Поиск семейства простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

А. А. Медведев[1]

Исследована алгоритмическая сложность задачи о поиске семейства простых циклов, обходящих каждую вершину орграфа с полустепенями вершин, не превосходящими 2. Рассмотрены поисковый и оптимизационный ее варианты. Показана полиномиальная разрешимость задачи в обоих вариантах, предложен алгоритм со временем работы $O(n^3)$, для частной постановки представлен алгоритм, требующий $O(n^2)$ операций; n — количество вершин орграфа.

Ключевые слова: ориентированные графы, простые циклы, задачи поиска, оптимизация, класс P, полиномиальная разрешимость.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются частные постановки задачи о поиске в заданном ориентированном графе такого набора непересекающихся простых циклов, который покрывал бы все множество вершин этого графа. Она, в свою очередь, является обобщением задачи о гамильтоновом цикле, известной в разрешимостном (определить, является ли заданный граф гамильтоновым) и нескольких оптимизационных вариантах (требуется найти гамильтонов цикл с ограниченным тем или иным образом весом, если такой цикл существует). На сегодняшний день доказана NP-полнота поисковой задачи о гамильтоновом цикле в общей постановке (на произвольных ориентированных и неориентированных графах) [1], трехсвязных 3-регулярных двудольных графах [2], подграфах квадратных решеток [3] и кубических подграфах квадратных решеток [4], орграфах с полустепенями вершин не более 2 [5]. В то же время известна полиномиальная разрешимость этой задачи на четырехсвязных планарных графах [6], неориентированных графах с максимальной степенью вершин, не превосходящей 3 [7], и в оптимизационной постановке (иначе — задачи коммивояжера) на графах, матрицы весов которых являются матрицами Демиденко [8] и в общей постановке [9]. Кроме того, по-

[1] *Медведев Анатолий Александрович* — студент каф. "Высшая математика"(ФН-1) факультета "Фундаментальные науки"(ФН) МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: medvedevaa@student.bmstu.ru.

Medvedev Anatoly Alexandrovich — student, Bauman Moscow State Technical University, Department of Fundamental Sciences, Chair of Higher Mathematics.

лучен ряд проверяемых за полиномиальное время достаточных условий существования гамильтонова цикла: Дирака–Оре [10, 11], Гуйя–Ури [12], Woodall [13], Christofides [14], Keevash [15], Kelly [16]. Задача, исследование которой проводится в настоящей работе, представляет интерес как связанная с задачей о гамильтоновом цикле, поскольку всякое решение последней может служить решением задачи о семействе циклов. Ниже эта задача рассмотрена в разрешимостной и оптимизационной постановках.

2. Неоптимизационная задача о семействе простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

Определение 1. Вершинно-простым циклом в ориентированном графе $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, называется такая последовательность из m вершин и m дуг $v_1, e_1, v_2, e_2, ..., v_m, e_m$, что $\forall i(i = \overline{1, m-1})(v_i \in V)(e_i \in E)(e_i = (v_i, v_{i+1}))$ и, кроме того, $e_m = (v_m, v_1)$, причем если $i \neq j$, то $v_i \neq v_j$.

Определение 2. Ориентированный граф $G = (V, E)$ со множеством вершин V и дуг E называется взвешенным, если для него определена функция $w = w(v, u), v, u \in V$, равная некоторому значению из $R \backslash \{0\}$, если $(v, u) \in E$, и 0 в противном случае.

Определение 3. Пусть элементы множества вершин V пронумерованы. Матрицей весов W взвешенного орграфа из определения 2 называется такая таблица размерности $|V| \times |V|$, что $W_{ij} = w(v_i, v_j)$.

Определение 4. Пусть элементы множества вершин V пронумерованы. Матрицей смежности A взвешенного орграфа из определения 2 называется такая таблица размерности $|V| \times |V|$, что $A_{ij} = 1$, если $(v, u) \in E$, и 0 в противном случае.

