Почти одноместные базисы автоматов с операцией суперпозиции.

Д. Н. Бабин*

Для систем автоматных функций, образующих замкнутый класс важно определить, базисом от какого минимального числа переменных они могут быть получены операциями суперпозиции. Особый интерес представляют классы, в которых «собственно» автоматы из базиса имеют одну входную переменную, это ограничение не распространяется на булевы функции из базиса, которые являются автоматами с одним состоянием. Примером такого класса является класс всех автоматов. Автор изучает подклассы автоматов, у которых функции переходов и выходов принадлежат некоторому классу Поста.

Ключевые слова: арность, автомат, булевая функция, суперпозиция, замкнутый класс.

Понятие суперпозиции возникает сразу за понятием функции, как в математическом анализе, так и в алгебре. Относительно суперпозиции решаются главные задачи: полнота и выразимость. При этом под выразимостью понимается возможность получения функций одного множества через функции другого множества, а под полнотой — выразимость всех функций через заданные. Вычисление автоматной функции $\mathbf{f}$ задаётся своими каноническими уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)) \end{cases} \tag{1}$$

Здесь q — это состояние a-функции, q_0 её начальное состояние, буквы $a(t)$ и $b(t)$ называются входной и выходной буквами, $t = 1, 2, ...$, а сверхслова $a(1)a(2)...$ и $b(1)b(2)...$ - входными и выходными сверхсловами, соответственно. Функции φ и ψ называются функцией переходов и выходной функцией, соответственно, а шестерка

$$(A, Q, B, \varphi, \psi, q_0) \tag{2}$$

* *Бабин Дмитрий Николаевич* — д.ф.-м.н., проф. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: d.n.babin@mail.ru.

Babin Dmitry Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

называется инициальным автоматом, порождающим a-функцию $\mathbf{f}$. При этом предполагается, что шестёрка (2) минимальна по числу состояний среди всех подобных шестёрок для автоматной функции $\mathbf{f}$ (1). Это так называемый "приведенный" автомат, в котором все состояния достижимы из начального и нет эквивалентных состояний. При этом будем предполагать, что $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2$. Это так называемый структурный автомат с n входами.

Автоматная функция работает в дискретном времени, и при каждом такте работы меняет своё активное состояние под действием входной буквы. На выходе в этот такт возникает выходная буква, определяемая выходной функцией. Таким образом, автомат реализует отображение слов входного алфавита в слова выходного алфавита.

Входной сложностью автомата (2) с $A \subseteq E_2^n, Q \subseteq E_2^s, B \subseteq E_2$ называется число его входов n. Входной сложностью множества автоматов называется максимальная входная сложность (или её точная верхняя грань) автоматов этого множества, арностью замкнутого класса автоматов называется минимальная входная сложность порождающей системы этого класса.

Для непрерывных функций задача минимальной арности порождающей системы была решена А.Н. Колмогоровым в статье "О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения."[1]. Для автоматных функций подобная теорема была получена автором [2]. Оказалось, что система автоматов с одним входом и универсальная булева функция - это полная система в классе автоматов с операцией суперпозиции.

Назовём автоматную функцию *тривиальной*, если она может быть реализована автоматом с одним состоянием. Тривиальная автоматная функция — это, фактически, булева функция. Назовём замкнутый класс автоматов классом *арности почти один*, если в нём найдётся базис, все нетривиальные автоматы которого имеют один вход.

Представляют интерес классы автоматов *арности почти один*, так как это минимальные по арности классы автоматов, имеющие в своём замыкании автоматы со многими входами. А также интересны классы автоматов не являющиеся таковыми.

Пусть в автомате (2) с каноническими уравнениями (1) при всех $a \in A$ и всех $q_1 \neq q_2$ выполнено $\varphi(q_1, a) \neq \varphi(q_2, a)$, то есть каждая входная буква a задаёт биекцию

$$\varphi_a : Q \to Q$$

множества состояний. Здесь $\varphi_a(q) = \varphi(q, a)$. Такие автоматы называются *групповыми*. Множество перестановок, порождённое образующими

из $\{\varphi_a | a \in A\}$ называется *полугруппой автомата* (2), для группового автомата полугруппа является группой.

