Об изменении размерности периодических подмножеств натурального ряда

Дергач П.С.[1], Булгаков Л.Р.[2]

Данная статья посвящена описанию изменения размерности периодических подмножеств натурального ряда при, казалось бы, таких незначительных операциях, как *удаление/добавление* к множеству одного числа. В работе исследуется случай, когда размерность исходного множества равна 1 или 2. Под размерностью множества понимается минимальное число непересекающихся арифметических прогрессий, дающих в объединениее это множество. Для множеств размерности 2 результат получен только в случаях пар прогрессий общего положения. В работе приводятся результаты о том, как именно меняется размерность в зависимости от того, *откуда удаляется/куда добавляется* число x.

Ключевые слова: арифметическая прогрессия, натуральный ряд, прогрессивное множество.

Введение

Данная статья основана на результатах дипломной работы Л.Р. Булгакова, выполненной под научным руководством П.С. Дергача, и посвящена описанию изменения размерности периодических подмножеств натурального ряда. Интерес к данной теме был вызван вопросом устойчи-

[1] *Дергач Пётр Сергеевич* — к.ф.-м.н., младший научный сотрудник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: dergachpes@mail.ru.

Dergach Pyotr Sergeevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

[2] *Булгаков Леон Русланович* — Студент магистратуры НИЯУ МИФИ, e-mail: leon1bulgakov@gmail.com.

Bulgakov Leon Ruslanovich — magistracy student, National Research Nuclear University MEPhI.

вости размерности множеств к операциям над ними. В качестве операций были взяты *добавление / удаление* одного элемента, а размерность исследуемых множеств было решено взять не более двух. В ходе работы были полностью решены случаи множеств размерности 1 и большинство случаев размерности 2. Оказывается, что при неудачном выборе *удаляемого/добавляемого* числа x размерность может измениться на сколь угодно большую величину. Более того, при операции добавления возможна ситуация, в которой размерность нового множества может стать равной бесконечности. При этом случай размерности 2 в равной мере является как развитием идей для размерности 1, так и добавляет новые нетривиальные идеи, присущие только множествам размерности больше 1. Приводимый результат существенно продвигает нас в решении задачи для множеств произвольной размерности, а полученные оценки являются неулучшаемыми.

Основные определения

Множество натуральных чисел обозначаем через $\mathbb{N}$. Множество целых неотрицательных чисел обозначаем через $\mathbb{N}_0$. Пусть $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда *арифметической прогрессией с началом* a *и шагом* b называется множество

$$(a, b) := \{a + ib \mid i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Множество всех арифметических прогрессий обозначаем через $\mathbb{P}^+$.

Называем множество $P \subset \mathbb{N}$ прогрессивным, если его можно представить в виде конечного объединения непересекающихся арифметических прогрессий. Минимальное число прогрессий в таком представлении называем его *мерой* и обозначаем это число через $\mu(P)$. Называем это представление *минимальным представлением* множества P.

Пусть $(a, b) \in \mathbb{P}^+$. Обозначим через $(a, b)^+$ множество

$$(a, b)^+ := \{x \in \mathbb{N} \mid b|(x - a)\}$$

и называем его *расширением* множества (a, b). Через $(a, b)^-$ обозначаем множество

$$(a, b)^- := (a, b)^+ \setminus (a, b)$$

и называем его *предпериодом* множества (a, b).

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ и $k = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_{s(k)}^{a_{s(k)}}$ — разложение числа k на простые множители. Тогда вводим обозначение

$$f(k) = a_1(p_1 - 1) + a_2(p_2 - 1) + \ldots + a_{s(k)}(p_{s(k)} - 1).$$

Пусть $(a,b),(c,d) \in \mathbb{P}^+$ и $(a,b)\cap(c,d)=\emptyset$. Называем прогрессию $(e,f)\subset(a,b)\cup(c,d)$ *зигзагом*, если $(a,b)\cap(e,f)\neq\emptyset$ и $(c,d)\cap(e,f)\neq\emptyset$.

