О предельных циклах в однородных нейронных сетях

А. С. Дробышев[1]

В работе рассматривается формальная модель нейронных сетей, в которой каждой нейрон представлен в виде автомата, состоящего из пороговой булевой функции и задержки. Доказывается критерий принадлежности стартовой конфигурации предельному циклу.
Ключевые слова: нейронные сети, пороговые функции, схемы из функциональных элементов, предельные циклы.

1. Введение

Сегодня исследованию нейросетей уделяется большое внимание. Первая формальная математическая модель нейрона была представлена в 1943 году У. С. Мак-Каллоком и В. Питтсом [5], позднее в 1956 году С. К. Клини [6] показал, что каждый конечный автомат моделируется нейронной сетью с задержкой в два такта. В данной статье используется модель нейрона, впервые представленная в работе [1] и получившая дальнейшее развитие в работах [2, 3], где нейрон представляется в качестве автомата, состоящего из пороговой функции и задержки. Нейронная сеть представляет собой граф связей таких нейронов. Основным результатом работы является критерий, дающий условия, при которых стартовая конфигурация нейронной сети принадлежит ее предельному циклу.

2. Основные понятия и результаты

Отображение $f : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ назовём *пороговой функцией*, если существует *весовой* вектор $w = \langle w^1, \dots, w^m \rangle \in \mathbb{Z}$ и такое $h \in \mathbb{Z}$, называемое порогом, что для всех $x = (x^1, \dots, x^m) \in \{0,1\}^m$ имеет место равенство: $f(x) = sign(w^1 \cdot x^1 + \dots + w^m \cdot x^m - h)$, где

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0; \end{cases}$$

Отношение $R \subseteq \{0,1\}^m$ будем называть *пороговым*, если R — область истинности некоторой пороговой функции. Обозначим $\mathcal{N}(m) := \{\mathfrak{Z}_c \chi_R \mid$

[1] *Дробышев Александр Сергеевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru.

Drobyshev Alexander Sergeevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

$R \subseteq \{0,1\}^m\}$, где $\chi_R(x)$ — характеристическая функция, определённая как $\chi_R(x) = 1 \Leftrightarrow x \in R$. Элементы множества $\mathcal{N} = \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} \mathcal{N}(m)$ будем называть *нейронами.*

Пусть $f_1, \dots, f_n$ — пороговые функции от $n + m$ переменных. *Нейронной сетью* назовём всякую схему из функциональных элементов с задержкой $\Sigma(f_1, \dots, f_n)$, заданную системой уравнений вида

$$\begin{cases} y_1 = \mathfrak{Z}_{c_1} f_1(y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n = \mathfrak{Z}_{c_n} f_n(y_1, \dots, y_n), \end{cases}$$

где $c_i \in \{0,1\}$ для всех $i = 1, \dots, n$. Иногда будем писать Σ вместо $\Sigma(f_1, \dots, f_n)$, когда функции $f_1, \dots, f_n$ фиксированы.

В данной работе рассматриваются нейронные сети, в которых каждому нейрону приписана одна и та же пороговая функция f. Такие нейронные сети будем называть *однородными* и обозначать $\Sigma(f)$.

Каждая нейронная сеть $\Sigma(f_1, \dots, f_n)$ определяет отображение $\Phi_\Sigma : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, заданное условием: $\Phi(y_1, \dots, y_n) = (\mathfrak{Z}_{c_1} f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \mathfrak{Z}_{c_n} f_n(y_1, \dots, y_n))$. Набор $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \in \{0,1\}^n$ будем называть *конфигурацией* сети в момент времени $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отметим, что конфигурации нейронной сети Σ в моменты времени t и $t+1$ связаны соотношениями $\alpha(t+1) = \Phi_\Sigma(\alpha(t))$.

Предельным циклом нейронной сети Σ будем называть последовательность конфигураций $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{0,1\}^n$ таких, что $\alpha_{i+1} = \Phi(\alpha_i)$ для любого $i = 1, \dots, k-1$ и $\alpha_1 = \Phi(\alpha_k)$. Будем называть нейросетевое отображение Φ *стабилизированным*, если существует момент времени $t \in \mathbb{N}$, что $(y_1(t), \dots, y_n(t)) = (y_1(0), \dots, y_n(0))$.

Каждой нейронной сети Σ сопоставим граф $G_\Sigma = (V, E)$, вершины которого представляют собой нейроны $v_1, \dots, v_n$ с приписанными им значениями $\alpha_{v_i} = \mathfrak{Z}_{c_i} f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где f_i — функция, соответствующая нейрону v_i. Будем говорить, что нейрон v_i равен c в момент времени t, если $\alpha_{v_i}(t) = c,\ c \in \{0,1\}$.

