Метод распознавания изображений на основе выпуклой линейной оболочки над конечным полем

Е. С. Ковалёва*

Метод построения выпуклых линейных оболочек конечного множества точек часто используется в задачах распознавания. В $n-$мерном пространстве для этого перебираются n элементные подмножества точек. Если оставшиеся точки лежат по одну сторону от гиперплоскости, содержащей выбранные точки, то эта гиперплоскость называется гранью. Проверка новой точки на принадлежность выпуклой линейной оболочке сводится к проверке выполнения системы линейных неравенств, образованных гранями.

Предлагается решать огрублённую задачу, когда координаты точек принимают три значения $0, 1, -1$, интерпретируемые как элементы поля из трёх элементов. При этом линейная функция равна нулю в точках, лежащих на гиперплоскости, равна 1 с одной стороны от неё, и равна -1 с другой стороны. Проверка принадлежности точки выпуклой линейной оболочке сводится к проверке условий $S_a(x) \in \{0, \lambda_a\}$ для всех граней S_a выпуклой линейной оболочки, где значение 0 соответствует принадлежности точки гиперплоскости S_a, а λ_a является общим значением линейной формы на точках множества, не принадлежащих S_a. Таким образом, принадлежность новой точки выпуклой линейной оболочке определяется её положением относительно всех граней оболочки.

Ключевые слова: выпуклая линейная оболочка, конечные поля, пространство E_3^n, линейные формы, распознавание образов, классификация изображений.

1. Введение

Задачи распознавания образов и компьютерного зрения являются одним из наиболее активно развивающихся направлений современной информатики и прикладной математики [1–4]. Одной из важных задач данной области является определение состояния глаз человека по цифровому

* *Ковалёва Елена Сергеевна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: e.kovaleva.msu@yandex.ru, ORCID: 0009-0004-7275-3076.

Kovaleva Elena Sergeevna — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

изображению. Распознавание открытых и закрытых глаз применяется в системах контроля внимания водителей, биометрической идентификации личности, анализе поведения человека и интеллектуальных интерфейсах взаимодействия человека с вычислительными системами [5–7].

Предложенный подход не требует обучения параметров модели, настройки весовых коэффициентов или решения задач оптимизации. После построения оболочек классификация выполняется посредством проверки принадлежности объектов соответствующим выпуклым линейным оболочкам. Вычислительный эксперимент показал точность распознавания 96.05% для класса закрытых глаз и 97.92% для класса открытых глаз, что свидетельствует о возможности практического применения предложенного метода в задачах распознавания состояний глаз.

2. Основные определения

Пусть $E_3 = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ является конечным полем из трёх элементов, а E_3^n — n-мерным линейным пространством над полем E_3.

Определение 1. *Гиперплоскостью в пространстве* E_3^n называется множество точек

$S_a = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_3^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} \equiv 0 \pmod 3\}$, где $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in E_3^{n+1}$ и $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Определение 2. Пусть $X \subset E_3^n$ — конечное множество точек, S_a - гиперплоскость в пространстве E_3^n, $X \setminus S_a = \{x \in X \mid x \notin S_a\}$. S_a называется *гранью выпуклой линейной оболочки* множества X, если выполняются следующие условия:

1. на гиперплоскости S_a лежит не менее n точек множества X, то есть $|X \cap S_a| \geqslant n$;
2. если $X \setminus S_a \neq \varnothing$, то существует число $\lambda_a \in \{1, 2\}$ такое, что для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняется уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} \in \{0, \lambda_a\} \pmod 3$;
3. если $X \setminus S_a = \varnothing$, то для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняется уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} \equiv 0 \pmod 3$.

Точки $z \in E_3^n$, удовлетворяющие условию

$$S_a(z) = \lambda_a$$

для каждой грани S_a выпуклой линейной оболочки множества X, будем называть *внутренними точками* выпуклой линейной оболочки множества X.

Определение 3. *Выпуклой линейной оболочкой* конечного множества точек $X \subset E_3^n$ называется множество

$$\mathrm{conv}(X) = \{x \in E_3^n : S_a(x) \in \{0, \lambda_a\} \text{ для каждой грани } S_a\}.$$

Определение 4. Выпуклая линейная оболочка $\mathrm{conv}(X)$ называется *непустой*, если её внутренность непуста. В противном случае выпуклая линейная оболочка называется *пустой*.