Определение 5. Ориентированный граф $G = (V, E)$ со множеством вершин V и дуг E невзвешенный, если его матрица весов W тождественна матрице смежности A.

Определение 6. (Задача НСЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством: $\forall v(v \in \in V)(deg^{out} v \leq 2)(deg^{in} v \leq 2)$. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них.

Пример 1. Рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поиском в глубину находим в нем простые циклы: $1-2-3-1$, $1-2-3-4-5-1$, $1-3-1$, $1-3-4-5-1$, $4-5-4$.

Следующие наборы циклов являются решением задачи НСЦ для этого орграфа: $\{1-2-3-4-5-1\}, \{1-2-3-1, 4-5-4\}$.

Далее рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности A_2,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

на котором задача НСЦ решения не имеет.

Поиском в глубину находятся циклы: $1-2-5-4-1$, $1-5-4-1$.

Никакой набор, составленный из этих циклов, очевидно не может быть решением задачи хотя бы потому, что ни один из них не содержит вершины 3.

Определение 7. XOR-КНФ называется форма представления булевой функции в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{k=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{|A_k|} x_{\alpha_{kj}}^{\sigma_{kj}} = \bigwedge_{k=1}^{m} R_k(x, \Sigma_k, A_k), \qquad (1)$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция,
$x_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}$, — булевы переменные,
A_k — упорядоченное по возрастанию множество индексов переменных, входящих в k-й XOR-дизъюнкт R_k, $A_k \subseteq 1, 2, 3, \ldots, n$,
α_{kj} — j-й элемент множества A_k,
$\sigma_{kj} \in \{0, 1\}, j = \overline{1, n}$, — степени, трактуемые таким образом: если $\sigma_{kj} = 0$, то переменная $x_{\alpha_{kj}}$ входит в R_k без отрицания; если $\sigma_{kj} = 1$, то с отрицанием,
x — булев вектор, координатами которого являются переменные $x_i, i = \overline{1, n}$,
Σ_k — множество степеней переменных, входящий в k-й XOR-дизъюнкт R_k, упорядоченное так, что первый его элемент, σ_{k1}, является степенью первой переменной в R_k, второй, σ_{k2}, — второго и т. д.

Определение 8. (Задача XOR-SAT) Пусть имеется булева функция, представленная в XOR-КНФ 1. Требуется найти хотя бы один такой набор значений ее переменных, при котором она выполняется.

Теорема 1. *Задача XOR-SAT принадлежит к классу P и может быть решена за время $O(n^3)$, где n — число переменных, методом Гаусса [17].*

Лемма 1. *Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно; всякий его подграф, имеющий для каждой вершины ровно одну исходящую и одну входящую дугу, является семейством вершинно-простых циклов, обходящим все вершины графа G. Если же такого семейства граф G не содержит, то нет и подграфа, обладающего указанным свойством.*

Доказательство. Так как для каждой вершины была выбрана лишь одна исходящая и одна входящая дуга, то между двумя любыми смежными вершинами в полученном подграфе существует единственный путь. Кроме того, это означает, что каждая вершина смежна лишь с одной по вхождению и лишь с одной по исходу. Таким образом, если путь между двумя вершинами рассматриваемого подграфа существует, то он единствен. Следовательно, подграф состоит из набора вершинно-простых цепей. Покажем теперь, что все цепи в этом наборе являются замкнутыми, то есть вершинно-простыми циклами. Предположим противное, то есть, что хотя бы одна из цепей незамкнута. Если это так, то подграф должен содержать две вершины, у одной из которых исходящая, а у другой входящая степень равна нулю. Но это невозможно по построению. Значит, подграф представляет собой семейство простых циклов. Оно обходит все вершины графа G, так как для каждой его вершины была выбрана пара инцидентных ей дуг. Далее, рассмотрим орграф G', о котором известно, что он не содержит семейства вершинно-простых циклов, обходящих все его вершины. Допустим, что при этом удалось выделить в G' подграф, включающий все его вершины, причем такой, что каждая из них инцидентна лишь одной дуге по вхождению и лишь одной по исходу. Но, в силу доказанного выше, это означает, что в орграфе G' содержится семейство вершинно-простых циклов, обходящих все его вершины. Из этого противоречия следует, что если в орграфе нет такого семейства, то его подграфа с указанным свойством также не существует, это совпадает с утверждением теоремы. □