В графе G могут быть рёбра, ведущие из нейрона v_i в v_j, при этом функция f_j, приписанная v_j несущественно зависит от y_i. В таком случае это ребро ни на что не влияет и его можно стереть. Не ограничивая общности, будем считать, что из вершины v_i ведет ребро в вершину v_j $\Leftrightarrow f_j$ существенно зависит от y_i.

В этой работе рассматриваются однородные нейронные сети для пороговых функций конъюнкции ($f = x \wedge y$) и дизъюнкции ($f = x \vee y$).

Теорема 1. *Пусть $G_\Sigma = (V, E)$ — связный граф однородной нейронной сети $\Sigma(f)$, где $f = x \wedge y$. Тогда концигурация $\alpha(0)$ принадлежит предель-*

ному циклу сети $\Sigma(f)$ $\Leftrightarrow$ существуют такие подмножества вершин $U_1, \ldots, U_l \subseteq V$, что $U_1 \cup \cdots \cup U_l = V$, и выполнены условия:

1) *Для любых $i = 1, \ldots, l$ и $(u, v) \in E$ выполнено*

   а) *если $v \in U_i$, то $u \in U_{i-1}$;*

   б) *если $u \in U_i$, то $v \in U_{i+1}$;*

   причем $U_{l+1} = U_1$;

2) *Если существуют вершины $u, v \in U_i$ такие, что $\alpha_u(0) = 0, \alpha_v(0) = 1$, то не существует пути в графе G из вершины u в вершину v. Для любой вершины $v \in U_i$ такой, что $\alpha_v(0) = 0$, существует непустой путь в графе G из u в вершину $v \in U_i$ такую, что $\alpha_u(0) = 0$.*

Из принципа двойственности и Теоремы 1 верно следующее.

Теорема 2. *Пусть $G_\Sigma = (V, E)$ — связный граф однородной нейронной сети $\Sigma(f)$, где $f = x \vee y$. Тогда концигурация $\alpha(0)$ принадлежит предельному циклу сети $\Sigma(f)$ $\Leftrightarrow$ существуют такие подмножества вершин $U_1, \ldots, U_l \subseteq V$, что $U_1 \cup \cdots \cup U_l = V$, и выполнены условия:*

1) *Для любых $i = 1, \ldots, l$ и $(u, v) \in E$ выполнено*

   а) *если $v \in U_i$, то $u \in U_{i-1}$;*

   б) *если $u \in U_i$, то $v \in U_{i+1}$;*

   причем $U_{l+1} = U_1$;

2) *Если существуют вершины $u, v \in U_i$ такие, что $\alpha_u(0) = 1, \alpha_v(0) = 0$, то не существует пути в графе G из вершины u в вершину v. Для любой вершины $v \in U_i$ такой, что $\alpha_v(0) = 1$, существует непустой путь в графе G из u в вершину $v \in U_i$ такую, что $\alpha_u(0) = 1$.*

3. Доказательство Теоремы 1

Сначала докажем несколько вспомогательных лемм. Пусть $G_\Sigma = (V, E)$ — связный граф однородной нейронной сети $\Sigma(f)$, где $f = x \wedge y$. Всюду далее, если S — сильно связная компонента графа G_Σ, то через E_S, V_S будем обозначать ограничения на эту компоненту множеств рёбер и вершин соответственно.

Определим отношение ρ_S, полагая

$$\rho_0 = \{(v_1, v_2) \in V_S \times V_S \mid \exists v_3 (v_1, v_3) \in V_S : (v_2, v_3) \in E_S\} \cup \{(v, v) \in V_S\}$$

и

$$\rho_i = \{(v_1, v_2) \in V_S \times V_S \mid \exists v_3, v_4 \in V_S : (v_1, v_3), (v_2, v_4) \in E, (v_3, v_4) \in \rho_{i-1}\}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\rho_S = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \rho_i$

Лемма 1. *Пусть S — сильно связная компонента графа G_Σ. Если $(a_1, b_1) \in \rho_S$, то для любых $a_2, b_2 \in V_S$, таких, что $(a_1, a_2) \in E_S, (b_1, b_2) \in E_S$, выполнено $(a_2, b_2) \in \rho_S$*

Доказательство. Пусть $(a_2, b_2) \notin \rho_S$, тогда для любых $a_3, b_3 \in V_S$ таких, что $(a_2, a_3) \in E$, $(b_2, b_3) \in E$, выполнено $(a_3, b_3) \notin \rho_S$. Так как S — сильно связная компонента, то через любые две ее вершины проходит по крайней мере один цикл. Рассмотрим два цикла:

1) Цикл S_1 минимальной длины m, проходящий через вершины a_1, a_2;

2) Цикл S_2 минимальной длины n, проходящий через вершины b_1, b_2.

