Степени разделющих многочленов для классов Поста

М. В. Носов[1]

В работе получены оценки степеней многочленов с действительными коэффициентами, разделяющих нули и единицы булевских функциий для классов Поста.

Ключевые слова: классы Поста, разделяющий многочлен.

Пусть B^n- n-мерный единичный куб, $R[x]$ – множество многочленов от n переменных с действительными коэффициентами, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, P_2 – множество булевых функций. Скажем, что многочлен $f(x)$, $f(x) \in R[x]$ разделяет нули и единицы булевой функции $F(x)$, если

$$F(\alpha) = 1 \Leftrightarrow f(\alpha) \geq 0, \quad F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) < 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n.$$

Такой многочлен $f(x)$ будем называть разделяющим многочленом функции $F(x)$ и обозначать $f \sim F$.Пусть K подмножество множества булевых функций, $K(n)$ подмножество функций множества K, функции из $K(n)$ зависят от n аргументов. Введём обозначение

$$degK(n) = \max_{F, F \in K(n)} \min_{f, f \sim F} degf(x).$$

Укажем $degK(n)$ для всех классов Поста K [1].

Приведём утверждения из [2,3], на которых основаны дальнейшие выводы.

1.Для любой булевой функции от n аргументов степень разделяющего многочлена не превышает n.

2.Пусть $F \in P_2$, B^k- k-мерная грань B^n, пусть $F|_{B^k} \in L$, тогда степень разделяющего многочлена не меньше k. Из этого утверждения следуют два факта.

2.1. Только для двух булевых функций $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$ и $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1$ степень разделяющего многочлена n.

2.2. Пусть $F \in P_2$, пусть Π^k- k-мерный параллелепипед, вершинами которого являются вершины B^n, пусть на соседних вершинах Π^k функция F принимает разные значения, тогда степень разделяющего многочлена для F не меньше k.

3.$degM(n) = [\frac{n}{2}]$, где $M-$ класс монотонных функций.

[1] *Носов Михаил Васильевич* — с.н.с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mvnosov@rambler.ru.

Nosov Michail Vasilevich-senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Далее перечислим оценки для классов Поста, при необходимости приведём соответствующие доказательства (в обозначениях и нумерации будем придерживаться "Сводной таблицы замкнутых классов" [1]).

1.$degO_1(n) = 1$. 2.$degO_2(n) = 0$. 3.$degO_3(n) = 0$. 4.$degO_4(n) = 1$.

5.$degO_5(n) = 1$. 6.$degO_6(n) = 1$. 7.$degO_7(n) = 0$. 8.$degO_8(n) = 1$.

9.$degO_9(n) = 1$.

10.$degS_1(n) = 1$. Разделяющий многочлен для функции $\bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i$ имеет вид $x_1 + \ldots + x_n - 0.5$.

11.$degS_3(n) = 1$. 12.$degS_5(n) = 1$. 13.$degS_6(n) = 1$.

14.$degP_1(n) = 1$. Разделяющий многочлен для функции $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i$ имеет вид $x_1 + \ldots + x_n - n$.

15.$degP_3(n) = 1$. 16.$degP_5(n) = 1$. 17.$degP_6(n) = 1$.

18.$degL_1(n) = n$. Следует из вышеприведенных фактов.

19.$degL_2(n) = n$. 20.$degL_3(n) = n$. 21.$degL_4(n) = n$, n - нечётное.

22.$degL_5(n) = n$, n - нечётное.

23.$2l - 1 \le degD_2(4l) \le 2l, l \ge 2$.

$2l - 1 \le degD_2(4l + 1) \le 2l, l \ge 2$.

$degD_2(4l + 2) = 2l + 1, l \ge 2$.

$degD_2(4l + 3) = 2l + 1, l \ge 2$.

Доказательство.

Класс D_2 содержится в классе монотонных функций, поэтому степень разделяющего полинома не превышает $[\frac{n}{2}]$. Рассмотрим четыре случая.