Называем множество $(a,b)\cup(c,d)$ *сжимаемым*, если все его элементы сравнимы по некоторому общему натуральному модулю $n>1$. В противном случае, называем множество $(a,b)\cup(c,d)$ *несжимаемым.*

Если множество $(a,b)\cup(c,d)$ несжимаемо и реализуется один из трех случаев $\{b,d\}=\{2\}$, $\{b,d\}=\{2,6\}$ и $\{b,d\}=\{2,18\}$, то называем такие прогрессии *прогрессиями частного положения.*

Если множество $(a,b)\cup(c,d)$ сжимаемо и после сжатия образует прогрессии частного положения, то, опять же, называем такие прогрессии *прогрессиями частного положения.*

Прогрессиями общего положения называем пары прогрессий, которые не являются прогрессиями частного положения.

Теорема 1. *Пусть* $m\in\mathbb{N}$, $2^k<m\leq 2^{k+1}$. *Тогда* $\mu(\mathbb{N}\setminus\{m\})=k+2$.

Замечание. Данная теорема, по сути, описывает решение не только для прогрессии $(1,1)$, но и для общего случая, так как любую прогрессию можно сжать до $(1,1)$.

Теорема 2. *Пусть* $a,b,c\in\mathbb{N}$. *Если* $a\in(b,c)^-$ *и* $2^{k-1}<\frac{b-a}{c}\leq 2^k$, *то* $\mu(\{a\}\cup(b,c))=k+1$, *а если* $a\notin(b,c)^+$, *то* $\mu(\{a\}\cup(b,c))=\infty$.

Теорема 3. *Пусть* $a,b,c,d,e\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}_0$ *и пусть* $T=(b,c)\sqcup(d,e)$ *— пара прогрессий общего положения.*
Если $a\notin(b,c)^-\cup(d,e)^-$ *то* $\mu(\{a\}\cup T)=\infty$.
Если $a\in(b,c)^-$, $2^{k-1}<\frac{b-a}{c}\leq 2^k$, *то* $\mu(\{a\}\cup T)=k+2$.
Если $a\in(d,e)^-$, $2^{k-1}<\frac{d-a}{e}\leq 2^k$, *то* $\mu(\{a\}\cup T)=k+2$.

Теорема 4. *Пусть* $a,b,c,d,e\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}_0$ *и пусть* $T=(b,c)\sqcup(d,e)$ *— пара прогрессий общего положения,* $a\in T$.
Если $a\in(b,c)$, $b+c\cdot(2^k-1)<a\leq b+c\cdot(2^{k+1}-1)$, *то* $\mu(T\setminus\{a\})=k+3$.
Если $a\in(d,e)$, $d+e\cdot(2^k-1)<a\leq d+e\cdot(2^{k+1}-1)$, *то* $\mu(T\setminus\{a\})=k+3$.
Иначе $\mu(T\setminus\{a\})=2$.

Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. *Пусть* $a,n\in\mathbb{N}$, $a\leq 2^n$. *Тогда*

$$\mu(\mathbb{N}\setminus(a,2^n))\leq n.$$

Доказательство.

Будем доказывать утверждение индукцией по n. При $n = 1$ получаем, что или $a = 1$ и тогда

$$\mu(\mathbb{N} \setminus (a, 2^n)) = \mu(\mathbb{N} \setminus (1, 2)) = \mu((2, 2)) = 1,$$

или $a = 2$ и тогда

$$\mu(\mathbb{N} \setminus (a, 2^n)) = \mu(\mathbb{N} \setminus (2, 2)) = \mu((1, 2)) = 1.$$