Введем обозначения.

Пусть S - множество граней выпуклой линейной оболочки,

S_i – $i-$я грань из множества S,

$Z_i = X \setminus S_i$ — множество точек множества X, не принадлежащих грани S_i,

$S_i(Z_i)-$ значение точек из множества Z_i в уравнении грани S_i,

$Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_p)$, где $p-$ количество граней,

$S(x) = (S_1(x), S_2(x), \ldots, S_p(x))$, где $x \in E_3^n$.

Рассмотрим примеры выпуклых линейных оболочек.

Пример 1. Рассмотрим множество точек $X = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)\}$.

Кандидатами на грани являются гиперплоскости

$x_1 \equiv 0 \pmod 3$

$x_2 \equiv 0 \pmod 3$

$x_1 + x_2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$

$x_1 + 2x_2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$

Проверка по определению 2 показывает, что условию удовлетворяет только гиперплоскость $x_1 \equiv 0 \pmod 3$. Следовательно, получаем кортеж граней $S = (x_1 \equiv 0 \pmod 3)$.

Проверим оболочку на пустоту.

Для единственной грани S_1 имеем $Z_1 = X \setminus S_1 = \{(1,0)\}$. Следовательно, $S_1(Z_1) = \lambda_1 = 1$.

Рассмотрим множество кандидатов $Y = \{(1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$ на внутренние точки выпуклой линейной оболочки множества X.

Грань S_i	$S_i(Z_i)$	$S_i(1,1)$	$S_i(1,2)$	$S_i(2,0)$	$S_i(2,1)$	$S_i(2,2)$
x_1	1	1	1	2	2	2

Так как $S_1(Z_1) = \lambda_1 = 1$ и $S_1(1,1) = S_1(1,2) = 1 = \lambda_1$ а для остальных точек множества Y $S_1(2,0) = S_1(2,1) = S_1(2,2) = 2 \neq \lambda_1$, то внутренними точками оболочки являются $(1,1)$ и $(1,2)$. Следовательно, выпуклая линейная оболочка множества $\{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0)\}$ является непустой.

Пример 2. Рассмотрим множество

$$X = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}.$$

Кандидатами на грани являются гиперплоскости
$x_1 \equiv 0 \pmod 3$
$x_1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$
$x_2 \equiv 0 \pmod 3$
$x_2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$
$x_2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$
$x_1 + x_2 \equiv 0 \pmod 3$
$x_1 + x_2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$
$x_1 + x_2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$
$x_1 + 2x_2 \equiv 0 \pmod 3$
$x_1 + 2x_2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$
$x_1 + 2x_2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$
Проверка по определению 2 показывает, что гранями являются
$S_1 = x_1$
$S_2 = x_1 + 2$
Следовательно, кортеж граней выпуклой линейной оболочки
$S = (x_1 \equiv 0 \pmod 3,\ x_1 + 2 \equiv 0 \pmod 3)$.
Проверим оболочку на пустоту.

Для первой грани S_1 имеем $Z_1 = X \setminus S_1 = \{(1,0),(1,1),(1,2)\}$. Следовательно, $S_1(Z_1) = \lambda_1 = 1$.

Для второй грани S_2 имеем $Z_2 = X \setminus S_2 = \{(0,0),(0,1),(0,2)\}$. Следовательно, $S_2(Z_2) = \lambda_2 = 2$.

Следовательно, $S(Z) = \big(S_1(Z_1), S_2(Z_2)\big) = (1,2)$.

Рассмотрим множество кандидатов $Y = \{(2,0),(2,1),(2,2)\}$ на внутренние точки выпуклой линейной оболочки множества X.

Грань S_i	$S_i(Z_i)$	$S_i(2,0)$	$S_i(2,1)$	$S_i(2,2)$
x_1	1	2	2	2
$x_1 + 2$	2	1	1	1

Для первой грани S_1 имеем $\lambda_1 = 1$. Для всех точек $y \in Y$ выполняется $S_1(y) = 2 \neq \lambda_1$.

Для второй грани S_2 имеем $\lambda_2 = S_2(Z_2) = 2$. Для всех точек $y \in Y$ выполняется $S_2(y) = 1 \neq \lambda_2$.

