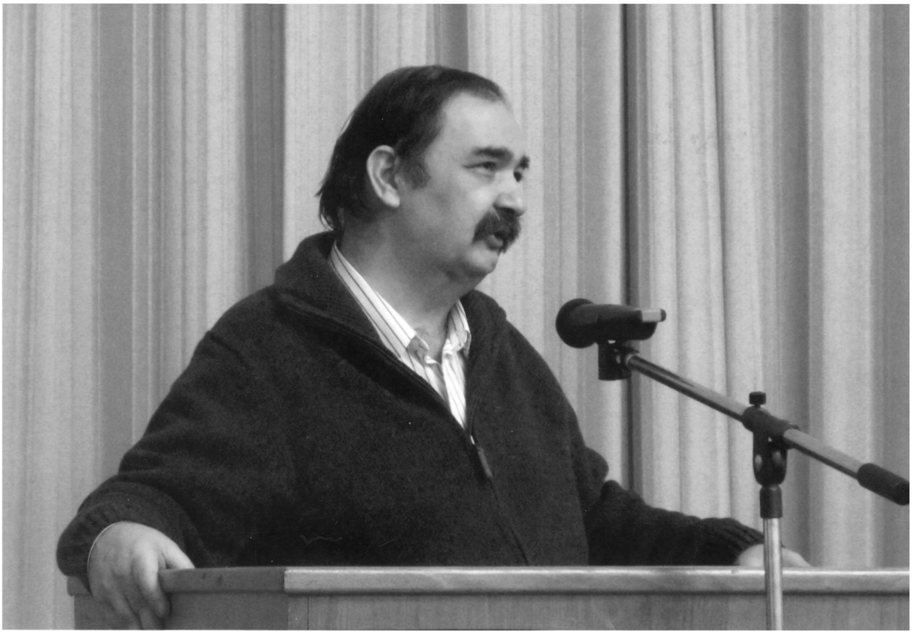

Октай Мурадович Касим-Заде
(29.04.1953 – 22.12.2020)

22 декабря 2020 года ушел из жизни заведующий кафедрой дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова профессор Октай Мурадович Касим-Заде. Механико-математический факультет потерял не только крупнейшего организатора и специалиста в области дискретной математики и математической кибернетики, но и удивительно доброжелательного, отзывчивого и чуткого человека, который тем не менее был принципиальным и твердым, когда это касалось общего дела, интересы которого он всегда ставил выше личных интересов.

Октай Мурад оглы Касим-Заде родился 29 апреля 1953 года в г. Баку, в семье ученого, заслуженного деятеля науки и техники Азербайджана, профессора, инженер-полковника Военно-Морского Флота, Касимзаде Мурада Салман оглы. И, наверное, поэтому интерес к науке и особенно к математике проявился у Октая с детских лет.

В школьные годы он неоднократно участвовал в Республиканских и

Всесоюзных Олимпиадах по математике, отличался широкой эрудицией, тягой к знаниям, организаторскими способностями.

В 1970 году, окончив бакинскую школу № 6 с золотой медалью, Октай поступил в МГУ им. М. В. Ломоносова на только что открывшийся и делавший первый набор студентов факультет вычислительной математики и кибернетики. Там произошло судьбоносное событие в жизни Октая Мурадовича — встреча с академиком Олегом Борисовичем Лупановым, который стал для Октая Мурадовича не только научным руководителем, но и образцом математика, педагога и руководителя.

Получив в 1975 году диплом с отличием, Октай Мурадович по распределению начал трудовую деятельность во Всесоюзном научно-исследовательском, проектно-конструкторском и технологическом институте источников тока.

В ноябре 1976 года в порядке перевода Октай Мурадович перешел на работу в Институт прикладной математики АН СССР (ныне ИПМ им. М. В. Келдыша РАН) на должность младшего научного сотрудника отдела теоретической кибернетики, который возглавлял чл.-корр АН СССР С. В. Яблонский и в котором работал О. Б. Лупанов. В Институте прикладной математики Октай Мурадович проработал сначала младшим научным сотрудником, затем научным сотрудником и старшим научным сотрудником до 2006 года (с 1992 г. — по совместительству).