Без ограничения общности считаем, что $m \leqslant n$. Тогда для этих циклов будет выполнено следующее:

$$(a_2, b_2) \notin \rho_S,\ (a_3, b_3) \notin \rho_S,\ \ldots,\ (a_m, b_m) \notin \rho_S.$$

С другой стороны, $(a_1, b_1) \in \rho_S$, следовательно, $(a_n, b_m) \in \rho_S$. А значит $(a_{n-1}, b_{m-1}) \in \rho_S, (a_{n-2}, b_{m-2}) \in \rho_S$ и т.д. Тогда, перебирая вершины этих циклов в обратном порядке не позднее, чем через nm проходов по циклам, получим, что как минимум одна из пар $(a_i, b_i), i \geqslant 2$, принадлежит ρ_S. Противоречие с изначальным предположением. □

Лемма 2. *Если S — сильно связная компонента графа G_Σ, то ρ_S — отношение эквивалентности на множесте вершин V_S.*

Доказательство.

- Рефлексивность следует из того, что включение $(v, v) \in \rho_0$ верно для всех вершин $v \in V_S$.
- Симметричность следует из построения.
- Транзитивность: Пусть $(v_1, v_2) \in \rho_S, (v_2, v_3) \in \rho_S$. Из построения следует, что существуют вершины $u_1, u_2 \in V_S$, достижимые из вершин v_1, v_2 и v_3, v_4. Пусть s_1 — длина кратчайшего пути из v_1, v_2 в u_1, а s_2 — длина кратчайшего пути из v_2, v_3 в u_2. Без ограничения общности будем считать, что $s_1 \geqslant s_2$. Обозначим эти пути следующим образом:

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{s_1} - \text{путь из } v_1 \text{ в } u_1,$$

$$\beta = \beta_1\beta_2\ldots\beta_{s_1} - \text{путь из } v_2 \text{ в } u_1,$$

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{s_2} - \text{путь из } v_2 \text{ в } u_2,$$

$$\delta = \delta_1\delta_2\ldots\delta_{s_2} - \text{путь из } v_3 \text{ в } u_2,$$

где $\alpha_1 = v_1, \beta_1 = v_2, \alpha_{s_1} = \beta_{s_1} = u_1, \gamma_1 = v_2, \delta_1 = v_3, \gamma_{s_2} = \delta_{s_2} = u_2$. Тогда имеют место включения

$$(\alpha_1, \beta_1), (\beta_1, \gamma_1), (\gamma_1, \delta_1) \in \rho_S,$$

следовательно, по Лемме 1

$$(\alpha_2, \beta_2), (\beta_2, \gamma_2), (\gamma_2, \delta_2) \in \rho_S, \ldots, (\alpha_{s_2}, \beta_{s_2}), (\beta_{s_2}, \gamma_{s_2}), (\gamma_{s_2}, \delta_{s_2}) \in \rho_S.$$

Так как из $(\alpha_{s_2}, \delta_{s_2}) \in \rho_S$ следует, что $(\alpha_{s_2}, \delta_{s_2}) \in \rho_S$, то, пройдя обратно от $\alpha_{s_2}, \delta_{s_2}$ по путям α, δ, получим, что $(v_1, v_3) \in \rho_S$. Значит, $(v_1, v_2) \in \rho \Rightarrow (u_1, u_2) \in \rho_{V_1}$ — следует из построения ρ, и $(u_1, u_2) \in \rho \Rightarrow (v_1, v_2) \in \rho_{V_1}$ — следует из доказанного ранее.

□

Лемма 3. *Если S — сильно связная компонента графа G_Σ, то на вершинах этой сильно связной компоненты можно построить такое разбиение на классы эквивалентности $U_1, \ldots, U_m$, что для любого ребра $(v_1, v_2) \in E_S$ выполнено*

1) *Если $v_1 \in U_i$, то $v_2 \in U_{i+1}$;*

2) *Если $v_2 \in U_i$, то $v_1 \in U_{i-1}$.*

Доказательство. Пусть $U_1, \ldots, U_m$ — классы эквивалентности, определенные отношением ρ_S. Из Леммы 1 следует, что для любого ребра (v_1, v_2) такого, что $v_1 \in U_1$, будет выполнено $v_2 \in U_i$ для некоторого i. Без ограничения общности будем считать что это U_2. Аналогично, для любого ребра (v_1, v_2) такого, что $v_1 \in U_2$, будет выполнено $v_2 \in U_3$ и т.д. Пусть существует такое k, что для любого ребра (v_1, v_2) такого, что $v_1 \in U_k$, будет выполнено $v_2 \in U_1$ и $k \neq m$. Рассмотрим произвольные $v_1 \in U_1$ и $v_2 \in U_{k+1}$. Так как из U_k все ребра ведут в U_1, то не существует пути $\pi = \pi(v_1, v_2)$, связывающего эти две вершины — противоречие с тем, что S — сильно связная компонента. □