Теорема 2. *Задача НСЦ принадлежит к классу P.*

Доказательство. Сведем задачу НСЦ к задаче XOR-SAT. Пусть орграф G задан в виде матрицы смежности или матрицы весов. Заметим, что так как по условию задачи, каждая его вершина должна содержаться ровно в одном цикле искомого семейства, все циклы которого должны быть вершинно-простыми, то в подграфе, являющемся решением задачи, из каждой вершины будет исходить ровно одна дуга, также как и входит в нее будет только одна. Таким образом, в тех случаях, когда входящая или исходящая степень вершины более единицы, необходимо выбрать лишь одну из входящих (или, соответственно, исходящих) дуг, причем для каждой вершины такой набор из одной входящей и одной исходящей дуги должен быть найден, если только исходное семейство существует (если граф его не содержит, то для какой-либо вершины такой набор получить невозможно, иначе она оказалась бы включенной в цикл).

Пусть $m = |E|$. Произвольным образом упорядочим и пронумеруем элементы множества E. Введем булевые переменные $x_1, \ldots, x_m$, такие, что

$$x_i = \begin{cases} 1, e_i \in E_C; \\ 0, e_i \notin E_C. \end{cases}$$

Где E_C — множество дуг искомого семейства.

Составим булеву функцию в XOR-КНФ, объединив в XOR-дизъюнкты сначала переменные, соответствующие дугам, исходящим из одной вершины, а затем исходящие. Полученная функция, в силу леммы 1, имеет непустой носитель тогда и только тогда, когда существует решение задачи НСЦ. □

Пример 2.

Рассмотрим орграф, заданный матрицей смежности A_1. Поставим в соответствие дугам орграфа булевы переменные в порядке обхода матрицы слева направо и сверху вниз:

$$\begin{gathered} e_{12} \leftrightarrow x_1, e_{13} \leftrightarrow x_2, e_{23} \leftrightarrow x_3, \\ e_{31} \leftrightarrow x_4, e_{34} \leftrightarrow x_5, e_{42} \leftrightarrow x_6, \\ e_{45} \leftrightarrow x_7, e_{51} \leftrightarrow x_8, e_{54} \leftrightarrow x_9; \end{gathered}$$

и составим булеву функцию по правилу, описанному в доказательстве теоремы 2:

$$\begin{gathered} f(x_1, \ldots, x_9) = (x_1 \oplus x_2) \wedge x_3 \wedge (x_4 \oplus x_5) \wedge (x_6 \oplus x_7) \wedge (x_8 \oplus x_9) \wedge \\ \wedge (x_4 \oplus x_8) \wedge (x_1 \oplus x_6) \wedge (x_2 \oplus x_3) \wedge (x_5 \oplus x_9) \wedge x_7. \end{gathered}$$

В силу свойств конъюнкции, функция f истинна лишь тогда, когда истинен каждый из XOR-дизъюнктов, это значит, что поиск набора значений ее переменных, при котором это условие выполнено, тождествен решению системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 \oplus x_5 = 1; \\ x_6 \oplus x_7 = 1; x_8 \oplus x_9 = 1; x_4 \oplus x_8 = 1; \\ x_1 \oplus x_6 = 1; x_2 \oplus x_3 = 1; x_5 \oplus x_9 = 1; x_7 = 1. \end{cases}$$

Так как любое множество с заданными на нем операциями исключающего «или» ($\oplus$) и умножения на 0 или 1 образует кольцо относительно этих операций, то к уравнениям над ней применим метод Гаусса (с учетом тождеств $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$ и $1 \oplus 1 = 0$).