В 1980 году в Совете при ВЦ АН СССР Октаем Мурадовичем защищена кандидатская диссертация на тему «Об одной мере сложности схем из функциональных элементов» (научный руководитель — О. Б. Лупанов).

По инициативе О. Б. Лупанова, начиная с 1986 года, О. М. Касим-Заде ведет педагогическую работу на кафедре дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова сначала как совместитель, а с января 1992 года механико-математический факультет становится его основным местом работы, где он работает сначала старшим научным сотрудником, затем доцентом и профессором кафедры дискретной математики.

В 1996 году Октаем Мурадовичем защищена докторская диссертация на тему «О синтезе некоторых классов управляющих систем, связанных с неявными и параметрическими представлениями булевых функций».

В том же 1996 году О. М. Касим-Заде становится заместителем заведующего кафедрой дискретной математики. В 2005 году ему присваивается ученое звание профессора.

В 2006 году после смерти О. Б. Лупанова Октай Мурадович Касим-Заде возглавляет кафедру дискретной математики и в должности заведующего кафедрой работает до последних дней.

Октай Мурадович был замечательным преподавателем, имел великолепные ораторские способности, легко и непринужденно приковывал к себе внимание аудитории. Он мог на простых и понятных примерах объяснять сложные вопросы. Умел пробудить в слушателях серьезный интерес к рассказываемому материалу: к примеру, несколько раз в разные годы студенты просили Октая Мурадовича продолжать чтение спецкурса по теории графов в каникулы. В своих учениках Октай Мурадович всячески старался развивать нестандартное мышление и умение мыслить самостоятельно, при этом благодаря своему недюжинному кругозору практически всегда мог направить в новом неожиданном направлении, если ученик оказывался в тупиковой ситуации при решении той или иной задачи. Октай Мурадович говорил, что для плодотворной работы необходимо, чтобы руководитель был заинтересован в решении задачи, которая дается ученику, но при этом сам воздерживался от попыток ее решить. Эти принципы он неукоснительно соблюдал сам, никогда не позволяя собственному научному любопытству помешать творчеству учеников. Отдельно стоит отметить, что Октай Мурадович научными достижениями учеников гордился больше чем своими. Под руководством О. М. Касим-Заде защитили кандидатские диссертации шесть учеников.

Октай Мурадович вел большую научно-организационную работу. Он был членом Ученого совета механико-математического факультета МГУ, трех диссертационных советов, входил в состав редколлегий журналов «Дискретная математика» и «Дискретный анализ и исследование операций». Под редакцией О. М. Касим-Заде вышло несколько выпусков «Кибернетического сборника» (совместно с О. Б. Лупановым) и сборника «Математические вопросы кибернетики», а также пять сборников материалов Международных семинаров «Дискретная математика и ее приложения», председателем организационного и программного комитетов которых он был с 2006 года. Под руководством О. М. Касим-Заде проведено несколько школ-семинаров «Синтез и сложность управляющих систем» и молодежных научных школ по дискретной математике и ее приложениям. О. М. Касим-Заде был заместителем председателя оргкомитета нескольких серий всероссийских и международных конференций по дискретной математике и теоретической кибернетике.

Круг научных интересов О. М. Касим-Заде сформировался под сильным влиянием академика О. Б. Лупанова и был необычайно широк. Недаром О. Б. Лупанов еще в 1987 году привлек Октая Мурадовича в качестве соредактора-составителя к издательству «Кибернетического сборника» — серии сборников переводов лучших работ зарубежных авторов по теоретической кибернетике.