Лемма 4. *Пусть S — сильно связная компонента графа G_Σ, ρ — отношение эквивалентности из Леммы 2 и отображение Φ стабилизировано. Тогда для любой пары $(v_1, v_2) \in \rho$ равенство $\alpha_{v_1}(t) = \alpha_{v_2}(t)$ выполнено для любого $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Докажем, что утверждение леммы верно для каждого ρ_i, $i \geqslant 0$. Для этого покажем сначала, что для любых v_1, v_2 таких, что $(v_1, v_2) \in \rho_0$, выполнено $\alpha_{v_1}(t) = \alpha_{v_2}(t)$ для любого $t \geqslant 0$. Рассмотрим произвольную тройку вершин $v_1, v_2, v_3 \in V_S$ таких, что $(v_1, v_3), (v_2, v_3) \in E_S$. Пусть $G^{'}$ — произвольный подграф графа G, тогда обозначим $0_{G'}(t) = \{v \in V_{G'} \mid v(t) = 0\}$. В силу стабилизированности Φ $0_C(t) = const$ для любого цикла C, проходящего через вершины G_Σ. Предположим, что существует t такое, что $v_1(t) = 0, v_2(t) = 1$. В таком случае, $v_3(t+1) = 0$ и количество нулей в цикле, проходящем через v_2, v_3 увеличится. Противоречие.

Пусть для ρ_i и для любых $(v_1, v_2) \in \rho_i$ выполнено $\alpha_{v_1}(t) = \alpha_{v_2}(t)$ для любого t. Покажем, что тогда то же будет выполнено для ρ_{i+1}. Докажем, что верно для v_1, v_2, v_3, v_4 таких, что $(v_1, v_3), (v_2, v_4) \in E, (v_3, v_4) \in \rho_i$ и v_3, v_4 — различные. По предположению значения в них совпадают для любого t. Но тогда если $\alpha_{v_1}(t) \neq \alpha_{v_2}(t)$ для какого-то t, то в момент времени $t+1$ значения в v_3 и v_4 будут отличаться. Противоречие. Таким образом, для любых $v_1, v_2 \in \rho_S$ выполнено $\alpha_{v_1}(t) = \alpha_{v_2}(t)$ для любого $t \geqslant 0$. □

Лемма 5. *Если граф G_Σ состоит из одной сильно связанной компоненты, то для него выполнены необходимые условия Теоремы 1.*

Доказательство. Пусть S — эта сильно связная компонента, а $U_1, \ldots, U_m$ — классы эквивалентности, определенные на этой сильно связной компоненте отношением эквивалентности ρ_s. Рассмотрим произвольное ребро $(u, v) \in E$, без ограничения общности будем считать, что $u \in U_i$ для некоторого i. Тогда из Леммы 3 следует, что $v \in U_{i+1}$, где $i+1$ берется по модулю m. Из Леммы 4 для любых вершин $u_1, u_2 \in U_i$ выполнено $\alpha_{u_1}(t) = \alpha_{u_2}(t)$, а так как S — сильно связная компонента, то между любыми ее двумя вершинами существует путь. Таким образом, для этой сильно связной компоненты выполнены необходимые условия Теоремы 1. □

Будем говорить, что последовательность $U_1, \ldots, U_m$ множеств вершин из V — *охватывающий цикл* (обозначим через C), если для любых двух вершин $u, v \in V$ таких, что $(u, v) \in E$, выполнено

1) Если $u \in U_i$, то $v \in U_{i+1}$,

2) Если $v \in U_i$, то $u \in U_{i-1}$,

причем все индексы берутся по модулю m. Если $C = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ — охватывающий цикл, то через $V_C = U_1 \cup \ldots \cup U_m$ будем обозначать множество вершин этого охватывающего цикла.

Лемма 6. *Граф G_Σ можно разбить на последовательность охватывающих циклов $C_1, \ldots, C_k$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) *$V_{C_i} \cap V_{C_j} = \emptyset$ для всех $i \neq j$;*

2) *$V_{C_1} \cup \cdots \cup V_{C_k} = V$;*

3) *Для любого $C_j = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ выполнено*

   - *Если существуют вершины $u, v \in U_i$ такие, что $\alpha_u(0) = 1$ и $\alpha_v(0) = 0$, то не существует пути в графе G из вершины u в вершину v.*
   - *Для любой вершины $v \in U_i$ такой, что $\alpha_v(0) = 0$, существует путь в графе G из u в вершину $v \in U_i$ такую, что $\alpha_u(0) = 0$.*

