Тестирование бесповторных функций в элементарном базисе, расширенном всеми поляризуемыми слабоповторными функциями

А. А. Вороненко[1]

Д. В. Кафтан[2]

В работе доказано, что в базисе, состоящем из элементарного и всех поляризуемых слабоповторных функций, функция Шеннона для длины теста относительно бесповторной альтернативы не превышает $3n-2$.

Ключевые слова: бесповторная функция, проверяющее тестирование, слабоповторные функции.

В статье без определения используются базовые понятия дискретной математики (см., например, [1]) и пионерской работы [2]. В работе [2] был введен аппарат канонических деревьев — однозначное представление бесповторных функций для задач тестирования.

Множество n-мерных булевых наборов T называется *тестом относительно бесповторной альтернативы* [2] в базисе B для бесповторной в том базисе функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, существенно зависящей от всех переменных, если для любой отличной от f бесповторной в базисе B функции $h(x_1,\ldots,x_n)$ существует набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in T$, такой, что $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \neq h(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

---

[1] *Вороненко Андрей Анатольевич* — профессор кафедры кафедры математической кибернетики ВМК МГУ, д.ф.-м.н., e-mail: dm6@cs.msu.ru.

Voronenko Andrey Anatolievich — professor, DR, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics

[2] *Кафтан Дарья Владимировна* — инженер 1 категории лаборатории дискретных управляющих систем и их приложений ВМК МГУ, e-mail: blond.programmist@gmail.com.

Kaftan Daria Vladimirovna — first cathegory engineer, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics

Слабоповторные функции с точностью до конгруэнтности и взятия отрицаний были описаны в работе [3]:

$$
\begin{aligned}
f_d^s &= x_1(\bar{x}_2 \vee x_3x_4 \dots x_s) \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_s, && s \geq 3,\\
f_t^s &= x_1x_2 \dots x_s \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_s, && s \geq 2,\\
f_m^s &= x_1(x_2 \vee \dots \vee x_s) \vee x_2x_3 \dots x_s, && s \geq 3,\\
f_4 &= x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4,\\
f_5 &= x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_2x_3 \vee x_4).
\end{aligned}
$$

Функция Шеннона для длины теста относительно бесповторной альтернативы в элементарном базисе, дополненном f_t^s, равна $\Theta(n^s)$ [4]. В работе [5] в теоремах 1 и 2 было доказано, что в любом базисе, получающемся из элементарного добавлением специальной функции, данная функция Шеннона растет линейно. При добавлении функции f_m^s она не превосходит $(s+2)n$. Для элементарного базиса в работе [6] была получена верхняя оценка длины функции Шеннона — $2n+1$.

Назовем для краткости *специальными* функции f_4, f_5 и f_m^s. Через B^+ обозначим базис, получаемый добавлением к конъюнкции и дизъюнкции всех специальных функций. Обозначим $B = B^+ \cup \{\neg\}$. Обозначим через $T(n)$ функцию Шеннона для длины теста относительно бесповторной альтернативы в базисе B, а через $T^+(n)$ — для длины проверяющего теста в базисе B^+.

Лемма 1. *Справедливо неравенство* $T(n) \leqslant T^+(n) + 2n$.

Доказательство. Задача тестирования относительно бесповторной альтернативы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в базисе B сводится к проверяющему тестированию в базисе B^+ функции, получаемой из f заменой антимонотонных переменных на их отрицания. При этом требуется для каждой переменной добавить пару соседних по ней наборов, на которых функция принимает различные значения.

Лемма доказана. □

Каноническим деревом функции $f(x_1, \dots, x_n)$, бесповторной в базисе B^+, назовем [5] помеченное корневое дерево, построенное согласно следующим правилам.

1) Листья дерева помечены переменными $x_1, \dots, x_n$. Разные листья помечены разными переменными.

2) Внутренние вершины дерева соответствуют подформулам бесповторной формулы и помечены функциями из множества $\{\vee, \&\}$ или специальной функцией.

3) Если специальная функция — f_4, то над вершиной находятся четыре инцидентных ребра, пронумерованных $(1, 2, 3, 4)$. Канонические деревья, получаемые с помощью перестановки ребер $\binom{1\,2\,3\,4}{4\,3\,2\,1}$ над вершинами, помеченными f_4, считаются эквивалентными.