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений до и после применения метода.

Изначально:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система вырождена, количество свободных переменных — одна. Выберем в качестве свободной переменную x_9 и, придав ей значение 1, найдем решение задачи ОНСЦ: $x_1 = x_3 = x_4 = x_7 = x_9 = 1$, $x_2 = x_5 = x_6 = x_8 = 0$. Возвращаясь от булевых переменных к дугам орграфа, видим, что в решение задачи НСЦ входят дуги $(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4)$. Вместе с инцидентными им вершинами они образуют семейство циклов

$\{1-2-3-1, 4-5-4\}$, которое действительно является решением задачи НСЦ.

Теперь применим метод к орграфу, заданному матрицей смежности A_2, который, как показано выше, не содержит подграфов — решений НСЦ.

Соответствие —

$$\begin{array}{l} e_{12} \leftrightarrow x_1, e_{15} \leftrightarrow x_2, e_{25} \leftrightarrow x_3, \\ e_{31} \leftrightarrow x_4, e_{32} \leftrightarrow x_5, e_{41} \leftrightarrow x_6, e_{54} \leftrightarrow x_7. \end{array}$$

Система —

$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 \oplus x_5 = 1; \\ x_6 = 1; x_7 = 1; x_4 \oplus x_6 = 1; \\ x_1 \oplus x_5 = 1; x_2 \oplus x_3 = 1. \end{cases}$$

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений до и после применения метода Гаусса.

Изначально:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

По окончании гауссовского процесса:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Из шестого уравнения $x_6 = 0$, но в то же время из седьмого $x_6 = 1$, что означает несовместность системы. Таким образом, ее решение не существует, как не существует и решения задачи НСЦ.

3. Оптимизационная задача о семействе циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2

Определение 9. (Задача ОНСЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством: $\forall v(v \in \in V)(deg^{out}v \leq 2)(deg^{in}v \leq 2)$, и вещественное число q. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них, а суммарный вес всех дуг, содержащихся в нем, превосходил q.

Теорема 3. *Задача ОНСЦ принадлежит к классу P и может быть решена за время $O(n^3)$.*

Доказательство. Поскольку орграф принадлежит к тому же классу, на котором поставлена задача НСЦ, можно построить систему алгебраических уравнений с исключающим «или» по правилу, описанному в доказательстве теоремы 2. Применим к этой системе прямой ход метода Гаусса. В общем случае система может содержать линейно зависимые уравнения. Матрица системы содержит $2n$ строк (максимальное возможное число переменных), обозначим k число свободных переменных (оно равно числу нулевых строк матрицы после приведения ее к ступенчатому виду). Каждому конкретному набору их значений будет соответствовать одно из решений системы. Очевидно, $k \leq 2n$, где $n = |V|$. Выберем первую свободную переменную и зададим ей значение (0 или 1), обратным ходом метода Гаусса получим значения некоторого количества базисных переменных. Вычислим две суммы: сумму весов дуг, соответствующих свободной переменной, и тех базисных, которые приняли значение 1, а затем тех базисных, которые приняли значение 0. Проделаем то же для каждой свободной переменной. В силу равенств: $0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 1$ — и того, что каждое уравнение содержит не более двух переменных, следует, что все единичные значения, полученные при свободной переменной, равной 1, станут нулевыми, и наоборот, если приравнять ее нулю. Из каждой пары сумм выберем максимальную и, присвоив базисным и свободным переменным соответствующие значения, получим решение системы с наибольшим суммарным весом дуг.

Для каждой свободной переменной существует множество базисных, которые определяются при обратном ходе метода Гаусса в зависимости от ее значения. Для любых двух свободных переменных множества базисных, определяемых их значениями, не пересекаются. В противном случае, в силу того, что при обращении свободной переменной (смене значения на противоположное) обращаются и все зависящие от нее базисные, можно было бы получить одновременно два разных значения одной и той же базисной переменной. Таким образом, суммы весов дуг, соответствующих переменным, зависящим от разных свободных, вычисляются независимо, а значит, выбирая для каждой свободной переменной значение, дающее максимальную сумму, можно получить максимальное по весу дуг семейство циклов. Если его вес превосходит q, то это семейство и будет решением задачи, в противном случае, решения не существует.