а) $n = 4l + 2$.

$$R = (1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0)$$

$$b_1 = (-1, 1, 0, 0, \ldots, 0, 0),$$

$$b_2 = (0, 0, -1, 1, \ldots, 0, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{2l+1} = (0, 0, 0, 0, \ldots, -1, 1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l + 1$.

$$\Pi^{2l+1} = \{R + \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} | \delta_1 \ldots, \delta_{2l+1} \in \{0, 1\}\}$$

Очевидно, что все вектора параллелепипеда несравнимы между собой, имеют длину $2l+1$, противоположный вектор к вершине параллелепипеда попадает в параллелепипед. Следовательно, на параллелепипеде можно задать линейную функцию от нечётного числа аргументов, т.е.

самодвойственную. Пусть $S_{2l+1} = \{x \in B^n||x| = 2l+1\}$ - слой куба, вектора слоя несравнимы между собой, вектор слоя переходит в вектор слоя при взятии противоположного вектора, таким образом, множество векторов слоя вне параллелепипеда можно разбить на пары: (вектор, противоположный вектор). Функцию с параллелепипеда можно продолжить на слой положив на паре разные значения. Наконец, продолжим на весь куб: на вершинах B^{4l+2} выше слоя положим значение 1, на вершинах ниже слоя положим значение 0. В результате получили самодвойственную монотонную функцию, у которой есть параллелепипед размерности $2l+1$, на котором функция линейна. Следовательно, степень разделяющего многочлена не меньше $2l+1$. Значит, $degD_2(4l+2) = 2l+1$.

б)$n = 4l+3$.

$$R = (0,1,0,1,0,\ldots,1,0)$$

$$b_1 = (1,-1,1,0,0,\ldots,0,0),$$

$$b_2 = (0,0,0,-1,1,\ldots,0,0),$$

$$b_3 = (0,0,0,0,0,-1,1,\ldots,0,0),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{2l+1} = (0,0,0,0,\ldots,-1,1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l+1$.

$$\Pi^{2l+1} = \{R + \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} | \delta_1 \ldots, \delta_{2l+1} \in \{0,1\}\}$$

Пусть

$$W = \{R + 0 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \ldots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} | \delta_2 \ldots, \delta_{2l+1} \in \{0,1\}\}$$

$$U = \{R + 1 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \ldots + \delta_{2l+1} b_{2l+1} | \delta_2 \ldots, \delta_{2l+1} \in \{0,1\}\}$$

Очевидно, что вектора параллелепипеда несравнимы между собой. Для $u \in U, \overline{u} \in W$, для $w \in W, \overline{w} \in U$. Определим функцию: на Π^{2l+1} зададим линейную функцию, на $S^{2l+2} \setminus U$ функция равна 1, на $S^{2l+1} \setminus W$ функция равна 0, ниже слоя S^{2l+1} равна 0, выше слоя S^{2l+2} равна 1. Построенная функция является самодвойственной монотонной. Значит, $degD_2(4l+3) = 2l+1$.

в) $n = 4l+1$.

$n = 4l+1 = 2(2l-2)+5$.

$$R = (1,1,0,0,0,0,1,0,1,\ldots,0,1)$$

$$b_1 = (-1, -1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0),$$

$$b_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, \ldots, 0, 0),$$

$$b_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, \ldots, 0, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{2l-1} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 1, -1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l-1$.

$$\Pi^{2l-1} = \{R + \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_1 \ldots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$W = \{R + 0 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \ldots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2 \ldots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$U = \{R + 1 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \ldots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2 \ldots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

Очевидно, что вектора параллелепипеда несравнимы между собой. Для $u \in U, \overline{u} \in W$, для $w \in W, \overline{w} \in U$. Определим функцию: на Π^{2l-1} зададим линейную функцию, на $S^{2l+1} \setminus U$ функция равна 1, на $S^{2l} \setminus W$ функция равна 0, ниже слоя S^{2l} равна 0, выше слоя S^{2l+1} равна 1. Построенная функция является самодвойственной монотонной. Значит, $degD_2(4l+1) \geq 2l-1$.