В вопросах публикации собственных научных результатов Октай Мурадович был крайне щепетилен. Он отдавал в печать только те результаты, которые считал действительно принципиальными продвижениями в исследуемых задачах, при этом к своим результатам предъявлял очень серьезные требования. Во многом поэтому у О. М. Касим-Заде по современным меркам не так много публикаций (основных публикаций около 40). К сожалению, значительное число интересных результатов осталось неопубликованными. С другой стороны, практически каждая работа Октая Мурадовича представляет собой крупный вклад в решение соответствующих математических проблем. Все его работы написаны безукоризненно как с математической стороны, так и со стороны умения преподносить материал. Стоит отметить, что Октай Мурадович неоднократно отмечал, что есть, так сказать, три «математических языка»: первый — язык, на котором автор придумывает результаты, второй — язык, на котором следует рассказывать, а третий — язык, предназначенный для изложения результатов в виде научных статей; при этом, вообще говоря, эти три языка очень сильно отличаются друг от друга. Сам Октай Мурадович был непревзойденным мастером слова, как устного, так и письменного.

Среди всех научных работ О. М. Касим-Заде можно выделить три больших цикла. Основные результаты этих циклов относятся к одному из важнейших разделов дискретной математики и математической кибернетики — синтезу и сложности управляющих систем, однако возникающие при исследовании поставленных задач вопросы затрагивают большой спектр проблем из других разделов дискретной математики и математической кибернетики, а зачастую и выходят за рамки дискретной математики и математической кибернетики.

В работах [1–4, 6, 8, 9, 21; 1978–1998 гг] исследуются две меры сложности схем из функциональных элементов, называемые, соответственно, мощностью и активностью, которые тесно связаны с функционированием самих схем. Мощностью (активностью) схемы на входном наборе называется число элементов схемы, выходы которых принимают значение 1 (хотя бы на один вход которых подается значение 1, соответственно). Стандартным образом вводятся функции Шеннона мощности и активности в полном конечном базисе.

О. М. Касим-Заде установил общую картину расположения порядков роста функций Шеннона мощности, отвечающих конечным базисам, на условной «шкале» порядков роста от n до $2^n/n$. Оказалось, что в зависимости от базиса рост либо не выше квадратичного, либо экспоненциальный, причем, с одной стороны, существует бесконечное число попарно различных порядков экспоненциального роста, а с другой стороны, установлено, что для почти всех конечных базисов рост функции Шеннона мощности линеен.

Октаем Мурадовичем также исследована задача о возможностях построения схем, асимптотически наилучших по сложности и оптимальных по порядку роста по мощности. Оказалось, что в зависимости от базиса ответ может быть как положительный, так и отрицательный.

Для близкой к мощности меры сложности — активности — О. М. Касим-Заде установил внешне схожие результаты, которые, тем не менее, имеют и принципиальные отличия, в частности, экспоненциальных порядков роста функции Шеннона активности конечное число — не более четырех и не менее двух.

Кроме того, несколько работ Октая Мурадовича посвящено вопросам изучения мощности, максимальной и средней, конкретных функций — конъюнкций и дизъюнкций n переменных — в нескольких естественных базисах. В этом направлении получен ряд точных по порядку роста, асимптотически точных, а в некоторых случаях и окончательных результатов.

Второй цикл работ О. М. Касим-Заде, в который, в частности, вошли работы [7, 12, 14–16, 20, 23, 29; 1989–2007 гг], охватывает задачи выразимости и сложности неявных и параметрических представлений булевых функций, а также функций многозначной логики.

Прежде всего, Октай Мурадович решил известную проблему, установив, что два обобщения понятия выразимости посредством суперпозиций — неявная выразимость и параметрическая выразимость — в случае двузначной логики эквивалентны, а следовательно на множестве булевых функций эквивалентны и понятия неявной выразимости и неявной сводимости.

Еще одна важная задача, проблема неявной полноты в k-значной логике, $k \geq 2$, решалась последовательно. Сначала О. М. Касим-Заде решил проблему неявной полноты в случае булевых функций, причем были установлены критерии неявной полноты как в терминах неявно предполных классов, т. е. максимальных по включению не полных неявно систем функций, так и в терминах минимальных по включению неявно полных явно замкнутых классов; затем его ученица Е. А. Орехова получила критерий неявной полноты в трехзначной логике в терминах минимальных по включению неявно полных явно замкнутых классов, и, наконец, сам Октай Мурадович для произвольного $k \geq 2$ предложил эффективный критерий неявной полноты систем функций k-значной логики, основанный на проверке свойств функций, входящих в явное замыкание. М. В. Старостин, еще один ученик Октая Мурадовича, нашел ряд ранее неизвестных неявно предполных классов трехзначной логики и сформулировал критерий неявной полноты в трехзначной логике в терминах неявно предполных классов.