Покажем, что описанный алгоритм решения ОНСЦ требует числа операций, выражаемого полиномом конечной степени от n. Прямой ход метода Гаусса требует $O(n^2)$ операций (каждая строка объединенной матрицы системы содержит не более трех ненулевых элементов). Применение обратного хода при одной заданной свободной переменной и вычисление сумм потребует $O(m^2) + O(r)$ действий, где m – количество уравнений, в которые входит свободная переменная, а r – количество переменных, значения которых определились по выполнении обратного хода; поскольку $m \leq 2n, r \leq 2n$ и сложность оценивается сверху, можно выразить эти число как $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$. Учитывая, что аналогичный набор операций производится для каждой свободной переменной и что $k \leq 2n$, имеем: вся процедура вычисления сумм требует $O(kn^2) = O(n^3)$ действий. Сравнение суммы дуг с числом q потребует $O(1)$ операций. Итого $O(n^2) + O(n^3) + O(1) = O(n^3)$ действий. Таким образом, задача является полиномиально разрешимой (принадлежит к классу P). □

Пример 3. Рассмотрим орграф, заданный матрицей весов

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 10 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы сравнить результат полиномиального решения с истинным решением, найдем последнее поиском в глубину. Он дает следующие семейства простых циклов: $\{1-4-3-2-1\}$ с весом 10, $\{1-4-1, 2-3-2\}$ с весом -1, $\{1-2-1, 3-4-3\}$ с весом 16 и $\{1-2-3-4-1\}$ с весом 5.

Теперь применим метод решения, описанный в доказательстве теоремы 3.

Составим систему уравнений, дающую решение задачи НСЦ.

Соответствие —

$$\begin{gathered} e_{12} \leftrightarrow x_1, e_{14} \leftrightarrow x_2, \\ e_{21} \leftrightarrow x_3, e_{23} \leftrightarrow x_4, \\ e_{32} \leftrightarrow x_5, e_{34} \leftrightarrow x_6, \\ e_{41} \leftrightarrow x_7, e_{43} \leftrightarrow x_8. \end{gathered}$$

Система —
$$\begin{cases} x_1 \oplus x_2 = 1; x_3 \oplus x_4 = 1; \\ x_5 \oplus x_6 = 1; x_7 \oplus x_8 = 1; \\ x_3 \oplus x_7 = 1; x_1 \oplus x_5 = 1; \\ x_4 \oplus x_8 = 1; x_2 \oplus x_6 = 1. \end{cases}$$

Запишем объединенную матрицу этой системы уравнений и применим к ней прямой ход метода Гаусса.

Изначально:
$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

По окончании гауссовского процесса:
$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система вырождена, количество свободных переменных — две. Выберем в качестве свободных переменные x_5 и x_7 и найдем решение задачи ОНСЦ.

Пусть $x_5 = 1$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_6 = 0, x_2 = 1, x_1 = 0$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S^1_{x_5=1} = w(e_{14}) + w(e_{32}) = -8$.

Пусть $x_5 = 0$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_6 = 1, x_2 = 0, x_1 = 1$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S^1_{x_5=0} = w(e_{12}) + w(e_{34}) = -2$.

Максимальное в паре — -2 при $x_1 = 1, x_6 = 1$.

Пусть $x_7 = 1$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_8 = 0, x_4 = 1, x_3 = 0$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S^1_{x_7=1} = w(e_{23}) + w(e_{41}) = 7$.

Пусть $x_7 = 0$, обратным ходом метода Гаусса получим: $x_8 = 1, x_4 = = 0, x_3 = 1$. Просуммируем веса дуг, соответствующих переменным, принявшим значение 1: $S^1_{x_7=0} = w(e_{21}) + w(e_{43}) = 18$.