г) $n = 4l$.

$n = 4l = 2(2l-2) + 4$.

$$R = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$$

$$b_1 = (-1, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0),$$

$$b_2 = (0, 0, 0, 0, 1, -1, \ldots, 0, 0),$$

$$b_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, \ldots, 0, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{2l-1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 1, -1)$$

Построим параллелепипед размерности $2l-1$.

$$\Pi^{2l-1} = \{R + \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_1 \ldots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$W = \{R + 0 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \ldots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2 \ldots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

$$U = \{R + 1 \cdot b_1 + \delta_2 b_2 + \ldots + \delta_{2l-1} b_{2l-1} | \delta_2 \ldots, \delta_{2l-1} \in \{0, 1\}\}$$

Очевидно, что вектора параллелепипеда несравнимы между собой. Для $u \in U, \overline{u} \in W$, для $w \in W, \overline{w} \in U$. Определим функцию: на Π^{2l-1} зададим линейную функцию, на $S^{2l} \setminus U \cup W$ функцию зададим аналогично пункту а) – разобъём на пары (вектор, противоположный вектор), положив на паре разные значения, ниже слоя S^{2l} функция равна 0, выше слоя S^{2l} функция равна 1. Построенная функция является самодвойственной монотонной. Значит, $degD_2(4l) \geq 2l-1$.

24.$degD_1(n) = n-1, n-$чётное,

$degD_1(n) = n, n-$нечётное.

Доказательство.

а)$n-$нечётное. Тогда $D_1 \ni x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$, значит $degD_1(n) = n$.

б)$n-$чётное. Тогда $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \notin D_1$ и $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1 \notin D_1$, значит $degD_1(n) \leq n-1$, но $D_1 \ni x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1}$, значит $degD_1(n) = n-1$.

25.$degD_3(n) = n-1, n-$чётное,

$degD_3(n) = n, n-$нечётное.

Доказательсттво аналогично предыдущему пункту.

26.$degA_1(n) = [\frac{n}{2}]$[2,3].

27.$degA_2(n) = [\frac{n}{2}]$[2,3].

28.$degA_3(n) = [\frac{n}{2}]$[2,3].

29.$degA_4(n) = [\frac{n}{2}]$[2,3].

30.$degC_1(n) = n$.

31.$degC_2(n) = n$.

Доказательство.

а)$n-$нечётное. Тогда $C_2 \ni x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$, значит $degC_2(n) = n$.

б)$n-$чётное. Тогда $C_2 \ni x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1$, значит $degC_2(n) = n$.

32.$degC_3(n) = n$.

Доказательство.

$C_3 \ni x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$, значит $degC_3(n) = n$.

33.$degC_4(n) = n-1, n-$чётное,

$degC_4(n) = n, n-$нечётное.

Доказательство.

а)$n-$нечётное. Тогда $C_4 \ni x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$, значит $degC_4(n) = n$.

б)$n-$чётное. Тогда $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \notin C_4$ и $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1 \notin C_4$, значит $degC_4(n) \leq n-1$, но $C_4 \ni x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1}$, значит $degC_4(n) = n-1$.

34. $F_1^{\mu}(n) = n-1$.

Доказательство.

а)$n-$чётное. Тогда $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \notin F_1^{\mu}$ и $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1 \notin F_1^{\mu}$, значит $degF_1^{\mu}(n) \leq n-1$.

б)$n-$нечётное. Очевидно, что $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1 \notin F_1^{\mu}$. Функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$ является $\alpha-$ функцией, но не удовлетворяет условию

$< a^\mu >$,например, на наборах $(1,1,1,\dots,1,1,0)$ и $(0,1,,1\dots,1,1,1)$. Значит $degF_1^\mu(n) \le n-1$.

Возьмём

$$H(x) = x_n \bigvee (x_1 \bigoplus \dots \bigoplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in degF_1^\infty \subset degF_1^\mu$. Ограничение $H|_{x_n=0}-$ линейная функция от $n-1$ аргументов, следовательно, разделяющий полином для $H(x)$ имеет степень не меньше $n-1$. Значит $degF_1^\mu(n) = n-1$, одновременно доказано $degF_1^\infty(n) = n-1$.