Для доказательства перехода индукции нужно рассмотреть два случая. Если $a = 2b$ — четное число, то

$$\mu(\mathbb{N} \setminus (a, 2^n)) = \mu(\mathbb{N} \setminus (2b, 2^n)) =$$

$$= \mu((1, 2) \cup \{2x | x \in (b, 2^{n-1})\}) \leq 1 + \mu((b, 2^{n-1})). \quad (1)$$

Так как $b = \frac{a}{2} \leq \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$, то по предположению индукции

$$\mu((b, 2^{n-1})) \leq n - 1. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем требуемое в индуктивном переходе неравенство. Если же $a = 2b - 1$ — нечетное число, то

$$\mu(\mathbb{N} \setminus (a, 2^n)) = \mu(\mathbb{N} \setminus (2b - 1, 2^n)) =$$

$$= \mu((1, 2) \cup \{2x - 1 | x \in (b, 2^{n-1})\}) \leq 1 + \mu((b, 2^{n-1})). \quad (3)$$

Так как $b = \frac{a+1}{2} \leq \frac{2^n+1}{2} = 2^{n-1} + \frac{1}{2}$, то $b \leq 2^{n-1}$ и по предположению индукции

$$\mu((b, 2^{n-1})) \leq n - 1. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем требуемое в индуктивном переходе неравенство.■

Лемма 2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *и* $k = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_{s(k)}^{a_{s(k)}}$ *— разложение числа* k *на простые множители. Тогда*

$$f_1(k) = f_2(k) = a_1(p_1 - 1) + a_2(p_2 - 1) + \ldots + a_{s(k)}(p_{s(k)} - 1).$$

Доказательство.

Доказательство леммы см. в [1].

Комментарий. Здесь под $f_1(k)$ и $f_2(k)$ подразумевается мера множества $\mathbb{N} \setminus (k, k)$ с условием на попарное непересечение прогрессий в представлении и без него соответственно.

Лемма 3. *Используя $n \in \mathbb{N}$ арифметических прогрессий невозможно накрыть подряд 2^n натуральных чисел, не накрыв при этом весь последующий числовой ряд.*
Доказательство.

Доказательство леммы приведено в [2] как теорема 3.

Лемма 4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $x \leq k$ и $k = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_{s(k)}^{a_{s(k)}}$ — разложение числа k на простые множители. Тогда*

$$\mu(\mathbb{N} \setminus (x, k)) = a_1(p_1 - 1) + a_2(p_2 - 1) + \ldots + a_{s(k)}(p_{s(k)} - 1).$$

Доказательство.

При $x = k$ утверждение совпадает с леммой 2, в которой f_1 обозначает то же, что и в наших обозначениях μ, а f_2 — такую же оценку на минимальное число прогрессий в представлении, но уже без требования на попарное непересечение. Если же $x < k$, то верхняя оценка (конструктив) получается отсечением от конструкции из [1] некоторой начальной части, что, конечно же, никак не влияет на общее количество прогрессий и их попарное непересечение. Нижняя оценка тоже получается теми же самыми рассуждениями, что и в [1], а именно построением опорного семейства необходимой мощности, причем само опорное семейство отличается от использованного в [1] лишь сдвигом на константу. ■

Лемма 5. *Пусть $k, m \in \mathbb{N}$ и $2^k < m < 2^{k+1}$. Тогда*

$$f(m) \geq k + 1$$

и равенство достигается только при $m = 2^{k-1} * 3$ или $m = 2^{k-3} * 3^2$.
Доказательство.