Не трудно убедиться, что множество групповых автоматов замкнуто относительно суперпозиции, а также, что приведенный автомат группового автомата тоже групповой. Автомат с циклической группой, назовём циклическим групповым автоматом. Известно, что замыкание множества циклических групповых автоматов — это собственный подкласс класса групповых автоматов — множество групповых автоматов с разрешимыми группами. Булевы функции можно считать циклическими групповыми автоматами.

Рассмотрим маленький

Пример.

Пусть G конечный коммутативный моноид с нейтральным элементом 0 и операцией $\oplus$, и

$$0 \in A_1 \subseteq G, 0 \in A_2 \subseteq G,$$

системы образующих, содержащие 0. Пусть автоматы таковы:

$$(A_1, G, G, \oplus, \psi_0, 0), \qquad (A_2, G, G, \oplus, \psi_0, 0), \tag{3}$$

где $\psi_0(q, a) \equiv q$. Задаваемые этими автоматами автоматные функции обозначим через $\mathbf{f_1}$ и $\mathbf{f_2}$, соответственно. Автоматная функция $\mathbf{f_1} \oplus \mathbf{f_2}$ (рис.1) порождается автоматом

$$(A_1 \times A_2, G \times G, G, (\oplus, \oplus), \psi_0 \oplus \psi_0, (0, 0)), \tag{4}$$

Состояния (q_1, q_2) и (q_3, q_4), при $q_1 \oplus q_2 = q_3 \oplus q_4 = q$ эквивалентны потому что, по входной букве (a_1, a_2) они перейдут в эквивалентные состояния (q'_1, q'_2) и (q'_3, q'_4), где

$$(q'_1 \oplus q'_2) = (q_1 \oplus a_1) \oplus (q_2 \oplus a_2) = (q_1 \oplus q_2) \oplus (a_1 \oplus a_2) = q \oplus (a_1 \oplus a_2).$$

$$(q'_3 \oplus q'_4) = (q_3 \oplus a_1) \oplus (q_4 \oplus a_2) = (q_3 \oplus q_4) \oplus (a_1 \oplus a_2) = q \oplus (a_1 \oplus a_2).$$

Приведенный автомат для $\mathbf{f_1} \oplus \mathbf{f_2}$ (рис. 1) — это

$$(A_1 \times A_2, G, G, \varphi_0, \psi_0, 0), \tag{5}$$

где $\varphi_0(q, a_1, a_2) = q \oplus (a_1 \oplus a_2)$

Автомат (5) уже имеет множество разных преобразований, задаваемых входными буквами из множества

$A_1 \oplus A_2 = \{a_1 \oplus a_2 \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$.

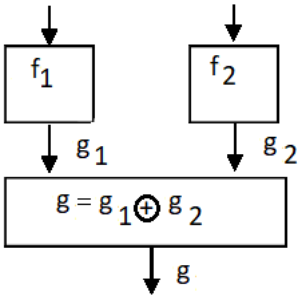


Рис. 1

Применим эту схему к автоматам с циклическими группами и одним входом, пусть $GG = G \setminus \{0\}, |GG| = t$ множество ненулевых элементов циклической группы G и автоматная функция $\mathbf{f_i}$ задаётся автоматом

$$(\{0,1\}, G, G, \varphi_i, \psi_0, 0), i = 1, \ldots, t,$$

где $\varphi_i(g,0) = g, \varphi_i(g,1) = g \oplus a_i$.

Рассмотрим автомат $\mathbf{F} = (\mathbf{f_1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{f_t})(\mathbf{\Theta(a)})$ (рис.2).

Здесь $\Theta : {E_2}^p \to {E_2}^t$, имеет в качестве входной буквы $a \in G$ в некоторой двоичной кодировке.

$$\Theta(a_i) = 0 \ldots 1 \ldots 0,$$

где 1 стоит на i-том месте, $i = 1, \ldots, t$. $\Theta(0) = 0^t$. Здесь p это целая часть от $\log_2(t+1) + 1$. Для неиспользуемого кода x положим $\Theta(x) = 0^t$. В дальнейшем мы будем аналогично использовать не бинарные входы и выходы автоматов.