После решения вопросов выразимости, как это обычно и бывает, на первый план выходят проблемы представлений, в том или ином смысле наилучших. Для задач неявных и параметрических представлений булевых функций над заданным базисом Октаем Мурадовичем рассматривались две естественные меры сложности: 1) ранг, определяемый как число уравнений в системе, задающей функцию; 2) собственно сложность, определяемая как число функциональных символов, соответствующих функциям из базиса, во всех уравнениях системы.

Для соответствующих функций Шеннона, характеризующих ранги булевых функций от n переменных над базисом B, и называемых ранговой функцией для случая неявного представления и P-ранговой функцией для случая параметрического представления, О. М. Касим-Заде доказал, что множество всех ранговых и P-ранговых функций разбивается на шесть типов в зависимости от того, каким классом Поста является замыкание по суперпозиции множества B, а также установил точные значения ранговых и P-ранговых функций для пяти типов базисов B и порядок роста ранговых и P-ранговых функций для шестого типа.

Ряд интересных результатов о поведении ранговых функций в случае неявного представления функций многозначной логики получила Е. В. Михайлец, ученица Октая Мурадовича.

О. М. Касим-Заде провел глубокое исследование сложности параметрического представления булевых функций. Выяснилось, что по своей выразительной силе реализация булевых функций параметрическими представлениями близка к реализации булевых функций схемами из функциональных элементов. Октай Мурадович сначала установил асимптотику роста функции Шеннона сложности параметрического представления для произвольного параметрически полного конечного базиса, состоящего из булевых функций с произвольными положительными весами, а спустя несколько лет нашел асимптотику функции Шеннона и для любого конечного базиса. При этом вид нелинейных асимптотик определяется мощностной нижней оценкой и этот вид очень похож на вид асимптотики функции Шеннона сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в конечных базисах, состоящих из булевых функций с произвольными положительными весами; единственное отличие заключается в том, что вместо приведенного веса базиса в асимптотике фигурирует так называемый редуцированный вес базиса, при определении которого в случае нелинейной функции исходный вес функции делится на число существенных переменных, а не на число существенных переменных без единицы.

Стоит отметить, что О. М. Касим-Заде удалось основные результаты о сложности параметрических представлений в параметрически полных базисах перенести на задачи о сложности сетей из функциональных элементов. Кроме того, применение основных идей асимптотически оптимального метода синтеза параметрических представлений позволило понизить верхнюю оценку и установить асимптотику сложности для одной математической модели электронных схем на дополняющих МОП-транзисторах (КМОП-схем).

В третьем цикле работ [10, 11, 18, 25, 27, 29, 31–33; 1994–2013 гг] О. М. Касим-Заде исследовал проблемы сложности (в работах этого цикла под сложностью понимается число элементов в схеме) и глубины булевых функций в бесконечных базисах.

В рамках сложностной составляющей этого цикла необходимо отметить следующие результаты.

Во-первых, Октай Мурадович, доказал, что существует такая абсолютная константа c, что для всякого функционально полного бесконечного базиса поведение функции Шеннона сложности булевых функций в этом базисе не превосходит величины $c2^{n/2}$.

Во-вторых, был разработал метод получения верхних оценок сложности в произвольном бесконечном полном базисе, позволяющий получать верхние оценки функции Шеннона, сопоставимые с мощностными нижними оценками. Последняя модификация этого метода получения двусторонних оценок сложности дает возможность устанавливать нижнюю и верхнюю оценки функции Шеннона, отличающиеся на множитель порядка n в случае, если порядок роста функции Шеннона не менее линейного.