Заметим, в первую очередь, что

$$f(m) = a_1(p_1 - 1) + a_2(p_2 - 1) + \ldots + a_{s(m)}(p_{s(m)} - 1),$$

где

$$m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_{s(m)}^{a_{s(m)}} \tag{5}$$

— разложение числа m на простые множители. Заменим в этом разложении каждое вхождение простого числа $p > 2$ на 2^{p-1}. Значение функции f, очевидно не изменится, а число увеличится. Если в разложении (5) есть простое число $p > 3$, то число увеличится хотя бы в два раза, так как

$$2^{p-1} \geq 2p.$$

Аналогично, число увеличится хотя бы в два раза и в случае, когда в (5) есть хотя бы три тройки, так как

$$2^2 * 2^2 * 2^2 \geq 2 * 3^3.$$

Пусть мы в итоге получили новое число $n = 2^l$. Так как $n > m > 2^k$, то $l \geq k+1$. Значит

$$f(m) = f(n) = f(2^l) = l \geq k+1. \tag{6}$$

При этом, неравенство (6) может превратиться в равенство только если n меньше $2m$. Как уже отмечалось выше, это возможно лишь для случаев $m = 2^{k-1} * 3$ или $m = 2^{k-3} * 3^2$ (С учетом ограничения $2^k < m < 2^{k+1}$). Осталось заметить, что для этих значений равенство действительно выполняется:

$$f(2^{k-1} \cdot 3) = (k-1) \cdot 1 + 2 = k+1,$$
$$f(2^{k-3} \cdot 3^2) = (k-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = k+1.$$

Лемма доказана. ■

Лемма 6. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $2^k < m \leq 2^{k+1}$. *Тогда в минимальном представлении множества* $\mathbb{N} \setminus \{m\}$ *непересекающимися арифметическими прогрессиями шаг одной из них будет обязательно равен* 2^{k+1}, $2^{k-1} * 3$ *или* $2^{k-3} * 3^2$.

Доказательство.

Рассмотрим множество

$$H := \{1, 2, \ldots, m-1\}.$$

В нем хотя бы 2^k чисел. Из леммы 3 следует, что для его накрытия нужно использовать хотя бы $k+1$ прогрессий. По теореме 1 (доказательство теоремы 1 см. ниже; оно использует только уже доказанную выше лемму 1) в минимальном представлении множества $\mathbb{N} \setminus \{m\}$ будет ровно $k+2$ прогрессий. Кроме того, хотя бы одна из этих прогрессий не содержит точек из H, так как иначе они накрывали бы, начиная с некоторого момента, весь ряд и не накрывали при этом точку m. Инвертацией прогрессий в обратную сторону получили бы (как и в доказательстве теоремы 1) противоречие с леммой 3. Объединяя полученные результаты, заключаем, что $k+1$ прогрессий начинаются в H и только одна прогрессия начинается в числе $x > m$. Выясним, каким будет шаг t этой прогрессии. Если он меньше m, то

$$H \cap (x, t) \neq \emptyset.$$

Это противоречит попарному непересечению прогрессий в минимальном представлении, так как пересечение прогрессий — всегда бесконечное множество. Если шаг t больше 2^{k+1}, то остальные $k+1$ прогрессий накрывают подряд как минимум 2^{k+1} чисел и не накрывают при этом (x,t). Это противоречило бы лемме 3. Значит

$$m \le t \le 2^{k+1}.$$

Если $t = 2^{k+1}$, то утверждение леммы доказано. В противном случае возможность представить оставшееся множество

$$(\mathbb{N} \setminus \{m\}) \setminus (x,t)$$

объединением $k+1$ прогрессий влечет за собой и возможность представить множество

$$\mathbb{N} \setminus (t,t)$$

объединением $k+1$ прогрессий. Но тогда

$$f(t) \le k+1.$$

Мы знаем, что

$$2^k < m \le t < 2^{k+1}.$$

По лемме 5 получаем

$$f(t) \ge k+1.$$

Значит $f(t) = k+1$. Опять же по лемме 5 отсюда получаем, что тогда $t = 2^{k-1} * 3$ или $t = 2^{k-3} * 3^2$. Лемма доказана. ■

Лемма 7. *Допустим, что* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{P}^+$, $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$ *и пусть* $(e,f) \subset (a,b) \cup (c,d)$ *— зигзаг. Пусть, кроме того, множество* $(a,b) \cup (c,d)$ *несжимаемо. Тогда* f *— нечетное число.*
Доказательство.