Максимальное в паре — 18 при $x_3 = 1, x_8 = 1$.

Решение состоит из дуг, соответствующих переменным x_1, x_3, x_6, x_8. Это набор циклов $\{1 - 2 - 1, 3 - 4 - 3\}$ с весом $18 - 2 = 16$.

4. Случай решения задачи ОНСЦ за квадратичное время

Рассмотрим задачу ОНСЦ на более узком классе орграфов, которые будем задавать не матрицей весов, а списком смежности, и покажем, что в таком случае существует более эффективный алгоритм решения.

Определение 10. (Задача ОНСЦ-СПЕЦ) Пусть дан взвешенный ориентированный граф $G = (V, E)$, где V — множество его вершин, а E — множество дуг соответственно, обладающий следующим свойством: $\forall v(v \in V)(deg^{out}v = 2)(deg^{in}v = 2)$, и вещественное число q. Количество вершин является четным, а орграф задан списком смежности следующего вида: для каждой вершины существует лишь одна, за исключением ее самой, имеющая в точности такой же список смежности, и ни одна другая вершина, кроме этих двух, не смежна по исходящей дуге с теми же вершинами, с которыми смежны они. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них, а суммарный вес всех дуг, содержащихся в нем, превосходил q.

Теорема 4. *Задача ОНСЦ-СПЕЦ может быть решена за время $O(n^2)$.*

Доказательство. Примем за элементарные операции (операции, выполняемые за время $O(1)$) просмотр элемента в списке смежности и сложение двух чисел. Пусть $|V| = n$, построим по списку смежности матрицу весов заданного орграфа. Поскольку, вследствие указанного в постановке задачи свойства этого списка, множество вершин орграфа может быть разбито на пары, в каждой из которых вершины смежны по исходящей дуге лишь с двумя другими, с которым не смежны никакие иные, то матрица будет иметь $\frac{n}{2}$ пар одинаковых строк, причем в строках из разных пар не будет ни одного ненулевого элемента на одной и той же позиции. Таким образом, если в заданной строке обнулить какой-либо ненулевой элемент, то кроме строки с единственным ненулевым элементом будет получен также столбец, содержащий только один ненулевой элемент, причем это будет тот же столбец, в котором находится ненулевой элемент другой строки из той же пары, что и заданная. Исходя из леммы 1 можно заключить, что семейство простых циклов, являющееся решением, должно задаваться матрицей смежности (матрицей весов), в каждой строке и каждом столбце которой есть лишь один ненулевой элемент. Как показано выше, обнуление элемента в заданной строке предопределяет обнуление элемента лишь в другой строке из той же пары, поскольку в ней появляется элемент, оставшийся единственным в своем столбце (то есть обнулен должен быть другой элемент, что сделает оставшийся единственным в своей строке, а первый обнуленный также единственным в своем столбце). То есть при поиске семейства, являющегося решением, мы можем независимо удалять дуги, исходящие из вершин разных пар; это означает, что выбрав в каждой паре строк два элемента из разных столбцов с наибольшей суммой, мы получим семейство циклов с наибольшим возможным весом. Если этот вес превосходит q, то полученное семейство есть решение задачи. Выбор элементов можно осуществлять и по упорядоченному списку смежности, где роль номера столбца будет играть позиция номера вершины в строке списка. Группировка строк по парам простой сортировкой потребует $O(n^2)$ операций, поиск максимальной суммы в каждой паре — $2\frac{n}{2}(O(1)+2O(1)+O(1)) = O(n)$ операций. Итого $O(n^2)+O(n)=O(n^2)$. □

Теорема 5. *Орграф и задачи ОНСЦ-СПЕЦ всегда содержит семейство простых циклов, обходящее все его вершины.*