В-третьих, О. М. Касим-Заде показал, что порядок роста функции Шеннона сложности в полных бесконечных базисах либо равен 1, либо лежит в одном из двух интервалов: или между функциями $\log_2 n$ и n, или между функциями n и $2^{n/2}$, а также что любая функция одного действительного переменного, выразимая в виде суперпозиции рациональных функций с действительными коэффициентами, логарифмов и экспонент и имеющая порядок роста не ниже n и не выше $2^{O(\sqrt{n})}$, является порядком роста функции Шеннона сложности схем над некоторым бесконечным базисом (но порядки роста не исчерпываются этими функциями — например, порядком роста функции Шеннона может быть функция $n \log_2^* n$, где $\log_2^* n$ — двоичный сверхлогарифм числа n).

Кроме того, О. М. Касим-Заде исследовал задачу о сложности реализации булевых функций в бесконечном базисе антицепных функций, состоящем их характеристических функций антицепей и констант 0 и 1; на необходимость изучения теоретико-сложностных свойств этого базиса обращал внимание О. Б. Лупанов. Для сложности линейной функции в этом базисе установлена нижняя оценка вида $\Omega\left(\sqrt{n/\ln n}\right)$, экспоненциальная по отношению к мощностной оценке и, как следствие, получены в некотором смысле близкие нижняя и верхняя оценки функции Шеннона. Точное значение сложности линейной функции и порядок роста функции Шеннона в базисе антицепных функций установила ученица Октая Мурадовича О. В. Подольская. Она же показала, что в базисе, состоящем из всех антицепных функций и линейных функций от любого числа переменных, порядок роста функции Шеннона равен $\sqrt{n \log n}$, тем самым ответив на вопрос, существует ли базис, для которого порядок роста функции Шеннона лежит строго в интервале между функциями $\log n$ и n.

В задачах реализации булевых функций в бесконечных базисах О. М. Касим-Заде исследовал не только вопросы сложности, но и глубины.

Октай Мурадович установил, что для каждого бесконечного базиса B булевых функций либо существует единственное простое p, для которого степени полиномов с идемпотентными переменными над полем вычетов по модулю p для функций из B имеют максимальное значение, обозначаемое $\deg_p B$, либо такого простого p не существует. Для произвольной отличной от констант и переменных функции f ее глубина $D_B(f)$ над базисом B во втором случае ограничена числами 1 и 6, а в первом удовлетворяет неравенствам $\lceil \log_\gamma \deg_p f \rceil \leq D_B(f) \leq \lceil \log_\gamma \deg_p f \rceil + 5$, где $\gamma = \deg_p B$, а $\deg_p f$ — степень полинома с идемпотентными переменными над полем вычетов по модулю p, представляющего функцию f. Как следствие для функции Шеннона глубины $D_B(n)$ во втором случае найдется константа β, $1 \leq \beta \leq 6$, такая, что при всех достаточно больших n выполняется равенство $D_B(n) = \beta$, а в первом случае при всех n справедливы неравенства $\lceil \log_\gamma n \rceil \leq D_B(n) \leq \lceil \log_\gamma n \rceil + 5$.

Ученик Октая Мурадовича А. В. Кочергин исследовал поведение функции Шеннона глубины для случая конечных и бесконечных базисов, состоящих из функций k-значной логики, где $k \geq 3$, и ему удалось полностью описать качественную картину асимптотического поведения функции Шеннона глубины в этом случае.

Следует отметить еще несколько полученных Октаем Мурадовичем результатов, относящихся к сложности управляющих систем.

Основываясь на идеях получения уже упоминавшейся асимптотически точной верхней оценки сложности КМОП-схем, О. М. Касим-Заде установил [22] асимптотику функции Шеннона сложности реализации функций k-значной логики в классе алгоритмов, являющихся обобщениями на k-значный случай некоторых видов бинарных программ.