Прежде всего, заметим, что если $e \in (a,b)$, то $e+f \in (c,d)$, так как иначе $(e,f) \subset (a,b)$, а это противоречит определению зигзага. Аналогично, если $e \in (c,d)$, то $e+f \in (a,b)$. Не ограничивая общности, считаем далее, что $e \in (a,b)$. Повторяя приведенное рассуждение для $e+f$ и $e+2f$, получаем в итоге, что

$$(e,2f) \in (a,b), \ (e+f,2f) \in (c,d).$$

Это свойство показывает, почему (e, f) названо словом *зигзаг.* Отсюда следует, что

$$2f = bx = dy \tag{7}$$

для некоторых $x, y \in \mathbb{N}$. При этом, число x нечетно, так как иначе f делилось бы на b и тогда бы $e + f \in (a, b)$. А это невозможно, ведь $e + f \in (c, d)$. Аналогично, число y нечетно. Значит, в силу (7), b, d — четные числа. Так как множество $(a, b) \cup (c, d)$ несжимаемо, то числа a и c разной четности. Это, в свою очередь, означает, что f нечетно. ■

Лемма 8. *Пусть множество* $\mathbb{N}\backslash(n, n)$ *представлено в виде объединения* $f(n)$ *непересекающихся арифметических прогрессий. Тогда каждый шаг этих прогрессий является делителем числа* n.
Доказательство.

Обозначим множество этих $f(n)$ прогрессий за I. Из [1] известно, что существует опорное семейство из $f(n)$ точек внутри $(1, 2, \ldots, n-1)$, то есть такое множество, для которого любая проходящая через пару его элементов арифметическая прогрессия будет пересекаться с (n, n). При этом, если заменить любую из точек x семейства на точку $x + n$, то новое множество точек по прежнему будет опорным. Это означает, что прогрессия из I, которая проходит через x будет проходить и через $x+n$. Значит ее шаг будет делителем числа n. Осталось заметить, что любая прогрессия из I проходит через какую-то из точек опорного семейства. ■

Доказательство основных утверждений

Теорема 1. *Пусть* $k, m \in \mathbb{N}$, $2^k < m \leq 2^{k+1}$. *Тогда* $\mu(\mathbb{N}\backslash\{m\}) = k+2$.
Доказательство.

Докажем, что $\mu(\mathbb{N} \setminus \{m\}) \leq k + 2$. Так как

$$\mathbb{N} \setminus \{m\} = (\mathbb{N} \setminus (m, 2^{k+1})) \cup (m + 2^{k+1}, 2^{k+1})$$

и

$$m \leq 2^{k+1},$$

то по лемме 1 получаем

$$\mu(\mathbb{N} \setminus \{m\}) \leq k + 1 + 1 = k + 2.$$

Докажем нижнюю оценку $\mu(\mathbb{N} \setminus \{m\}) \geq k+2$. Из [2] известно, что, используя n прогрессий, невозможно накрыть подряд более чем $2^n - 1$ чисел, не накрыв при этом весь ряд. Поэтому на накрытие множества $\{1, 2, \ldots, m-1\}$ потребуется хотя бы $k+1$ прогрессий. Если бы этого количества прогрессий было достаточно для накрытия множества $\mathbb{N} \setminus \{m\}$, то применяя рассуждения, аналогичные приводимым в [2], получили бы, что, используя $k+1$ прогрессий, удается, начиная с некоторого момента, накрыть сколь угодно длинную последовательность идущих подряд чисел и при этом не накрыть весь ряд. Для этого надо лишь инвертировать все $k+1$ прогрессий справа налево. Их продолжения влево от их начал все еще не будут содержать точку m, так как все эти начала меньше m. Получаем противоречие с леммой 3. ■

Теорема 2. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$. Если $a \in (b,c)^-$ и $2^{k-1} < \frac{b-a}{c} \leq 2^k$, то $\mu(\{a\} \cup (b,c)) = k+1$, а если $a \notin (b,c)^-$, то $\mu(\{a\} \cup (b,c)) = \infty$.*
Доказательство.