4) Если специальная функция — f_5, то над вершиной находятся пять инцидентных ребер, пронумерованных $(1, 2, 3, 4, 5)$. Канонические деревья, полученные с помощью группы перестановок, порождаемых перестановками ребер $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{5\,4\,3\,2\,1}$ и $\binom{1\,2\,3\,4\,5}{2\,1\,3\,5\,4}$ над вершинами, помеченными f_5, считаются эквивалентными.

5) Если специальная функция — f_m^s, то над вершиной находятся s инцидентных ребер с выделенным при $s \geqslant 4$ первым ребром.

6) Над вершиной, помеченной $\vee$ или $\&$, расположено не менее двух смежных вершин.

7) Вершины, помеченные функцией $\vee$ $(\&)$, не смежны с вершинами, помеченными функцией $\vee$ $(\&)$.

Каноническое дерево D реализует функцию f естественным образом. Единственность канонического дерева была обоснована в работах [5, 7].

В работе [5] были доказаны лемма 2 и леммы 4–6. Утверждения были доказаны для базисов, состоящих из конъюнкции, дизъюнкции и одной специальной функции. Дословным повторением этих доказательств с учетом двойственных случаев обосновываются леммы 2 и 3.

Лемма 2. *Пусть бесповторная в базисе B^+ функция $h(z_1, z_2, z_{k+2}, \ldots, z_n)$ существенно зависит от $n - k + 1 \geqslant 2$ переменных $(k \geqslant 2)$, и лист ее канонического дерева, который помечен переменной z_1, смежен с вершиной u, помеченной конъюнкцией (дизъюнкцией) или специальной функцией, а лист, помеченный z_2, лежит в каком-то другом поддереве над u. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1 \vee \ldots \vee x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ $(h(x_1 \& \ldots \& x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n))$. Пусть $h(z_1, z_2, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n) = z_1 \& z_2$ $(z_1 \vee z_2)$. Тогда тест T', содержащий наборы теста T функции $f|_{x_k=0}$ $(f|_{x_k=1})$ с добавленными компонентами $x_k = 0$ $(x_k = 1)$ и наборами из строки 1 (строки 2) таблицы 1 является проверяющим тестом для функции f на множестве всех бесповторных в B^+ функций, существенно зависящих от n переменных.*

Лемма 3. *Пусть дана специальная функция g размерности s и пусть бесповторная в базисе B^+ функция $h(z_1, z_{s+1}, \ldots, z_n)$ существенно зависит от $n - s + 1$ переменных, где $n > s$, и лист, который помечен переменной z_1, входит в вершину u, помеченную дизъюнкцией (конъюнкцией) или любой специальной функцией.*

Таблица 1. Подстановка $f|_{x_1=\alpha}$ для вершины v

№	Пометка v	α	Изменение дерева	Наборы для теста
1	$x_1 \vee \ldots \vee x_k$	0	В D удаляется лист x_1 и при $k = 2$ вершина v заменяется на лист x_2	$f(1, 1 \ldots, 1, 0, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n) = 0$ $f(1, 0, \ldots, 0, 1, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n) = 1$
2	$x_1 \& \ldots \& x_k$	1	В D удаляется лист x_1 и при $k = 2$ вершина v заменяется на лист x_2	$f(0, 0, \ldots, 0, 1, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n) = 1$ $f(0, 1, \ldots, 1, 0, \beta_{k+2}, \ldots, \beta_n) = 0$
3	f_4	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_3(x_2 \vee x_4)$	$f(1, 1, 0, 0, \beta_5, \ldots, \beta_n) = 1$, $f(1, 0, 1, 0, \beta_5, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(1, 0, 0, 1, \beta_5, \ldots, \beta_n) = 0$
4	f_4	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee x_3 x_4$	$f(0, 0, 1, 1, \beta_5, \ldots, \beta_n) = 1$, $f(0, 1, 0, 1, \beta_5, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(0, 1, 1, 0, \beta_5, \ldots, \beta_n) = 1$
5	f_5	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_5(x_2 \vee x_3 x_4)$	$f(1, 1, 0, 0, 0, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 1$, $f(1, 0, 0, 1, 0, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(1, 0, 1, 0, 1, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(1, 0, 1, 1, 0, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 1$
6	f_5	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee x_4(x_3 \vee x_5)$	$f(0, 1, 1, 1, 0, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(0, 1, 1, 0, 1, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 1$, $f(0, 1, 0, 0, 1, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(0, 0, 0, 1, 1, \beta_6, \ldots, \beta_n) = 1$
7	f_m^s	0	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \& \ldots \& x_s$	$f(1, 0, 0, \ldots, 0, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(1, 1, 0, \ldots, 0, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 1$, $f(1, 0, 1, \ldots, 0, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 1$, ..., $f(1, 0, \ldots, 0, 1, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 1$
8	f_m^s	1	Поддерево в вершине v заменяется на дерево функции $x_2 \vee \ldots \vee x_s$	$f(0, 1, 1, \ldots, 1, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 1$, $f(0, 0, 1, \ldots, 1, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 0$, $f(0, 1, 0, \ldots, 1, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 0$, ..., $f(0, 1, \ldots, 1, 0, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = 0$