Следовательно, для каждой грани S_i ни одна точка $y \in Y$ не удовлетворяет условию $S_i(y) = \lambda_i \Rightarrow$ выпуклая линейная оболочка множества

$$X = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

является пустой.

3. Вычислительный эксперимент

Для проверки работоспособности предложенного метода был проведён вычислительный эксперимент по распознаванию состояний глаз. В качестве исходных данных использовались изображения двух классов: открытые глаза и закрытые глаза. Размеры обучающих выборок составляли $|X_{\text{open}}| = 96$ и $|X_{\text{close}}| = 93$. Предварительная обработка изображений выполнялась с использованием библиотеки `dlib` [8] и алгоритма локализации характерных точек лица. Пример разметки глаз с помощью библиотеки `dlib` показан на рисунке 1.



Рис. 1: Пример разметки характерных точек глаз с использованием библиотеки `dlib`

Шаг 1. Формирование обучающих и тестовых выборок.

Для всех обучающих и тестовых изображений [9] выполнялась предварительная обработка. Изображения переводились в цветовое пространство RGB, после чего с использованием библиотеки `dlib` [8] осуществлялось обнаружение лица и определение координат 68 антропометрических точек. Изображения, на которых лицо не было обнаружено, исключались из дальнейшего рассмотрения. В эксперименте таких изображений обнаружено не было. Для формирования признакового описания использовались характерные точки области глаз с номерами 37, 38, 40, 41, 43, 44, 47 и 48, определяемые с помощью библиотеки dlib.

Координаты каждой ключевой точки предварительно нормировались.

Для каждого изображения ширины W и высоты H координаты характерных точек глаз предварительно нормируются относительно размеров

изображения:

$$\widetilde{x}_i = \frac{x_i}{W}, \qquad \widetilde{y}_i = \frac{y_i}{H},$$

где (x_i, y_i) — исходные координаты i-й характерной точки, полученной с помощью библиотеки dlib.

В работе используются точки с номерами

$$37,\ 38,\ 40,\ 41,\ 43,\ 44,\ 47,\ 48.$$

На основе нормированных координат формируется вектор

$$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_8),$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \widetilde{x}_{41} - \widetilde{x}_{37}, \quad \Delta_2 = \widetilde{y}_{41} - \widetilde{y}_{37},\\
\Delta_3 &= \widetilde{x}_{40} - \widetilde{x}_{38}, \quad \Delta_4 = \widetilde{y}_{40} - \widetilde{y}_{38},\\
\Delta_5 &= \widetilde{x}_{47} - \widetilde{x}_{43}, \quad \Delta_6 = \widetilde{y}_{47} - \widetilde{y}_{43},\\
\Delta_7 &= \widetilde{x}_{48} - \widetilde{x}_{44}, \quad \Delta_8 = \widetilde{y}_{48} - \widetilde{y}_{44}.
\end{aligned}$$

Далее для каждого изображения вычисляются

$$\Delta_{\min} = \min_{1 \leqslant j \leqslant 8} \Delta_j, \qquad \Delta_{\max} = \max_{1 \leqslant j \leqslant 8} \Delta_j.$$

Если $\Delta_{\max} \neq \Delta_{\min}$, то каждый компонент вектора линейно нормируется на отрезок $[-1, 1]$ по формуле

$$z_j = -1 + 2\frac{\Delta_j - \Delta_{\min}}{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}}, \qquad j = 1, \ldots, 8.$$

Если $\Delta_{\max} = \Delta_{\min}$, то каждый компонент вектора линейно нормируется на отрезок $[-1, 1]$ по формуле

$$z_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, 8.$$

После этого каждое значение z_j округляется до ближайшего целого числа: $q_j = \mathrm{round}(z_j), \qquad q_j \in \{-1, 0, 1\}$.

Наконец, для перехода к элементам конечного поля $E_3 = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ производится замена $-1 \longmapsto 2$.

Таким образом, каждому изображению ставится в соответствие вектор

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_8) \in E_3^8.$$

По сформированным векторам были построены обучающие матрицы признаков $train_o$ и $train_c$ для изображений с открытыми и закрытыми глазами соответственно, а также тестовые матрицы $test_o$ и $test_c$.