Доказательство. Поскольку любая пара строк в списке или матрице смежности орграфа описанного вида допускает процедуру обнуления, описанную в доказательстве теоремы 4 (для каждой пары она проводится независимо и для нее не потребовалось введения никаких дополнительных ограничений вида строк), то проведя ее для каждой пары строк можно получить матрицу смежности, у которой в каждой строке и каждой столбце есть лишь один ненулевой элемент, или список смежности, который можно в такую матрицу преобразовать. Из леммы 1 следует, что таким образом будет задано семейство циклов данного орграфа, обходящее все его вершины. □

Пример 4. Рассмотрим орграф, заданный списком смежности (вес соответствующей дуги указан в фигурных скобках, список представлен в отсортированном виде):

$$
\begin{aligned}
&2:1\{8\},4\{-1\};\\
&5:1\{2\},4\{10\};\\
&4:2\{1\},3\{-1\};\\
&6:2\{1\},3\{-2\};\\
&1:5\{2\},6\{2\};\\
&3:5\{6\},6\{-3\}.
\end{aligned}
$$

Имеем разбиение строк на пары: 2-ая и 5-ая, 4-ая и 6-ая, 1-ая и 3-ая. Для каждой найдем сочетание дуг с максимальной суммой весов:

1) $S_1^1 = w(2,1) + w(5,4) = 18, S_1^2 = w(2,4) + w(5,1) = 1.$
$\max S_1^j = S_1^1 = 18.$
2) $S_2^1 = w(4,2) + w(6,3) = -1, S_2^2 = w(4,3) + w(6,2) = 0.$
$\max S_2^j = S_2^2 = 0.$
3) $S_3^1 = w(1,5) + w(3,6) = -1, S_3^2 = w(1,6) + w(3,5) = 8.$
$\max S_3^j = S_3^2 = 8.$

Таким образом, максимальное семейство циклов задается набором дуг $\{(2,1),(5,4),(4,3), (6,2),(1,6),(3,5)\}$. Оно состоит из двух циклов: $1-6-2-1$ и $3-5-4-3$; их общий вес равен 26.

Проверим решение, найдя максимальное семейство циклов поиском в глубину. Имеем следующие циклы: $1-5-1$ с весом 4; $1-5-4-2-1$ с весом 21; $1-5-4-3-6-2-1$ с весом 17; $1-6-2-1$ с весом 11; $1-6-2-4-3-5-1$ с весом 9; $1-6-3-5-4-2-1$ с весом 25; $1-6-3-5-1$ с весом 8; $2-4-2$ с весом 0; $2-4-3-6-2$ с весом -4; $3-5-4-3$ с весом 15; $3-6-3$ с весом -5.

Они образуют семейства (указан общий вес): $\{1-5-1, 2-4-2, 3-6-3\}$ с весом -1, $\{1-5-1, 2-4-3-6-2\}$ с весом 0, $\{1-5-4-2-1, 3-6-3\}$ с весом 16, $\{1-5-4-3-6-2-1\}$ с весом 17, $\{1-6-2-1, 3-5-4-3\}$ с весом 26, $\{1-6-2-4-3-5-1\}$ с весом 9, $\{1-6-3-5-4-2-1\}$ с весом 25, $\{1-6-3-5-1, 2-4-2\}$ с весом 8.

Максимальным является семейство $\{1-6-2-1, 3-5-4-3\}$ с весом 26, что совпадает с решением, полученным на основании теоремы 4.

5. Основные результаты

Рассмотрены поисковый (разрешимостный) и оптимизационный варианты задачи о поиске такого семейства непересекающихся простых циклов в орграфе с полустепенями вершин не более 2, которое покрывает все вершины этого орграфа. Показана принадлежность задачи в обоих вариантах к классу полиномиально разрешимых задач P, предложенный алгоритм для матрицы весов, находит решение как поисковой, так и оптимизационной задачи о максимизации веса семейства циклов за время $O(n^3)$; доказано, что в более частной постановке на орграфах, заданных списком смежности с весами и имеющими полустепени всех вершин, строго равные 2, существует асимптотически более эффективный алгоритм решения задачи в обоих вариантах, требующий $O(n^2)$ операций, где n — количество вершин орграфа. Поскольку решение оптимизационной задачи осуществляется фактически путем сокращенного перебора по экспоненциальному пространству поиска, то можно сделать предположение о существовании полиномиального алгоритма для задачи о поиске гамильтонова цикла и задачи коммивояжера на рассматриваемом классе орграфов или на его подклассе со строгим ограничением полустепеней вершин, так как среди решений задач НСЦ и ОНСЦ могут быть гамильтоновы циклы.