Докажем сначала простую часть теоремы, когда $a \notin (b,c)^-$. В этом случае в любом представлении множества $\{a\} \cup (b,c)$ все прогрессии, начиная с некоторого момента, лежали бы в (b,c). Значит такие прогрессии изначально лежали бы в $(b,c)^+$ и не накрыли бы точку $\{a\}$. Поэтому $\mu(\{a\} \cup (b,c)) = \infty$.

Пусть теперь $a \in (b,c)^-$. Тогда сделаем с нашим множеством преобразование, переводящее $(b,c)^+$ в $(1,1)$. После него множество $\{a\} \cup (b,c)$ превратится в

$$\{1\} \cup \left(1 + \frac{b-a}{c}, 1\right). \tag{8}$$

При этом, мера μ при таком преобразовании, очевидно, не меняется. Обозначим $1 + \frac{b-a}{c}$ за d. Рассмотрим теперь какое-нибудь минимальное представление прогрессиями множества (8). Пусть точку $\{1\}$ в нем накрывает прогрессия с шагом n. Тогда $n \geq d-1$ и

$$\mu(\{1\} \cup (d,1)) = 1 + \mu((d,1) \setminus (n+1,n)).$$

Из леммы 4 известно, что

$$\mu((d,1) \setminus (n+1,n)) = a_1(p_1 - 1) + a_2(p_2 - 1) + \ldots + a_{s(k)}(p_{s(k)} - 1), \tag{9}$$

где

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \ldots p_{s(k)}^{a_{s(k)}} \tag{10}$$

— разложение числа n на простые множители. В силу минимальности покрытия получаем отсюда, что n доставляет минимум значения $\mu((d,1) \setminus (l+1,l))$ по всем $l \geq d-1$. Заметим, что если в произведении (10) заменить простое число p_1 на 2^{p_1-1}, то произведение не уменьшится, а сумма (8) не изменится. Значит можно считать, что n — степень двойки. Чем больше степень, тем больше значение суммы (8). Значит, n — минимальная степень двойки, удовлетворяющая условию $n \geq d-1$. Но $d = 1 + \frac{b-a}{c}$. Из условия $2^{k-1} < \frac{b-a}{c} \leq 2^k$ следует, что $n = k$. Значит

$$\mu(\{1\} \cup (d,1)) = k+1.$$

Теорема доказана. ■

Теорема 3. *Пусть* $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$ *и пусть* $T = (b,c) \sqcup (d,e)$ *— пара прогрессий общего положения.*
Если $a \notin (b,c)^- \cup (d,e)^-$ *то* $\mu(\{a\} \cup T) = \infty$.
Если $a \in (b,c)^-$, $2^{k-1} < \frac{b-a}{c} \leq 2^k$, *то* $\mu(\{a\} \cup T) = k+2$.
Если $a \in (d,e)^-$, $2^{k-1} < \frac{d-a}{e} \leq 2^k$, *то* $\mu(\{a\} \cup T) = k+2$.
Доказательство.

Докажем сначала первую часть теоремы, когда $a \notin (b,c)^- \cup (d,e)^-$. Если бы множество $\{a\} \cup T$ можно было представить конечным объединением арифметических прогрессий, то все они, начиная с некоторого момента, лежали бы в $(b,c) \cup (d,e)$. Значит такие прогрессии изначально лежали бы в $(b,c)^+ \cup (d,e)^+$ и не накрыли бы точку $\{a\}$. Поэтому $\mu(\{a\} \cup T) = \infty$.