В результате эксперимента для обучающей выборки закрытых глаз была получена следующая матрица уникальных векторов признаков:

$$train_{\text{close}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

И для обучающей выборки открытых глаз:

$$train_{\text{open}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Построение выпуклых линейных оболочек.

В рассматриваемой задаче размерность пространства признаков составляла $n = 8$. На первом этапе эксперимента для каждого класса независимо строилось множество граней выпуклой линейной оболочки.

Пусть $X = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(N)}\} \subset E_3^n$.

Для построения граней выпуклой линейной оболочки перебираются векторы коэффициентов $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in E_3^{n+1}$, задающие гиперплоскости $S_a = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_3^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$

(mod 3)}. Затем для каждой гиперплоскости S_a проверялось выполнение условий, определяющих грань выпуклой линейной оболочки множества X. Для этого для каждой точки $x \in X$ вычислялось значение линейной формы, задающей гиперплоскость S_a, по модулю 3.

В результате были получены множества $G_{\text{open}} = G(train_{\text{open}})$, содержащее 57 граней и $G_{\text{close}} = G(train_{\text{close}})$, содержащее 63 грани, задающие выпуклые линейные оболочки соответствующих классов.

Шаг 3. Проверка непустоты построенных оболочек.

После построения множеств граней для каждого класса выполнялся поиск внутренних точек выпуклых линейных оболочек, не принадлежащих исходным обучающим множествам. Результаты показали, что такие точки существуют для обоих классов.

По результатам эксперимента число внутренних точек выпуклой линейной оболочки открытых глаз составляет 23, а число внутренних точек выпуклой линейной оболочки закрытых глаз составляет 31.

Шаг 4. Проверка пересечения классов точек открытых и закрытых глаз.

Было проведено пересечение оболочек открытых и закрытых глаз для того, чтобы избежать случаев вхождения точек из тестовых выборок одновременно в обе оболочки. В рассматриваемом вычислительном эксперименте общих точек выпуклых линейных оболочек классов открытых и закрытых глаз обнаружено не было.

Случаи, когда классифицируемый объект одновременно принадлежит обеим оболочкам или не принадлежит ни одной из них, в рамках настоящей работы не рассматривались. Разработка правила принятия решения для таких случаев является направлением дальнейшего развития предложенного метода.

Шаг 5. Вычисление точности распознавания открытых и закрытых глаз.

Для каждой тестовой точки вычислялись значения линейных форм, задающих грани соответствующей выпуклой линейной оболочки, после чего выполнялась проверка совпадения полученных значений со значениями, наблюдаемыми на обучающих объектах данного класса.

Тестирование проводилось на независимых выборках изображений. Для класса закрытых глаз использовалось 76 тестовых изображений, из которых 73 были распознаны как принадлежащие выпуклой линейной оболочке класса закрытых глаз. Следовательно, точность распознавания составила $Acc_{\text{close}} = \frac{73}{76} \cdot 100\% = 96.05\%$. Для класса открытых глаз использовалось 48 тестовых изображений, из которых 47 были распознаны как принадлежащие выпуклой линейной оболочке класса открытых глаз.

Таким образом, точность распознавания составила $Acc_{\text{open}} = \frac{47}{48} \cdot 100\% = 97.92\%$.

Для исследования геометрических свойств построенных выпуклых линейных оболочек был проведён дополнительный эксперимент. В рамках эксперимента для каждого класса вычислялись две характеристики: доля правильно классифицированных тестовых объектов, лежащих внутри выпуклой линейной оболочки соответствующего класса, и доля правильно классифицированных тестовых объектов, совпадающих с элементами обучающей выборки.

Для класса закрытых глаз знаменателем при вычислении этих долей являлось число правильно классифицированных тестовых объектов, равное 73. Результаты для класса закрытых глаз представлены в таблице 1.

Доля правильно классифицированных точек из test_{close}, лежащих внутри выпуклой линейной оболочки обучающего множества train_{close}	64.38%
Доля правильно классифицированных точек из test_{close}, совпадающих с точками обучающего множества train_{close}	35.62%

Таблица 1: Принадлежность правильно классифицированных тестовых объектов выпуклой линейной оболочке для класса закрытых глаз

Для класса открытых глаз знаменателем при вычислении этих долей являлось число правильно классифицированных тестовых объектов, равное 47. Результаты для класса открытых глаз представлены в таблице 2.