35.$[\frac{n-1}{2}] \le degF_2^\mu(n) \le [\frac{n}{2}]$.

Доказательство.

Класс $degF_2^\mu \subset M$, значит $degF_2^\mu(n) \le [\frac{n}{2}]$.

Возьмём функцию $F(x_1,\dots,x_n)$ следующего вида

$$F(x_1,\dots,x_n) = x_n \bigvee H(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

где $H(x_1,\dots,x_{n-1})-$монотонная функция от $n-1$ аргумента, для которого разделяющий полином $h(x_1,\dots,x_{n-1})$ имеет степень не меньше $[\frac{n-1}{2}]$. Очевидно, что $F(x) \in degF_2^\infty \subset degF_2^\mu$. Для $F(x)$ в качестве разделяющего полинома $f(x)$ можно взять

$$f(x_1,\dots,x_n) = x_n + \varepsilon h(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

где $0 < \varepsilon << 1$. Так как $F|_{x_n=0} = H$, то степень полинома понизить нельзя. Это доказательство проходит и для $F_2^\infty(n)$.

36.$[\frac{n-1}{2}] \le degF_3^\mu(n) \le [\frac{n}{2}]$.

Доказательство аналогичное п.35, оно же проходит для $F_3^\infty(n)$.

37.$degF_4^\mu(n) = n-1$.

Возьмём

$$H(x) = x_n \bigvee (x_1 \bigoplus \dots \bigoplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in degF_4^\infty \subset degF_4^\mu$. Ограничение $H|_{x_n=0}-$ линейная функция от $n-1$ аргументов, следовательно, разделяющий полином для $H(x)$ имеет степень не меньше $n-1$. Разберёмся с двумя линейными функциями от всех аргументов.

а)$n-$ чётное. Функция $x_1 \bigoplus \dots \bigoplus x_n$ равна 0 на всех единицах, функция $x_1 \bigoplus \dots \bigoplus x_n \bigoplus 1$, зануляется на наборах $(0,1,1,\dots,1,1,1)$ и $(1,1,1,\dots,1,1,0)$ без общей нулевой компоненты. Обе не лежат в $degF_4^\mu(n)$.

б)$n-$ нечётное. Функция $x_1 \bigoplus \dots \bigoplus x_n$ зануляется на наборах $(0,1,1,\dots,1,1,1)$ и $(1,1,1,\dots,1,1,0)$ без общей нулевой компоненты, функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1$ равна 0 на всех единицах. Обе не лежат в $degF_4^{\mu}(n)$.

Это доказательство проходит и для $F_4^{\infty}(n)$.

38.$degF_5^{\mu}(n) = n-1$.

Доказательство.

Разберёмся с двумя линейными функциями от всех аргументов.

а)$n-$ чётное. Функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$ не является $\alpha-$ функцией, функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1$, равна 1 на нулевом наборе. Обе не лежат в $F_5^{\mu}(n)$.

б)$n-$ нечётное. Функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$ равна 1 на наборах $(1,0,\ldots,0)$ и $(0,1,0,\ldots,0)$ без общей единичной компоненты, функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1$, равна 0 на всех единицах. Обе не лежат в $F_5^{\mu}(n)$.

Таким образом, $degF_5^{\mu}(n) \leq n-1$.

Рассмотрим два случая.

а)$n-$ чётное.

Возьмём

$$H(x) = x_n \cdot (x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in F_5^{\infty} \subset F_5^{\mu}$.Далее, $F|_{x_n=1} = x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1}$, следовательно, степень разделяющего полинома не меньше $n-1$.

б)$n-$ нечётное.

Возьмём

$$H(x) = x_n \cdot (x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1} \bigoplus 1)$$

Очевидно, $H(x) \in F_5^{\infty} \subset F_5^{\mu}$. Далее, $F|_{x_n=1} = x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1} \bigoplus 1$, следовательно, степень разделяющего полинома не меньше $n-1$.