Доказательство. Из Леммы 5 следует, что каждую сильно связную компоненту G_Σ можно разбить на классы $U_1, \ldots, U_m$ такие, что $C = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ — охватывающий цикл, и для C выполнено условие 3 из утверждения леммы. Тогда сопоставим каждой сильно связной компоненте ее охватывающий цикл, получим последовательность охватывающих циклов $C_1, \ldots, C_k$. Так как множества вершин двух различных сильно связных компонент не пересекаются, то будет выполнено условие 1, а так как каждая вершина графа принадлежит хотя бы одной сильно связной компоненте, то будет выполнено условие 2. □

Введем оператор копирования охватывающего цикла $\oplus_k$. Пусть $C_1 = \langle U_1,\ldots, U_n \rangle$, тогда $C_2 = \oplus_k C_1$, если $C_2 = \langle \underbrace{U_1,\ldots, U_n}_{1}, \underbrace{U_1,\ldots, U_n}_{2}, \ldots, \underbrace{U_1, \ldots, U_n}_{k} \rangle$. При этом C_2 также будет являться охватывающим циклом по определению.

Введем оператор склейки охватывающих циклов $\odot$ и покажем, что в результате применения этого оператора также будет получаться охватывающий цикл:

1) Пусть $C_j = \langle \{v\} \rangle$, $C_i = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ и в v ведет ребро из некоторого U_l, рёбер из v в U_i нет ни для какого i. Тогда $\odot(C_i, C_j) = \langle U_i^{'}, \ldots, U_m^{'} \rangle$, где $U_i^{'} = U_i \cup \{v\}$. Покажем, что для $\odot(C_i, C_j)$ будет выполнено определение охватывающего цикла. Рассмотрим произвольное ребро (u_1, u_2) из $\odot(C_i, C_j)$. Возможны следующие случаи:

   а) $u_1 \in U_i, u_2 \in U_{i+1}$ для некоторого i. В таком случае также выполнено $u_1 \in U_i^{'}, u_2 \in U_{i+1}^{'}$.

   б) $u_1 \in U_l, u_2 = v$. Тогда $u_1 \in U_l^{'}$, а $u_2 \in U_l^{'}$ по построению.

   в) $u_1 = u_2 = v$. Тогда $u_1 \in U_i^{'}$, а $u_2 \in U_{i+1}^{'}$ для любого i по построению.

Таким образом для $\odot(C_i, C_j)$ будет выполнено определение охватывающего цикла.

2) Пусть $C_i = \langle U_1^1, \dots, U_m^1 \rangle, C_j = \langle U_1^2, \dots, U_l^2 \rangle$. Пусть $v \in U_a^2$ для некоторого a, а $u \in U_b^1$ для некоторого b и $(u, v) \in E$. Рёбер (u', v') таких, что $u' \in U_{i_1}^2, v' \in U_{j_1}^1$ для некоторых i_1, j_1 не существует. Тогда, если $s = \text{НОК}(m, l)$, то $\odot(C_i, C_j) = \langle U_1^{'}, \dots, U_s^{'} \rangle$, где $U_t^{'} = U_{b+t}^1 \cup U_{a+t-1}^2$, а $b+t$ и $a+t-1$ берутся по модулю m и l соответственно. Рассмотрим произвольное ребро (u_1, u_2) из $\odot(C_i, C_j)$ и покажем, что $\odot(C_i, C_j)$ будет являться охватывающим циклом.

   а) Пусть $u_1 \in U_k^1, u_2 \in U_{k+1}^1$, где k берется по модулю m. В таком случае для $\odot(C_i, C_j)$ выполнено $u_1 \in U_{k-b}^{'}, u_2 \in U_{k-b+1}^{'}$, где $k-b, k-b+1$ берутся по модулю m.

   б) Пусть $u_1 \in U_k^2, u_2 \in U_{k+1}^2$, где k берется по модулю l. В таком случае для $\odot(C_i, C_j)$ выполнено $u_1 \in U_{k-b+1}^{'}, u_2 \in U_{k-b+2}^{'}$, где $k-b+1, k-b+2$ берутся по модулю l.

   в) Пусть $u_1 \in U_b^1, u_2 \in U_a^2$, тогда $u_1 \in U_0^{'}, u_2 \in U_1^{'}$.

Таким образом для $\odot(C_i, C_j)$ будет выполнено определение охватывающего цикла.