Пусть функция f зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и для f и h выполнены следующие равенства:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g(x_1, \ldots, x_s), x_{s+1}, \ldots, x_n),$$

$$h(z_1, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n) = z_1.$$

Тогда тест T', содержащий наборы теста T функции $f|_{x_1=0}$ ($f|_{x_1=1}$) с добавлением компоненты $x_1 = 0$ ($x_1 = 1$), и наборов из таблицы 1, является проверяющим тестом для функции f на множестве всех бесповторных в B^+ функций, существенно зависящих от n переменных.

Теорема 1. *Справедливо неравенство*:

$$T^+(n) \leqslant 3n - 4 \text{ при } n \geqslant 2$$

Доказательство. Мы построим тест T_A для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, применяя последовательно леммы 2 и 3. Длина теста T_A только увеличится, если все пометки f_4 заменить на f_m^4, а пометки f_5 заменить на f_m^5 в дереве функции f. Поэтому $|T_A(f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant F_A(u_1, \ldots, u_l)$, где $u_1, \ldots, u_l$ — набор натуральных чисел, определяемый степенями захода вершин дерева. Каждой вершине, помеченной дизъюнкцией или конъюнкцией, соответствует набор из $t-1$ единиц, где t – степень захода вершины, а каждой вершине, помеченной специальной функцией – число $t-1$. При этом получается, что $u_1 + \ldots + u_l = n - 1$.

Функционал F_A обладает следующими свойствами:

1) $F_A(1, u_2, \ldots, u_l) = F_A(u_2, u_3, \ldots, u_l) + 2$; при этом $F_A(1) = 2$.

2) $F_A(u_1, u_2, \ldots, u_l) = F_A(\underbrace{1, \ldots, 1}_{u_1 - 1}, u_2, \ldots, u_l) + u_1 + 1$.

Из этих свойств следует:

$$F_A(u_1 + u_2, \ldots, u_l) = F_A(u_1, u_2, \ldots, u_l) + 1.$$

Поэтому

$$\max_{u_1 + \ldots + u_l = n-1} F_A(u_1, \ldots, u_l) = F_A(n-1),$$

$$F_A(n-1) = n + F_A(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-2}) \leqslant n + 2(n-2) = 3n - 4.$$

□

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$T(n) \leqslant 3n - 2 \text{ при } n \geqslant 2$$

Таблица 2. Наборы, на которых показывается существенность x_1

№	Значение подфункции $f_{x_1=\alpha}$	Значение из M_n
1	$f(0,0,\ldots,0,1,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = (0\vee\ldots\vee 0)\&1 = 0$	$f(1,0,\ldots,0,1,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = 1$
2	$f(1,1,\ldots,1,0,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = (1\&\ldots\&1)\vee 0 = 1$	$f(0,1,\ldots,1,0,\beta_{k+2},\ldots,\beta_n) = 0$
3	$f(0,1,0,0,\beta_5,\ldots,\beta_n) = f_4(0,1,0,0) = 0$	$f(1,1,0,0,\beta_5,\ldots,\beta_n) = 1$
4	$f(1,1,0,1,\beta_5,\ldots,\beta_n) = f_4(1,1,0,1) = 1$	$f(0,1,0,1,\beta_5,\ldots,\beta_n) = 0$
5	$f(0,1,0,0,0,\beta_6,\ldots,\beta_n) = f_5(0,1,0,0,0) = 0$	$f(1,1,0,0,0,\beta_6,\ldots,\beta_n) = 1$
6	$f(1,1,0,0,1,\beta_6,\ldots,\beta_n) = f_5(1,1,0,0,1) = 1$	$f(0,1,0,0,1,\beta_6,\ldots,\beta_n) = 0$
7	$f(0,1,0,\ldots,0,\beta_{s+2},\ldots,\beta_n) = f_m^s(0,1,0,\ldots,0) = 0$	$f(1,1,0,\ldots,0,\beta_{s+1},\ldots,\beta_n) = 1$
8	$f(1,0,1,\ldots,1,\beta_{s+2},\ldots,\beta_n) = f_m^s(1,0,1,\ldots,1) = 1$	$f(0,0,1,\ldots,1,\beta_{s+1},\ldots,\beta_n) = 0$

Доказательство. По теореме 1 и лемме 1 при $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $T(n) \leqslant 5n - 4$.