Докажем вторую часть теоремы, где $a \in (b,c)^-$ и $2^{k-1} < \frac{b-a}{c} \leq 2^k$. Считаем, что множество T несжимаемо, так как иначе множество $\{a\} \cup T$ тоже можно было сжать и свести задачу к случаю, когда T несжимаемо. Рассмотрим оптимальное разбиение множества $\{a\} \cup T$. Пересекаем каждую прогрессию в разбиении с $(b,c)^+$. Таким образом мы получили разбиение $a \cup (b,c)$. Из теоремы 2 мы знаем, что для этого потребуется не меньше $k+1$ прогрессий. Опять же, используя теорему 2, получаем, что мы сможем представить $\{a\} \cup T$ объединением $k+1$ прогрессии для $a \cup (b,c)$ и прогрессии (d,e). Получится $k+2$ прогрессии.

Покажем, что $k+1$ прогрессий для этого не хватит. Если бы это было не так, то оптимальное разбиение получалось бы из оптимального разбиения множества $a \cup (b,c)$ с помощью расширения некоторых прогрессий разбиения до зигзага в $\{a\} \cup T$. Из леммы 7 получаем, что зигзаги могут возникнуть только на прогрессиях с нечетным внутри $a \cup (b,c)$ шагом. Из леммы 6 выводим, что у одной из прогрессий в разбиении $a \cup (b,c)$

шаг равен 2^{k+1}, $2^{k-1} * 3$ или $2^{k-3} * 3^2$. В первом случае, из леммы 8, получаем, что все прогрессии разбиения, кроме, возможно, прогрессии с единичным шагом, имеют четные шаги и не порождают зигзаг. А прогрессия с единичным шагом возникает, только если $a = b - c$, а в этом случае $\mu(\{a\} \cup T) = 2$ — получаем оценку из утверждения теоремы при $k = 0$.

Теперь рассмотрим случай шага $2^{k-1} \cdot 3$. единственные нечетные делители этого числа — 1 или 3, но случай с 1 был только что разобран выше, а при использовании прогрессии с шагом 3 в оптимальном разбиении множества $a \cup (b, c)$ нужно сразу же использовать тогда и вторую прогрессию с шагом 3. Однако, построение зигзага на любой из них дает прогрессии частного положения, а построить зигзаги на обеих нельзя, так как мы не получим прогрессию (d, e).

Для случая с шагом $2^{k-3} \cdot 3^2$ аналогично возникают только три нечетных делителя — $1, 3$ или 9. Случай с 1 уже разобран, случай с 3 разбирается так же, как и для шага $2^{k-1} \cdot 3$. Разберем теперь случай с шагом 9. В этом случае все наши прогрессии делятся на три непересекающихся класса с остатками по модулю 3, и, так как это оптимальное представление, два из этих классов заняты одной прогрессией с шагом 3, но тогда единственным таким разбиением будет разбиение с шагами $3, 3, 6, 12...$, и шага 9 среди них нет.

В каждом из возможных случаев показали, что попытка взять оптимальное разбиение множества $a \cup (b, c)$ и, расширив его зигзагами, получить разбиение для множества $\{a\} \cup T$ приводит нас лишь к случаю прогрессий частного положения.

Случай, когда $a \in (d, e)^-$ и $2^{k-1} < \frac{d-a}{e} \leq 2^k$, разбирается аналогично. ■

Теорема 4. *Пусть* $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$ *и пусть* $T = (b, c) \sqcup (d, e)$ *— пара прогрессий общего положения,* $a \in T$.
Если $a \in (b, c),\ b + c \cdot (2^k - 1) < a \leq b + c \cdot (2^{k+1} - 1)$, *то* $\mu(T \setminus \{a\}) = k + 3$.
Если $a \in (d, e),\ d + e \cdot (2^k - 1) < a \leq d + e \cdot (2^{k+1} - 1)$, *то* $\mu(T \setminus \{a\}) = k + 3$.
Иначе $\mu(T \setminus \{a\}) = 2$.
Доказательство.

