot\frac{(1+z)^{n-k-1}}{z^3} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(1+w)^{n-3}}{w^{n-k}}\cdot\frac{(1+z)^2}{z^3}\right)dzdw$$

Следовательно,
$$G_2 - \binom{n-k+1}{2} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \left(\frac{(1+w)^{k-1}(1+z)^{n-k}}{w^2 z^3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1+w}{w(1+z)}\right)^{n-k-1}}{1 - \frac{1+w}{w(1+z)}} \right) dzdw =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{(1+w)^{k-1}(1+z)^2 \left((1+w)^{n-k-1} - (1+z)^{n-k-1} w^{n-k-1}\right)}{w^{n-k}(1-wz)z^3} dzdw =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{(1+w)^{n-2}\left(\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z}\right)}{w^{n-k}(1-wz)} dzdw -$$
$$- \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint \frac{(1+w)^{k-1}(1+z)^{n-k+1}}{w(1-wz)z^3} dzdw = \binom{n}{k+1} - \binom{n-k+1}{2}.$$

Следовательно,
$$G_1 + G_2 = 4\sum_{i=0}^{k-2} \binom{n-2}{i} + \binom{n}{k+1}.$$

Доказательство верхней оценки следует из теоремы Шлефли (по этому вопросу см., например, [3]): точки E^n определяют для M_k-пороговой функции 2^n линейных неравенств в пространстве размерности $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$.

Список литературы

[1] Алешин С. В. Распознавание динамических образов. — М.: Изд-во МГУ, 1996.

[2] Егорычев Г. Г. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. — Новосибирск: Наука, 1977.

[3] Зуев Ю. А. Пороговые функции и пороговые представление булевых функций // Математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1994. Вып. 5. — С. 5–61.

[4] Носов М. В. Оценка числа полиномиально задаваемых функций // Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и её приложение». — М., 2001. — С. 174–175.