Не ограничивая общности рассуждений, можем считать тестируемую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ монотонной. При этом обозначим $M_n,\ldots,M_2$ множества наборов, добавляемые на каждом шаге алгоритма теоремы 1 в тест функции f, а через M_1 — полный тест для функции последней переменной. Заметим, что $M_n \cup \ldots \cup M_2 = T_A$.

Докажем от противного, что множество $M_n \cup \ldots \cup M_1$ — тест относительно бесповторной альтернативы для функции f. Предположим, что $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция с минимальным числом аргументов, для которой это не так. Тогда $M_{n-1} \cup \ldots \cup M_1$ — тест для $f_{x_1=\alpha}$.

Таблица 2 показывает существенность и монотонность переменной x_1 во всех возможных случаях. Множество наборов $M_n \cup \ldots \cup M_1$ содержит по построению T_A — проверяющий тест для функции f в базисе B^+. Так как $x_1 = \alpha$ — незабивающая подстановка для f, то $M_{n-1} \cup \ldots \cup M_1$ показывает существенность оставшихся переменных. То есть $M_n \cup \ldots \cup M_1$ является тестом для функции f. Противоречие. При этом

$$|M_n \cup \ldots \cup M_1| \leqslant |T_A| + |M_1| \leqslant 3n - 2.$$

Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Алексеев В.Б, *Лекции по дискретной математике*, М.: ИНФРА-М, Москва, 2012.

[2] Вороненко А.А, “О проверяющих тестах для бесповторных функций”, *Математические вопросы кибернетики*, 2002, № 11, 163–176.

[3] Стеценко В.А., “О предплохих базисах в P_2”, *Математические вопросы кибернетики*, **4** (1992), 139–177.

[4] Chistikov D.V., Fedorova V.S, Voronenko A.A., “Certificates of Non-Membership for Classes of Read-Once Functions”, *Fundamenta Informaticae, издательство I O S press (Netherlands)*, **132**:1 (2014), 63–77.

[5] Кафтан Д.В., “Тестирование бесповторных функций в некоторых расширенных элементарных базисах”, *Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2021, № 3, 13–19.

[6] Чистиков Д.В., “Тестирование бесповторных функций в элементарном базисе”, *Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2011, № 4, 37–40.

[7] Кафтан Д.В., “Древесное представление бесповторных функций в расширенных элементарных базисах”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, **3**:43 (2017), 37–49.

Testing read-once functions in the elementary basis augmented with all weakly read-multiple unate functions

Voronenko A.A., Kaftan D.V.

It is proved that the Shannon function for the test length with respect to a read-once alternative in the elementary basis augmented with all weakly read-multiple unate functions does not exceed $3n - 2$.

Keywords: read-once functions, checking test, weakly read-multiple functions.

References

[1] Alekseev V.B., *Lekcii po diskretnoj matematike*, INFRA-M, Moscow, 2012 (In Russian).

[2] Voronenko A.A., “O proveryayushchih testah dlya bespovtornyh funkcij”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, 2002, № 11, 165–176 (In Russian).

[3] Stecenko B.A., “O predplohih bazisah v P_2”, *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, **4** (1992), 139–177 (In Russian).

[4] Chistikov D.V., Fedorova V.S, Voronenko A.A., “Certificates of Non-Membership for Classes of Read-Once Functions”, *Fundamenta Informaticae, издательство I O S press (Netherlands)*, **132**:1 (2014), 63–77.

[5] Kaftan D.V., “Testirovanie bespovtornyh funkcij v nekotoryh rasshirennyh elementarnyh bazisah (to be translated)”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2021, № 3, 13–19 (In Russian).

[6] Chistikov D.V., "Testing read-once functions over the elementary basis", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **35**:4 (2011), 189–192.

[7] Kaftan D.V., "On tree representation of read-once functions in extended elementary bases", *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki.*, **3**:43 (2017), 37–49.