3) Пусть $C_k = \langle \{v\} \rangle$, $C_i = \langle U_1^1, \dots, U_m^1 \rangle, C_j = \langle U_1^2, \dots, U_l^2 \rangle$. Пусть $u_1 \in U_{i-1}^1, u_2 \in U_{j-1}^2$ и $(u_1, v), (u_2, v) \in E$. Тогда, если t — длина предельного цикла, то $C_i^{'} = \oplus_a C_i, C_j^{'} = \oplus_b C_j$, причем $a, b \in \mathbb{Z}$ — такие, что $am = bl = t$. В таком случае, $\odot(C_i, C_j, C_k) = \langle U_1^{'}, \dots, U_t^{'} \rangle$, где $U_s^{'} = U_{i+s-1}^1 \cup U_{j+s-1}^2$ при $s \neq 1$ и $U_1^{'} = U_i^1 \cup U_j^2 \cup \{v\}$, а $i+s-1$ и $j+s-1$ берутся по модулю m и l соответственно, причем $U_s^1 \in C_i^{'}, U_s^2 \in C_j^{'}, s = \overline{1, t}$ и $|\odot(C_i, C_j, C_k)| = t$. Рассмотрим произвольное ребро (v_1, v_2) из $\odot(C_i, C_j, C_k)$ и покажем, что для $\odot(C_i, C_j, C_k)$ будет выполнено определение охватывающего цикла.

   а) Пусть $v_1 \in U_g^1, v_2 \in U_{g+1}^1$, в таком случае $v_1 \in U_{g-i+1}^{'}, v_2 \in U_{g-i+2}^{'}$, где $g-i+1, g-i+2$ берутся по модулю t.

   б) Пусть $v_1 \in U_g^2, v_2 \in U_{g+1}^2$, в таком случае $v_1 \in U_{g-j+1}^{'}, v_2 \in U_{g-j+2}^{'}$, где $g-j+1, g-j+2$ берутся по модулю t.

   в) Пусть $v_1 = u_1, v_2 = v$, тогда $v_1 \in U_t^{'}, v_2 \in U_1^{'}$

   г) Пусть $v_1 = u_2, v_2 = v$, тогда $v_1 \in U_t^{'}, v_2 \in U_1^{'}$

Таким образом для $\odot(C_i, C_j, C_k)$ будет выполнено определение охватывающего цикла.

Других случаев быть не может, так как их можно будет разложить на более частные одного из этих трех типов.

Лемма 7. *Если существует последовательность охватывающих циклов графа G_Σ длины k, удовлетворяющая условиям Леммы 6, то существует последовательность охватывающих циклов графа G_Σ длины не более $k-1$, удовлетворяющая условиям Леммы 6.*

Доказательство. Введём топологический порядок сильно связных компонент графа G_Σ. Пусть W — весовая функция, удовлетворяющая условиям:

1) Существуют u_1, v_1 такие, что $u_1 \in V_{S_i}, v_1 \in V_{S_j}$, и существует путь из u_1 в v_1, Не существуют u_2, v_2 такие, что $u_2 \in V_{S_j}, v_2 \in V_{S_i}$, и существует путь из u_2 в v_2. Тогда $W(S_i) > W(S_j)$

2) Для любых различных S_i и S_j $W(S_i) \neq W(S_j)$.

Такая весовая функция будет задавать топологический порядок на сильно связных компонентах.

Введём понятие глубины сильно связной компонинеты S и обозначим её через $L(S)$:

1) Если S_i - такая сильно связная компонента, что не существует ребёр (u, v) таких, что $v \in V_{S_i}, u \notin V_{S_i}$, то $L(S_i) = 0$.

2) Если $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ — такие, что существуют ребра $(u_j, v), u_j \in S_j, v \in S_i$ для всех $j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, то $L(S_i) = max(L(S_{i_1}), \ldots, L(S_{i_k})) + 1$

Понятия топологического порядка и глубины для сильно связных компонент естественным образом переносятся на охватывающие циклы. Возьмём в упорядоченной последовательности $C_1, \ldots, C_k$ такой C_j, что $L(C_j) = 1$ и проведем его склейку с такими C_i, что из C_i в C_j ведёт ребро. Как было показано ранее, в таком случае получится последовательность охватывающих циклов длины не более $k-1$. Покажем, что для этой последовательности будут выполнены условия Леммы 6. Так как при склейке два или три охватывающих цикла объединяются в один, а другие не меняются, то условие 1 выполнено. Так как при объединении в новом охватывающем цикле содержатся все вершины, содержащиеся в склеиваемых циклах, а также их копии, то условие 2 будет выполнено. Покажем, что будет выполнено условие 3. Ни один из циклов, из которых есть ребра в C_j не может состоять из одной вершины, так как тогда в нее не вело бы ни одного ребра. Рассмотрим 3 случая, аналогичные случаям из Леммы 6:

1) Если $u, v \in U_i$, то условие 3 выполнено, так как оно было выполнено для C_i. Пусть v — вершина из C_j. Если $\alpha_v(0) = 0$, то $\alpha_v(t) = 0$ для любого t и тогда $u = v$ и условие 3 выполнено. Если $\alpha_v(0) = 1$ и существует путь π такой, что $\pi = \pi(u, v)$ и $|\pi| = s$, а $u, v \in U_i$. Но тогда $\alpha_v(t) = 0$ для любого $t \geqslant s$. Противоречие с тем, что стартовая конфигурация принадлежит предельному циклу. То есть условие 3 выполнено.