В работе [5] Октаем Мурадовичем для известной задачи о монотонной сложности многочленов (минимальном числе операций умножения на положительные числа, сложения и умножения, достаточном для вычисления заданного многочлена от этих переменных с неотрицательными коэффициентами) в случае реализации многочленов с коэффициентами из множества $\{0,1\}$ и имеющими по каждой переменной степень 1 установлен следующий результат. Сложность многочлена от n переменных, содержащего $2^{n/2}-1$ слагаемое и задаваемого проверочной матрицей исправляющего две ошибки двоичного кода Боуза—Чоудхури—Хоквингема, имеющей размер $n \times (2^{n/2}-1)$, имеет порядок роста $2^{n/2}$, при этом минимально возможное число операций сложения, достаточное для его вычисления, в точности равно $2^{n/2}-2$.

Ряд интересных результатов О. М. Касим-Заде получил (см., например, [17, 24, 34]) также в задаче о построении идеализированных электрических схем из единичных сопротивлений наименьшей сложности и в задаче о разбиении прямоугольника на квадраты.

Ряд публикаций Октая Мурадовича нельзя отнести к проблематике теории сложности, однако зачастую, сама постановка исследуемых в них вопросов возникала при решении различных задач синтеза и сложности управляющих систем.

Так, например, рассматриваемая в [19] комбинаторная задача покрытия n-мерного булева куба такими антицепями, что в наборах каждой антицепи (кроме состоящей только из нулевого набора) есть общая единичная компонента, возникла при изучении ранга неявных представлений булевых функций над замкнутыми классами монотонных функций, не меньших какой-либо своей переменной. О. М. Касим-Заде нашел точное значение минимально возможного числа таких антицепей, покрывающих n-мерный булев куб, и для всех n явно построил минимальное покрытие.

В работах [13, 28] изучались два вида обобщенных инвариантных классов С. В. Яблонского — классы, инвариантные относительно подстановок произвольных одноместных функций, и классы, инвариантные относительно подстановок монотонных одноместных функций. В обоих случаях Октаем Мурадовичем установлены верхние оценки числа функций от фиксированного числа переменных в таких классах, позволившие доказать, что в обоих случаях любой ненулевой класс (класс с ненулевым параметром) совпадает с P_2.

Отдельно стоит сказать про написанное О. М. Касим-Заде учебное пособие «Одна экстремальная задача комбинаторного анализа» [26], в котором рассматривается ряд вопросов, начиная с простейших фактов и заканчивая нерешенными проблемами, касающихся одной из важнейших экстремальных задач комбинаторного анализа и теории графов, известной как проблема Заранкевича. В общем случае проблема Заранкевича заключается в нахождении наибольшего натурального числа $N = N_{a,b}(m, n)$, такого, что существует булева матрица размера $m \times n$ с N единицами, не содержащая единичных подматриц размера $a \times b$, а также в построении таких булевых матриц.

В этом пособии ярко проявилось умение Октая Мурадовича постепенно, начиная с простых и понятных примеров, подводить читателя к все более и более серьезным утверждениям, выделять узловые моменты и подробно их объяснять, устанавливать общую сущность казалось бы совсем разных объектов, да и просто доступно, красиво и при этом предельно точно изъясняться.

К сожалению, многие результаты своих исследований Октай Мурадович не успел опубликовать...

Широта научных интересов Октая Мурадовича также нашла свое отражение в разнообразии тематик работ его учеников. Даже по опубликованным работам (а доведено до диссертационных работ или опубликовано было тоже, к сожалению, не все) видно, что результаты учеников относятся к самым разным разделам дискретной математики, начиная с вероятностного направления в дискретной математике и применения теории формальных языков и грамматик (А. Д. Яшунский и А. В. Кочергин) и заканчивая изучением свойств ветвящихся цепных дробей (Н. Р. Закиров), тестовыми задачами на графах (Е. В. Дебрев) и вопросами сложности реализации функций действительного переменного сетями из интеграторов и сумматоров (А. И. Проскуряков). Отрадно, что значительная часть учеников Октая Мурадовича продолжает вести активную научную работу.

Октай Мурадович был высокоэрудированным ученым, общительным, доброжелательным и отзывчивым человеком. Светлая память об Октае Мурадовиче Касим-Заде сохранится в сердцах родных, близких, коллег и друзей.