Доля правильно классифицированных точек из test_{open}, лежащих внутри выпуклой линейной оболочки обучающего множества train_{open}	55.32%
Доля правильно классифицированных точек из test_{open}, совпадающих с точками обучающего множества train_{open}	44.68%

Таблица 2: Принадлежность правильно классифицированных тестовых объектов выпуклой линейной оболочке для класса открытых глаз

Полученные результаты имеют принципиальное значение для обоснования предложенного метода. Если бы распознавание фактически сводилось к сравнению тестовых объектов с элементами обучающей выборки, то доля объектов, принадлежащих выпуклой линейной оболочке, совпадала бы с долей объектов, присутствующих в обучающей выборке.

Однако результаты эксперимента показывают существенное различие между этими величинами. Для класса закрытых глаз разница составляет $64.38 - 35.62 = 28.76$ процентных пунктов, а для класса открытых глаз — $55.32 - 44.68 = 10.64$ процентных пунктов.

Следовательно, значительная часть тестовых объектов принадлежит выпуклым линейным оболочкам, не совпадая при этом с объектами обучающей выборки. Это означает, что алгоритм использует не только обучающие точки, но и дополнительные точки пространства E_3^8, принадлежащие внутренней области построенных выпуклых линейных оболочек.

Совместный анализ результатов проверки непустоты оболочек и результатов дополнительного эксперимента показывает, что тестовые объекты располагаются как на гранях построенных оболочек, так и внутри них. Таким образом, в данном примере принятие решения осуществляется на основе геометрической структуры выпуклой линейной оболочки, а не сводится к проверке совпадения с конечным набором обучающих объектов.

Полученные результаты подтверждают работоспособность предложенного метода распознавания и демонстрируют наличие у построенных выпуклых линейных оболочек обобщающей способности по отношению к новым объектам. Кроме того, предложенный подход сохраняет полную геометрическую интерпретируемость процесса принятия решения, поскольку классификация определяется свойствами граней выпуклой линейной оболочки и расположением объектов относительно них.

4. Выводы

В работе предложен метод распознавания открытых и закрытых глаз, основанный на использовании выпуклых линейных оболочек в пространстве E_3^n. Были введены определения гиперплоскости в дискретном пространстве, грани выпуклой линейной оболочки и выпуклой линейной оболочки конечного множества точек. На основе данных определений разработан алгоритм распознавания изображений глаз. Предложенный подход применён к задаче классификации состояний глаз.

Научная новизна работы заключается в построении модели выпуклой линейной оболочки над конечным полем E_3, а также в использовании данной модели для решения прикладной задачи распознавания изображений.

Проведённый вычислительный эксперимент показал работоспособность предложенного метода. Для класса закрытых глаз была получена точность 96.05%, а для класса открытых глаз — 97.92%. Обозначим через

N_o и N_c количества различных дискретизированных векторов объектов обучающей выборки открытых и закрытых глаз соответственно, непосредственно используемых при построении граней, а через n — размерность пространства признаков. Вычислительная сложность построения граней для двух классов оценивается как $O\left((N_o + N_c)n3^{n+1}\right)$. В проведённом эксперименте $n = 8$, $N_o = 13$ и $N_c = 11$, поэтому оценка принимает вид $O\left((13 + 11) \cdot 8 \cdot 3^9\right)$. При фиксированном n сложность линейна относительно числа различных обучающих векторов $N_o + N_c$, однако относительно размерности n она является экспоненциальной. Сильной стороной метода является отсутствие этапа обучения параметров, детерминированность вычислений и возможность геометрической интерпретации результата. Ограничением является экспоненциальная зависимость от размерности пространства признаков, вследствие чего применение метода наиболее целесообразно для задач с малой или фиксированной размерностью.

Список литературы

[1] R. Duda, P. Hart, D. Stork, *Pattern Classification. 2nd ed.*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2001, 654 pp.

[2] C. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer New York, NY, New York, NY, USA, 2006, 778 pp.

[3] R. Szeliski, *Computer Vision: Algorithms and Applications. 1st ed.*, Springer, London, 2011, 812 pp.