2) Если условие 3 было выполнено для C_i и C_j, то единственная ситуация, когда может возникнуть противоречие — если существует $v \in U_j^2, u \in U_i^1, i \neq j$ такие, что:

   а) $u, v \in U_t^{'}$

   б) $\alpha_v(0) = 1, \alpha_u(0) = 0$

   в) существует путь $\pi = \pi(u, v), |\pi| = s$

   Рассмотрим путь π и отрезок (u_1, v) такой, что $u_1 \in C_i$, а $v \in C_j$. Пусть u_2 — такая, что $u_2 \in C_j$ и $(u_2, v) \in E$, а $\pi \setminus (u_1, v) = \{\pi_1, \pi_2\}$ и $|\pi_1| = s_1$. Тогда $\alpha_{u_1}(s_1) = 0$ и если $\alpha_{u_2}(s_1) \neq 0$, то $0_{S_j}(s_1{+}1) = 0_{C_j}(s_1)$ — противоречие с тем, что $0_{C_j}(t) = const$ при $t \geqslant 0$. Таким образом $\alpha_{u_2}(s_1) = 0$, а значит, существует $u^{'} \in U_j^2$ такое, что $\alpha_{u^{'}}(0) = 0$. Противоречие с тем, что условие 3 Леммы 6 выполнено для C_j. А значит, таких u и v быть не может.

3) Если условие 3 было выполнено для C_i и C_j, то оно также будет выполнено для $C_i^{'}$ и $C_j^{'}$. Так как ребер, ведущих из C_i в C_j нет, то если существует $\pi = \pi(u_1, u_2)$ такой, что $\alpha_{u_1}(0) = 0, \alpha_{u_2}(0) = 1, u_1, u_2 \in U_k^{'}$, то $u_2 = v$, а $u_1 \in C_i$ или $u_1 \in C_j$. Не ограничивая общности считаем, что $u_1 \in U_i^1$ и $h = |\pi|$. Если $\alpha_v(0) = 1$, то $\alpha_v(pt) = 1$ для любого $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Но $h = q * t$, где $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а значит, если $\alpha_{u_1}(0) = 0$, то $\alpha_v(h) = 0$. Противоречие.

Если $C_k = \langle U_1^3, \ldots, U_s^3 \rangle$, $C_i = \langle U_1^1, \ldots, U_m^1 \rangle, C_j = \langle U_1^2, \ldots, U_l^2 \rangle$, то проводится склейка с C_i или C_j согласно пункту 2. Таким образом получили последовательность длины на 1 меньше, удовлетворяющую условиям Леммы 6. $\square$

Теперь мы можем доказать Теорему 1. Так как из Лемм 6 и 7 следует, что существует один охватывающий цикл $= \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$, для которого выполнены условия Леммы 6, то необходимость условий Теоремы 1 доказана. Теперь докажем достаточность условий Теоремы 1.

Пусть существуют $U_1, \ldots, U_m$ — множества вершин графа G_Σ, удовлетворяющие условиям 1 и 2 Теоремы 1. Разобьем каждое из множеств

$U_i = U_i^0 \cup U_i^1$, где $U_i^0 = \{v \in U_i \mid \alpha_v(0) = 0\}$, а $U_i^1 = \{v \in U_i \mid \alpha_v(0) = 1\}$. Введем множество вершин $U_j^0(k)$:

$$U_j^0(0) = U_j^0 \text{ и } U_j^0(k+1) = \{v \in U_{j+k+1} | \ \exists u \in U_j^0(k) : (u, v) \in E\} \text{ для всех } k \geq 0.$$

Предположим, что $v \in U_j^0(m)$. Докажем по индукции, что тогда существует путь длины m из $u \in U_j^0(0)$ в v. Для $m = 0$ это очевидно. Рассмотрим вершину v, до которой существует путь длины $m+1$ из $U_j^0(0)$, тогда по предположению индукции, если (w, v) — последнее ребро этого пути, то $w \in U_j^0(m)$. Но тогда $v \in U_j^0(m+1)$ по определению этого класса. Так как существует путь из $u \in U_j^0(0)$ в $v \in U_j^0(m)$, то из условия теоремы следует, что $\alpha_v(0) = 0$, а значит $v \in U_j^0(0)$. Таким образом $U_j^0(m) \subseteq U_j^0(0)$.

