Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Российская Академия Наук
Международная Академия Технологических Наук
Российская Академия Естественных Наук

Интеллектуальные Системы.

Теория и приложения

ТОМ **30** ВЫПУСК 4 * **2026**

МОСКВА

УДК 519.95; 007:159.955
ББК 32.81

ISSN 2411–4448
Издаётся с 1996 г.

Главный редактор: д.ф.-м.н., профессор Э. Э. Гасанов

Редакционная коллегия:

к.ф.-м.н., доц. А. В. Галатенко **(зам. главного редактора)**
д.ф.-м.н., проф. А. А. Часовских **(зам. главного редактора)**

д.ф.-м.н., проф. В. В. Александров, д.ф.-м.н., проф. С. В. Алёшин, д.ф.-м.н., проф. А. Е. Андреев, д.ф.-м.н., проф. Д. Н. Бабин, к.ф.-м.н., доц. Г. В. Боков, проф. К. Вашик, проф. Я. Деметрович, академик РАН, д.ф.-м.н., проф. Ю. Л. Ершов, к.ф.-м.н., н.с. Г. В. Калачёв, проф. Г. Килибарда, д.ф.-м.н., проф. В. Н. Козлов, к.ф.-м.н., в.н.с. В. А. Носов, д.ф.-м.н., проф. А. С. Подколзин, д.ф.-м.н., проф. Ю. П. Пытьев, д.т.н., проф. А. П. Рыжов, к.ф.-м.н., доц. Э. М. Сайдаматов, академик РАН, д.т.н., проф. А. С. Сигов, к.ф.-м.н., доц. А. С. Строгалов, проф. Б. Тальхайм, проф. Ш. Ушчумлич, д.ф.-м.н., проф. А. В. Чечкин, к.ф.-м.н. Ш. Н. Шералиев, к.ф.-м.н. Р. Шчепанович.

Секретари редакции: И. О. Бергер, Е. В. Кузнецова

В журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» публикуются научные достижения в области теории и приложений интеллектуальных систем, новых информационных технологий и компьютерных наук.
Издание журнала осуществляется под эгидой МГУ имени М.В. Ломоносова, Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» РАН, Отделения «Математическое моделирование технологических процессов» МАТН.
Учредитель журнала: ООО «Интеллектуальные системы».
Журнал входит в список изданий, включенных ВАК РФ в реестр публикаций материалов по кандидатским и докторским диссертациям по математике и механике. Входит в дополнительный перечень научных изданий, в которых могут быть опубликованы результаты диссертаций, защищаемых в МГУ.

Индекс подписки на журнал: 64559 в каталоге НТИ «Роспечать».

Адрес редакции: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д. 1, механико-математический факультет, комн. 12-01.
Адрес издателя: 115230, Россия, Москва, Хлебозаводский проезд, д. 7, стр. 9, офис 9. Тел. +7 (495) 939-46-37, e-mail: mail@intsysmagazine.ru

*) Прежнее название журнала: «Интеллектуальные системы».

© ООО «Интеллектуальные системы», 2026.

ОГЛАВЛЕНИЕ

XIII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» 11

Часть 1. Пленарные доклады

Анохин К. В. Автогенеративные селф-системы 14

Котов В. М. Алгоритмы для задач разбиения и упаковки с неполной информацией 17

Кочергин В. В. Новые результаты в задачах Р. Беллмана и Д. Кнута 27

Тальхайм Б. Модели мышления и поведения, выходящие за рамки ИИ . . 46

Часть 2. Теория автоматов

Tang T. Decision problems for parameterized top-down tree transducers 58

Бабин Д. Н., Муравьев Н. В. О порядке автоматов с операцией суперпозиции. 62

Бирюкова В. А. О порождаемости A-предпредполных классов линейных автоматов 66

Бухарина Д. А. Сложность задачи адресации идемпотентными клеточными автоматами с локаторами 70

Волков Н. Ю. Автоматные и вычислительные системы 74

Гасанов Э. Э., Бобров А. Е. Подсчет числа точек на плоскости клеточными автоматами с локаторами 79

Гаспарян А. С. Классификация однородных одномерных структур со стандартным шаблоном соседства 83

Григорьев С. А., Афонин С. А. О верхних аппроксимациях в моноидах регулярных языков 87

Дробышев А. С., Боков Г. В. О сложности задачи существования предельных циклов заданной длины 91

Ибрагимова Д. Э. Нахождение середины отрезка с помощью одномерного идемпотентного автомата с локаторами 95

Калачев Г. В. О вычислительных возможностях одномерных клеточных автоматов с локаторами 99

Куницын А. А. О длине теста переходов конечного автомата 103

Литовский В. А. Вычисление числовых функций некоторыми видами автоматов 107

Молдованов И. В. Проблема полноты в классе линейных дефинитных автоматов 112

Надиров Ч. Сложение n различных натуральных чисел клеточными автоматами с локаторами 117