С. Б. Гашков, О. С. Дудакова, М. Д. Ковалев,
Р. М. Колпаков, В. В. Кочергин, Н. П. Редькин,
А. В. Чашкин, В. Н. Чубариков, А. Д. Яшунский

Избранные публикации О. М. Касим-Заде

1. Об одновременной минимизации сложности и мощности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 33. — М.: Наука, 1978. — С. 215–220.

2. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // ДАН СССР. — 1980. — Т. 250, № 4. — С. 797–800.

3. Об одной мере сложности схем из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. Вып. 38. — М.: Наука, 1981. — С. 117–179.

4. О мощности схем в базисах некоторых типов // Дискретная математика и математическая кибернетика. Серия «Вопросы кибернетики». — Т. 86. —М.: ВЦ АН СССР, 1982. — С. 77–93.

5. О сложности монотонных многочленов // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 136–138.

6. О влиянии базиса на активность схем из функциональных элементов // Труды Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — С. 143–145.

7. О сложности реализации булевых функций в одной модели электронных схем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 145–160.

8. Об одной мере активности схем из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. — М.: Наука, 1992. — С. 218–228.

9. Kassim-Zade O. M. On some complexity measures for Boolean functions // Complexity and realization of Boolean functions. —Dagstuhl-Seminar-Repot № 45, 24.8–28.8.92. — 1992.

10. О сложности схем в одном бесконечном базисе // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1994. — № 6. — С. 40–44.

11. О сложности реализации булевых функций схемами в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. — 1995. — Т. 2, № 1. — С. 7–20.

12. О неявной выразимости булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — № 2. — С. 44–49.

13. О классах булевых функций, инвариантных относительно подстановки функций от одной переменной // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — № 3. — С. 79–82.

14. О синтезе сетей из функциональных элементов // Доклады Академии наук. — 1996. — Т. 348, № 2. — С. 159–161.

15. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Доклады Академии наук. — 1996. — Т. 348, № 3. — С. 299–301.

16. Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 133–188.

17. О сложности схем из единичных сопротивлений и о некоторых свойствах чисел Фибоначчи // Аналитическая теория чисел и приложения. Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. — 1997. — Т. 218. — С. 233–247.

18. Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 1997. — № 4. — С. 59–61.

19. О минимальных покрытиях булева куба центрированными антицепя-

ми // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 1997. — Т. 4, № 3. — С. 9–17.

20. О сложности параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. — М.: Наука, 1998. — С. 85–160.

21. О мощности индивидуальных функций // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1998. — С. 63–65.

22. О сложности реализации функций в одном классе алгоритмов // Материалы IX Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем». — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1999. — С. 25–30.

23. О поведении функций Шеннона сложности параметрических представлений булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2001. — № 3. — С. 66–68.

24. О минимальных разбиениях плоских прямоугольников на квадраты // Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения». — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. — С. 263–265.

25. Об одном методе получения оценок сложности схем над бесконечными базисами // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: Наука, 2002. — С. 247–254.

26. Одна экстремальная задача комбинаторного анализа. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2004. — ISBN 978-5-458-26668-0. — 88 с.

27. Об одном методе получения оценок сложности схем над произвольным бесконечным базисом // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2004. —Т. 11, № 2. — С. 41–65.

28. О метрических свойствах обобщенных инвариантных классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. — М.: Наука, 2006. — С. 9–34.

29. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2007. — № 1. — С. 18–21.

30. О неявной полноте в k-значной логике // Вестник Московского уни-

верситета. Серия 1. Математика. Механика. — 2007. — № 3. — С. 10–14.

31. О глубине булевых функций над произвольным бесконечным базисом // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 45–69.

32. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным бесконечным базисом // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2012. — № 6. — С. 55–57.

33. О порядках роста функций Шеннона сложности схем над бесконечными базисами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2013. — № 3 — С. 55–57.

34. О точных значениях сложности чисел при реализации схемами из единичных сопротивлений // Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова. — М., 2016. — С. 134–137.