Пусть $v \in U_j^0(0)$, то есть $\alpha_v(0) = 0$, тогда из условия теоремы существует путь из некоторой $u \in U_j^0(0)$ в v. Так как каждое ребро $(u_1, u_2) \in E$ этого пути лежит между соседними классами U_l и U_{l+1}, где $l \in 1, \ldots, m$, то для любого пути $\pi = \pi(u, v)$, где $u, v \in U_j$, длина пути $|\pi| = km$. Пусть $k \geq 2$, тогда рассмотрим $u^{'} \in U_j$ такую, что $\pi_1 = \pi_1(u, u^{'})$ и $|\pi_1| = (k-1)m$, а $\pi_2 = \pi_2(u^{'}, v)$ и $|\pi_2| = m$. Предположим, что $\alpha_{u^{'}}(0) = 1$, тогда π_1 — путь из $u \in U_j^0$ в $u^{'} \in U_j^1$ — противоречие с условиями теоремы, а значит $\alpha_{u^{'}} = 0$ и π_2 — путь длины m из $u^{'} \in U_j^0(0)$ в $v \in U_j^0(0)$. Докажем индукцией по k, что если $u \in U_j^0(0)$ и существует путь в G_Σ длины k из u в v, то $v \in U_j^0(k)$. Для $k = 0$ это очевидно. Рассмотрим вершину v, до которой существует путь длины $k+1$ из $U_j^0(0)$, тогда по предположению индукции, если (w, v) — последнее ребро этого пути, то $w \in U_j^0(k)$. Но тогда $v \in U_j^0(k+1)$ по определению этого класса. Таким образом, так как $u^{'} \in U_j^0(0)$ и существует путь длины m из $u^{'}$ в v, то $v \in U_j^0(m)$, то есть $U_j^0(0) \subseteq U_j^0(m)$.

Тогда $U_j^0(m) = U_j^0(0)$, а значит $\alpha_v(m) = 0 \Leftrightarrow \alpha_v(0) = 0$. Так как $U_j^1 = U_j \setminus U_j^0$, то $\alpha_v(m) = 1 \Leftrightarrow \alpha_v(0) = 1$. Следовательно, в силу произвольности j, $\alpha_v(0) = \alpha_v(m)$ для любой v, а значит $\alpha(m) = \alpha(0)$, то есть спустя m тактов попадем в начальную конфигурацию, а значит, она будет принадлежать предельному циклу.

Список литературы

[1] С.В.Моисеев, “О реализации автоматов нейронными сетями”, *Журнал Интеллектуальные системы*, **12** (2008), 283-316.

[2] Дробышев А.С., Боков Г.В., “Критерий нейропорождённости автоматных функций с задержкой”, *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, **6** (2020), 54-55.

[3] Дробышев А.С., “Реализация схем из функциональных элементов с задержкой нейронными сетями”, *Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023»*, 2023.

[4] С.В.Яблонский, *Введение в дискретную математику*, «Наука», Москва, 1979, 272 с.

[5] Warren S. McCulloch, Walter Pitts, “A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity”, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5** (1943), 115–133

[6] Kleene S.C., “Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata”, *Automata Studies.Princeton University Press*, 1956, 3-42

[7] Siegelmann H.T., “Reccurent Neural Networks and Finite Automata”, *Communications of the ACM*, **12** (1996), 567-574

[8] Siegelmann, H. T., Sontag E. D., “Turing Computability with Neural Networks”, *Applied Mathematics Letters*, **6** (1991), 77-80

[9] Twining C.J., “The Limiting Behavior of Non-cylindrical Elementary Cellular Automata”, *Complex Systems*, **6** (1992), 417-432

On limit cycles of homogeneous neural networks

Drobyshev A.S.

The paper considers a formal model of neural networks in which each neuron is represented as an automaton consisting of a threshold Boolean function and a time delay. The criterion of belonging of the starting configuration to the limit cycle is proved.

Keywords: neural networks, threshold functions, boolean circuits, limit cycles.

References

[1] S. V. Moiseev, “On the implementation of automata by neural networks”, *Intelligent systems*, **12** (2008), 283-316

[2] A. S. Drobyshev, G. V. Bokov, “Criterion of Neural Generation of Automaton Functions with Time Delay”, *Bulletin of the Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics*, **6** (2020), 54-55

[3] A. S. Drobyshev, “Implementation of circuits of functional elements with time delay by neural networks”, *Materials of the International Youth Scientific Forum "LOMONOSOV-2023"*, 2023

[4] C. V. Yablonsky, *Introduction to Discrete Mathematics*, «Science», Moscow, 1979, 272 pp.

[5] Warren S. McCulloch, Walter Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5** (1943), 115–133

[6] Kleene S.C., "Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata", *Automata Studies.Princeton University Press*, 1956, 3-42

[7] Siegelmann H.T., "Reccurent Neural Networks and Finite Automata", *Communications of the ACM*, **12** (1996), 567-574

[8] Siegelmann, H. T., Sontag E. D., "Turing Computability with Neural Networks", *Applied Mathematics Letters*, **6** (1991), 77-80

[9] Twining C.J., "The Limiting Behavior of Non-cylindrical Elementary Cellular Automata", *Complex Systems*, **6** (1992), 417-432