[4] R. Gonzalez, R. Woods, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2008, 954 pp.

[5] K. Kim, H. Hong, G. Nam, K. Park, "A Study of Deep CNN-Based Classification of Open and Closed Eyes Using a Visible Light Camera Sensor", *Sensors*, **17**:7 (2017), 1534. DOI: 10.3390/s17071534.

[6] I. Kayadibi, G. E. Güraksın, U. Ergün, N. Özmen Süzme, "An Eye State Recognition System Using Transfer Learning: AlexNet-Based Deep Convolutional Neural Network", *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **15** (2022), 49. DOI: 10.1007/s44196-022-00108-2.

[7] R. Florez, F. Palomino-Quispe, R. Coaquira-Castillo, J. Herrera-Levano, T. Paixao, A. Alvarez, "A CNN-Based Approach for Driver Drowsiness Detection by Real-Time Eye State Identification", *Applied Sciences*, **13**:13 (2023), 7849. DOI: 10.3390/app13137849.

[8] Davis E. King, *Dlib C++ Library*, documentation, accessed 10.03.2026, `http://dlib.net/`.

[9] E. Kovaleva, *Faces with Open/Closed Eyes*, accessed 10.03.2026, `https://www.kaggle.com/datasets/helen647135486/faces-with-open-closed-eyes`.

Статья поступила 28 июня 2026 г.

A finite-field convex linear hull-based recognition method

E. S. Kovaleva

The method of constructing convex linear hulls of a finite set of points is often used in recognition problems. In an n-dimensional space, n-element subsets of points are considered for this purpose. If the remaining points lie on the same side of the hyperplane containing the selected points, then this hyperplane is called a face. Checking whether a new point belongs to the convex linear hull is reduced to verifying a system of linear inequalities determined by the faces.

We propose considering a coarse-grained problem in which the coordinates of the points take three values, $0, 1, -1$, interpreted as elements of a field with three elements. In this setting, the linear form is equal to zero at points lying on the hyperplane, equal to 1 on one side of it, and equal to -1 on the other side. Checking whether a point belongs to the convex linear hull is reduced to verifying the conditions $S_a(x) \in \{0, \lambda_a\}$ for all faces S_a of the convex linear hull, where the value 0 corresponds to the point lying on the hyperplane S_a, while λ_a is the common value of the linear form at the points of the set that do not belong to S_a. Thus, whether a new point belongs to the convex linear hull is determined by its position relative to all faces of the hull.

Keywords: convex linear hull, finite fields, E_3^n space, linear forms, pattern recognition, image classification.

References

[1] R. Duda, P. Hart, D. Stork, *Pattern Classification. 2nd ed.*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 2001, 654 pp.

[2] C. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer New York, NY, New York, NY, USA, 2006, 778 pp.

[3] R. Szeliski, *Computer Vision: Algorithms and Applications. 1st ed.*, Springer, London, 2011, 812 pp.

[4] R. Gonzalez, R. Woods, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2008, 954 pp.

[5] K. Kim, H. Hong, G. Nam, K. Park, "A Study of Deep CNN-Based Classification of Open and Closed Eyes Using a Visible Light Camera Sensor", *Sensors*, **17**:7 (2017), 1534. DOI: 10.3390/s17071534.

[6] I. Kayadibi, G. E. Güraksın, U. Ergün, N. Özmen Süzme, "An Eye State Recognition System Using Transfer Learning: AlexNet-Based Deep Convolutional Neural Network", *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **15** (2022), 49. DOI: 10.1007/s44196-022-00108-2.

[7] R. Florez, F. Palomino-Quispe, R. Coaquira-Castillo, J. Herrera-Levano, T. Paixao, A. Alvarez, "A CNN-Based Approach for Driver Drowsiness Detection by Real-Time Eye State Identification", *Applied Sciences*, **13**:13 (2023), 7849. DOI: 10.3390/app13137849.

[8] Davis E. King, *Dlib C++ Library*, documentation, accessed 10.03.2026, http://dlib.net/.

[9] E. Kovaleva, *Faces with Open/Closed Eyes*, accessed 10.03.2026, https://www.kaggle.com/datasets/helen647135486/faces-with-open-closed-eyes.

Received on June 28, 2026