Схема (рис.2) из состояния $g = g_1 \oplus g_2 \oplus \ldots \oplus g_t$ под действием входной буквы a_i перейдёт в состояние $g_1 \oplus \ldots \oplus g_i \oplus a_i \oplus \ldots \oplus g_t = g \oplus a_i$. Таким образом, схема реализует автомат

$$(G, G, G, \oplus, \psi_0, 0),$$

из которого и булевых функций можно получить любой автомат с циклической группой G. Известно [3], что замыкание множества автоматов с циклическими группами даёт класс автоматов с разрешимыми группами.

Кроме того, сам класс групповых автоматов не порождается своими одноместными автоматами и булевыми функциями [4]. Получилась

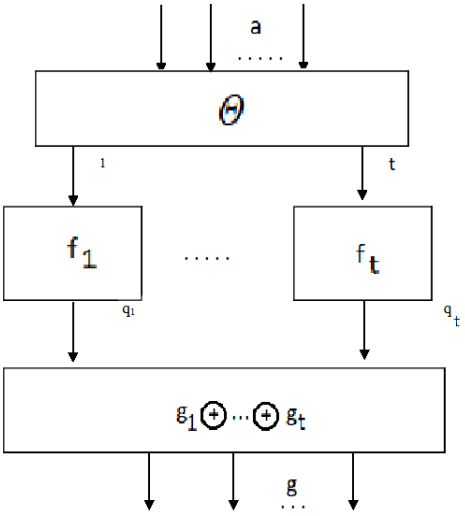


Рис. 2

Теорема 1.

1. Класс групповых автоматов с разрешимыми группами имеет арность почти 1.

2. Класс групповых автоматов не имеет арность почти 1.

В рассмотренном примере требование совпадения операции $\oplus$ с функцией переходов автомата является избыточным, достаточно потребовать, чтобы в автоматах (3) было выполнено

$$\varphi(q, a) = \Phi(q) \oplus a, \tag{6}$$

где $\Phi(q_1 \oplus q_2) = \Phi(q_1) \oplus \Phi(q_2)$

В самом деле, тогда

$$\varphi(q_1, a_1) \oplus \varphi(q_2, a_2) = (\Phi(q_1) \oplus a_1) \oplus (\Phi(q_2) \oplus a_2) = \Phi(q_1 \oplus q_2) \oplus (a_1 \oplus a_2),$$

Под это условие подпадает класс линейных автоматов. Автомат (1) называется линейным, если его функции переходов и выходов линейны. Нас интересует возможность выразимости через одноместные автоматы и булевые линейные функции линейного автомата, выдающего код своего состояния. Его канонические уравнения имеют вид

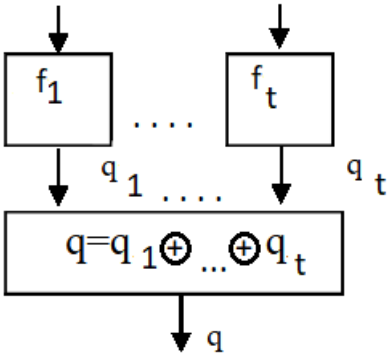


Рис. 3

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = Aq(t) + Ba(t) \\ b(t) = q(t) \end{cases} \tag{7}$$

Здесь в качестве $\oplus$ используется $+$ сложение по модулю 2, $a \in {E_2}^t$. Произвольный линейный автомат получается из (7) суперпозицией с линейными булевыми функциями. Пусть в (7) матрица B это строка из столбцов $(B_1 B_2 \dots B_t)$, тогда автомат (7) получается схемой (рис.3) из одноместных автоматов (8) вида

$$(\{0,1\}, Q, Q, \varphi_i, \psi_0, 0), i = 1, \dots, t,$$

где $\varphi_i(q,x) = Aq + B_i x, \psi_0(q,x) = q, x \in \{0,1\}, i = 1, \dots t.$

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = Aq(t) + B_i a(t) \\ b(t) = q(t) \end{cases} \tag{8}$$

Схема (рис.3) из состояния $q = q_1 + q_2 + \dots + q_t$ под действием входной буквы $x_1 \dots x_t$ перейдёт в состояние

$Aq_1 + B_1 x_1 + \dots + Aq_i + B_i x_i + \dots + Aq_t + B_t x_t = Aq + B(x_1 \dots x_t)^T$. Здесь $(x_1 \dots x_t)^T$ обозначает транспонированную строку или вектор-столбец.