Ход доказательства повторяет доказательство предыдущей теоремы. Пусть $a \in (b, c),\ b + c \cdot (2^k - 1) < a \leq b + c \cdot (2^{k+1} - 1)$. Тогда, по теореме 1, мы умеем разбивать множество $(b, c) \setminus a$ в объединение $k + 2$ прогрессий и в итоге получаем оценку $k + 3$. Предполагаем, от противного, что это можно сделать меньшим числом прогрессий. Тогда каждую из них пересекаем с (b, c) и получаем разбиение множества $(b, c) \setminus a$, а, по теореме 1, для этого надо хотя бы $k+2$ прогрессий. Значит их ровно $k+2$, причем полученное разбиение для $(b, c) \setminus a$ оптимально. По лемме 6, в нем есть прогрессия с шагом 2^{k+1}, $2^{k-1} \cdot 3$ или $2^{k-3} \cdot 3^2$. Каждый из этих вариантов, по лемме 7, снова приводит нас к расширению множества зигзагами на прогрессиях с шагом $1, 3$ или 9. Но все они приводят нас лишь к парам прогрессий частного положения.

Случай, когда $a \in (d, e)$, $d + e \cdot (2^k - 1) < a \leq d + e \cdot (2^{k+1} - 1)$, разбирается аналогично.

Наконец, если оба эти случая не реализуются, то $a = b$ или $a = d$. В любом случае, двух прогрессий для представления множества $T \setminus \{a\}$ хватит. А одна прогрессия может возникнуть лишь в случае, когда, с точностью до сжатия, $a = b = 1$, $d = 4$, $c = e = 2$. Это прогрессии частного положения. ■

Заключение

В работе было найдено точное значение для меры множеств, получаемых из множеств размерности 1 при добавлении или удалении из них одного числа. Также эти значения были найдены для множеств размерности 2, образуемых парой прогрессий общего положения. В этом случае оптимальное разбиение достигается тривиально с использованием оптимальных разбиений для случаев с множествами размерности 1. Необходимо отметить, что для множеств, образуемых парой прогрессий частного положения, данное утверждение уже неверно. Этот класс случаев требует дополнительного исследования.

Список литературы

[1] Э. С. Айрапетов, П. С. Дергач. *О прогрессивном разбиении некоторых подмножеств натурального ряда.* Интеллектуальные системы, 2015. Т.19, вып. 3, М., Сс. 79-86.

[2] М. А. Коххарова. *О максимальном покрытии начала натурального ряда с ограничениями.* Дипломная работа. Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Ташкент, 2017.

Сведения об авторах

Дергач Петр Сергеевич, Dergach Pyotr Sergeevich
Младший научный сотрудник МГУ имени М. В. Ломоносова в городе Москве;
адрес: Россия, г. Москва, 125565, Ленинградское ш., 88-19;
тел. моб.: +79037189288;
e-mail: dergachpes@mail.ru.

Булгаков Леон Русланович, Bulgakov Leon Ruslanovich
Студент магистратуры НИЯУ МИФИ;
адрес: Россия, г. Москва, 115409, Каширское ш., 31;
тел. моб.: +79647751528;
e-mail: leon1bulgakov@gmail.com.

About the dimension difference of periodic subsets of the natural series

Dergach P.S., Bulgakov L.R.

This work is devoted to describing the change in the dimension of periodic subsets of the natural series with seemingly insignificant operations like *removal/addition* to the set of one number. The case is investigated when the dimension of the initial set is equal to 1 or 2. By the dimension of the set is meant the minimum number of disjoint arithmetic progressions that give this set in the union. For sets of dimension 2 the result is obtained only in cases of pairs of general position progressions. In this paper we give the results on how the dimension changes depending on whether the number x is *deleted/added* to.

Keywords: arithmetic progression, natural series, progressive set.