Finding a family of simple circuits in a digraph with semidegree bound 2

Medvedev A.A.

The present paper investigates the algorithmic complexity of finding a family of simple circuits passing every vertice of a digraph with semidegree bound 2. The problem is considered in two variants: as a search and as an optimization problem. It proves to be polinomially solvable in both variants, subsequently an algorithm using time $O(n^3)$ and, for a particular formulation of the problem, an algorithm using time $O(n^2)$ are suggested where n is the number of the digraph's vertices.

Keywords: digraphs, simple circuits, search problems, optimization, P class, polynomail solvability.

References

[1] Karp, R. M., "Reducibility Among Combinatorial Problems", *Complexity of Computer Computer Computations. The IBM Research Symposia Series*, 1972, 85–103.

[2] Akiyama, T.; Nishizeki, T.; Saito N., "NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs", *Journal of Information Processing*, **3**:2 (1980–1981), 73–76.

[3] Itai, A.; Papadimitriou, Ch.; Szwarcfiter, J., "Hamilton Paths in Grid Graphs", *SIAM Journal on Computing*, **4**:11 (1982), 676–686.

[4] Buro, M., "Simple Amazons endgames and their connection to Hamilton circuits in cubic subgrid graphs", *Conference on Computers and Games, Lecture Notes in Computer Science.*, **2063**:CG '00 (2000), 250–261.

[5] Plesńik, J., "The NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two", *Information Processing Letters*, **8**:4 (1979), 199–201.

[6] Chiba, N.; Nishizeki, T., "The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs", *Journal of Algorithms*, **10**:2 (1989), 187–211.

[7] Goray, Ivan. I., "On polynomial solvability of the Hamiltonian cycle problem for graphs of degree less than or equal to 3", *arXiv: Optimization and Control*, 2010, https://arxiv.org/abs/1007.0235.

[8] Çela, E.; Deineko, V. G.; Woeginger G. J., "Travelling salesman paths on Demidenko matrices", *Discrete Applied Mathematics*, 2021, https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.11.019.

[9] Orponen, P.; Mannila, H., "On approximation preserving reductions: Complete problems and robust measures", *Department of Computer Science, University of Helsinki. Technical Report. C-1987–28*, 1987.

[10] Ore, O., "Note on Hamiltonian circuits", *American Mathematical Monthly*, **67** (1960), 55.

[11] Dirac, G. A., "Some theorems on abstract graphs", *Proceedings of the London Mathematical Society*, **2**:3 (1952), 69–81.

[12] Ghouila-Houri, A., "Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, **251** (1960), 495–497.

[13] Woodall, D., "Sufficient conditions for cycles in digraphs", *Proceedings of the London Mathematical Society*, **24** (1972), 739–755.

[14] Christofides, D.; Keevash, P.; Kühn, D.; Osthus, D., "A semi-exact degree condition for Hamilton cycles in digraphs", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **24**:3 (2010), 709–756.

[15] Keevash, P.; Kühn, D.; Osthus, D., "An exact minimum degree condition for Hamilton cycles in oriented graphs", *Journal of the London Mathematical Society*, **79**:1 (2009), 144–166.

[16] Kelly, L.; Kühn, D.; Osthus, D., "A Dirac-type result on Hamilton cycles in oriented graphs", *Combinatorics, Probability and Computing*, **17**:5 (2008), 689–709.

[17] Moore, C.; Mertens, S., *The Nature of Computation.*, Oxford University Press, Oxford, 2011, 366 pp.