Схема (рис.3) реализует автомат (7). Таким образом, получилась известная

Теорема 2. *Класс линейных автоматов имеет арность почти 1.* [5]

Заметим, что теорема 2 верна для линейных автоматов над любым конечным полем.

Если в качестве операции $\oplus$ взять дизъюнкцию $\vee$, то получаем класс автоматов с идемпотентным сложением $x \vee y = y \vee x, x \vee x = x$ и каноническими уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = Aq(t) \vee Ba(t) \\ b(t) = Dq(t) \vee La(t) \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство выразимости автомата (9) через одноместные и дизъюнкцию проводится аналогично линейному случаю. При этом знак $+$ заменяется на $\vee$ и при умножении строки $a_1 a_2 \dots a_m \in {E_2}^m$ на столбец $q_1 q_2 \dots q_m \in {E_2}^m$ используется формула

$$(a_1 \cdot q_1) \vee \dots \vee (a_m \cdot q_m)$$

Имеет место

Теорема 3.
Класс дизъюнктивных автоматов имеет арность почти 1.

Теорема обобщается для автоматов над E_k, если вместо функции $\vee$ использовать максимум $\max(x, y)$.

Если в качестве операции $\oplus$ взять конъюнкцию $\&$

$$x\&y = y\&x, x\&x = x,$$

то получаем замкнутый класс автоматов с каноническими уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = q_0, \\ q(t+1) = Aq(t)\&Ba(t) \\ b(t) = Dq(t)\&La(t) \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство выразимости автомата (10) через одноместные и конъюнкцию проводится аналогично линейному случаю. При этом знак $+$

заменяется на & и при умножении строки $a_1a_2\dots a_m \in {E_2}^m$ на столбец $q_1q_2\dots q_m \in {E_2}^m$ используется формула

$$({q_1}^{a_1}\&\dots\&{q_m}^{a_m})$$

где $q^0 = 1, q^1 = q$.

Класс автоматов с каноническими уравнениями (10) назовём конъюнктивными автоматами. Не трудно убедиться, что множество конъюнктивных автоматов замкнуто относительно суперпозиции, а также, что приведенный автомат конъюнктивного автомата тоже конъюнктивный. Аналогично получаем теорему

Теорема 4.

Класс конъюнктивных автоматов имеет арность почти 1.

Теорема обобщается для автоматов над E_k, если вместо функции & использовать минимум $\min(x, y)$.

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров., "О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения", *Докл. АН СССР*, **114**:5 (1957), 953–956.

[2] Бабин Д.Н., "О полноте двухместных о.д.-функций относительно суперпозиции", *Дискретная математика*, **1**:4 (1989), 86–91.

[3] Арбиб М., *Алгебраическая теория автоматов языков и полугрупп*, Статистика, Москва, 1975.

[4] Бабин Д.Н., "Вербальные подавтоматы и задача полноты", *Вестник Московского университета*, 1985, № 3, Математика и механика, 82-85.

[5] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов.*, Наука, Москва, 1985.

Статья поступила 30 марта 2026 г.

Almost unary bases of automata under superposition.

D. N. Babin

For systems of automaton functions that form a closed class, it is important to determine the basis from the minimal number of variables from which they can be obtained by superposition operations. Of particular interest are classes in which the 'proper' automata from the basis have a single input variable; this restriction does not apply to Boolean functions from the basis, which are automata with a single state. An example of such a class is the class of all automata. The author studies subclasses of automata whose transition and output functions belong to a certain Post class.

Keywords: arity, automaton, Boolean function, superposition, closed class.

References

[1] A. N. Kolmogorov, "On the representation of continuous functions of several variables in the form of superpositions of continuous functions of one variable and addition (in Russian)", *Proc. USSR Acad. Sci.*, **114**:5 (1957), 953–956.

[2] Babin D.N., "On the completeness of binary o.d. functions with respect to superposition (in Russian)", *Discrete Mathematics*, **1**:4 (1989), 86–91.

[3] Arbib M., *Algebraic theory of automata, languages, and semigroups (in Russian)*, Statistika, Moscow, 1975.

[4] Babin D.N., "Verbal subautomata and the completeness problem (in Russian)", *Bulletin of Moscow University*, 1985, №3, Mathematics and Mechanics, 82-85.

[5] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to Automata Theory (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1985.

Received on March 30, 2026