В итоге получаем требуемое $degF_5^{\mu}(n) = n-1$. Это доказательство проходит для $F_5^{\infty}(n)$.

39.$[\frac{n-1}{2}] \leq degF_6^{\mu}(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

Доказательство.

Класс $degF_6^{\mu} \subset M$, значит $degF_6^{\mu}(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

Возьмём функцию $F(x_1,\ldots,x_n)$ следующего вида

$$F(x_1,\ldots,x_n) = x_n \cdot H(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$

где $H(x_1,\ldots,x_{n-1})-$монотонная функция от $n-1$ аргумента, для которого разделяющий полином $h(x_1,\ldots,x_{n-1})$ имеет степень не меньше $[\frac{n-1}{2}]$. Очевидно, что $F(x) \in degF_6^{\infty} \subset degF_6^{\mu}$. Это доказательство проходит и для $F_6^{\infty}(n)$.

40.$[\frac{n-1}{2}] \leq degF_7^{\mu}(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

Доказательство аналогично п.39, оно же проходит и для $degF_7^{\infty}(n)$.

41.$degF_8^{\mu}(n) = n-1$.

Доказательство.

Разберёмся с двумя линейными функциями от всех аргументов.

Функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n$ равна 1 на наборах $(1,0,\ldots,0)$ и $(0,1,0,\ldots,0)$ без общей единичной компоненты, функция $x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_n \bigoplus 1$, равна 1 на всех нулях. Обе функции не лежат в $F_8^{\mu}(n)$.

Таким образом, $degF_8^{\mu}(n) \leq n-1$.

Возьмём

$$H(x) = x_n \cdot (x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1})$$

Очевидно, $H(x) \in F_8^{\infty} \subset F_8^{\mu}$.Далее, $F|_{x_n=1} = x_1 \bigoplus \ldots \bigoplus x_{n-1}$, следовательно, степень разделяющего полинома не меньше $n-1$.

В итоге получаем требуемое $degF_8^{\mu}(n) = n-1$. Это доказательство проходит для $F_8^{\infty}(n)$.

42.$degF_1^{\infty}(n) = n-1$.

См.п.34.

43.$[\frac{n-1}{2}] \leq degF_2^{\infty}(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

См.п.35.

44.$[\frac{n-1}{2}] \leq degF_3^{\infty}(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

См.п.36.

45.$degF_4^{\infty}(n) = n-1$.

См.п.37.

46.$degF_5^{\infty}(n) = n-1$.

См.п.38.

47.$[\frac{n-1}{2}] \leq degF_6^{\infty}(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

См.п.39.

48.$[\frac{n-1}{2}] \leq degF_7^{\infty}(n) \leq [\frac{n}{2}]$.

См.п.40.

49.$degF_8^{\infty}(n) = n-1$.

См.п.41.

Автор благодарит Алёшина С.В. за постановку задачи, многочисленные обсуждения в процессе её решения, ценные советы и предложения.

Список литературы

[1] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. Издательство Наука, Москва, 1966, 119.

[2] Алешин С.В. Распознавание динамических образов. Издательство Московского университета, Москва, 1996, 97.

[3] Носов М.В. Оценка степеней разделяющих многочленов для монотонных и самодвойственных функций. Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 27:2 (2023), 79-82.

Degrees of separating polynomials for Post's classes
Nosov M.V.

In this paper, estimates of the degrees of polynomials with real coefficients separating zeros and ones of Boolean functions for Post's classes are obtained. Post's classes, separating polynomial.

References

[1] Yablonsky S.V.,Gavrilov G.,P.,Kudryavtsev V.B., *Functions of the algebra of logic and Post's classes.*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russian), 119 c.

[2] Aleshin S.V., *Dynamic image recognition.*, Moscow University Press, Moscow, 1996 (In Russian), 97 c.

[3] Nosov M.V., "Estimates of the degrees of separating polynomials for monotone and self-dual functions.", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **27**:2 (2023), 79–82 (In Russian)