Онищенко С. Nondeterministic state complexity of square root 121

Переварюха А. Ю. Hybrid models with delay in the analysis of biophysical phenomena 123

Родин С. Б. О линейной реализуемости переходных систем по входной переменной 127

Ушакова В. В. О совпадении классов автоматно-реализуемых и префиксно-регулярных ω-языков 131

Часовских А. А. Класс линейных автоматов Мура 135

Юсупов Ф. Р. О порождающих множествах в классе конечных автоматов с линейной функцией выходов 139

Часть 3. Теория дискретных функций и дискретная оптимизация

Алексиадис Н. Ф. О проблеме полноты для полиномиальных и рациональных функций 144

Боков Г. В., Коновалов А. Ю., Упорова А. С., Моисеев С. В., Сафонов И. А., Радионов А. А. LD-Leiden: локальное параллельное обнаружение сообществ в динамических графах 148

Бухман А. В. Обобщение одного класса полиномиальных форм и его свойства 152

Ващенко М. И., Мастихина А. А. Алгоритм стягивания путей для задачи поиска простого пути заданной длины 156

Заварухин А. Е., Семишкин М. С., Хворостухина Е. В. Гибридные генетические алгоритмы для решения задач условной оптимизации 160

Калачев Г. В. Оценки активности схем из функциональных элементов, реализующих булевы операторы 164

Касай А. А. О числе вершин выпуклого многоугольника, попадающих на прямую Брезенхема 168

Кочергин В. В., Ярыгин О. В. О λ-сложности системы из четырех одночленов от трех переменных 172

Рябов В. Г. Применение различных способов задания аддитивных характеров конечного поля к изучению свойств дискретных функций 176

Савицкий И. В. Машинный базис по суперпозиции в классе обратимых элементарных функций 180

Селезнева С. Н. О функциях, выразимых полиномами по модулю квадрата

простого числа 184

Симаков М. А. Предобработка СЦЛП с использованием почти параллельных строк 188

Соболев А. И., Хворостухина Е. В. Гибридные метаэвристические алгоритмы для решения задачи коммивояжёра 192

Таранников Ю. В., Трубицин Н. М. Алгоритм проверки минимальности веса биюнктивной функции, не имеющей аффинных имплицент 196

Часть 4. Теория управляющих систем и теория баз данных

Гасанов Э. Э., Калачев Г. В., Бухарина Д. А. Моделирование схем из функциональных элементов клеточными автоматами с локаторами 202

Главацкий С. Т., Бурыкин И. Г. Модели данных и формы представления информации в интеллектуальных системах 206

Дай Ю., Ложкин С. А. Асимптотически оптимальный по сложности синтез булевых схем с линейной динамической активностью для произвольных булевых функций 212

Ложкин С. А., Мо Д. Асимптотически оптимальные гомеоморфные односторонние вложения троичных деревьев подобных формул в прямоугольные решетки 216

Максимов И. И. Подход к проектированию системы подготовки научных статей в техническом университете 220

Надиров Ч. Сложность реализации почти всех булевых функций клеточными автоматами с локаторами 224

Попков К. А. О минимальных единичных проверяющих тестах размыкания для контактных схем с дополнительными полюсами 228

Цуй Ч., Романов Д. С. О единичных проверяющих тестах для формул в некоторых базисах при константных неисправностях на выходах функциональных элементов 232

Шлапаков Д. М. Математическая модель боя с применением расходуемых FPV-дронов 236

Часть 5. Квантовые вычисления, кодирование и защита информации

Александров Д. А. О построении бесформенных полиномиально полных квазигрупп 242

Арканников К. А., Мубараков Б. Г. Сравнение способов умножения в схемах Kyber + Lizard и NewHope + Lizard 246

Гайваль Л. В. Подквазигруппы случайных m-арных квазигрупп 250

Гашков С. Б., Сесюкалов А. А., Фролов А. Б. О криптосистеме Шора-Ривеста в поле с оптимальным нормальным базисом второго типа 254

Дергач П. С. О вычислении размаха регулярных языков при алфавитном кодировании 258

Жигляев Р. А. Квадратичный алгоритм проверки бесформенности конечных квазигрупп 262

Зиннатуллин И. Г. О схеме, реализующей квантовую хеш-функцию . . . 266

Ишмухаметов Ш. Т., Курбангалеев А. А., Мубараков Б. Г., Рубцова Р. Г. Об использовании малой теоремы Ферма и ее аналогов в криптографии . . . 270

Калачев Г. В. Расширение произведения LDPC кодов 274

Никифоров О. Л., Мубараков Б. Г. Прототип низкоресурсного блокчейн-протокола для Интернета вещей с HMAC-защитой и edge-валидацией 278

Осипова М. А. Правильные семейства булевых функций с симметрическим слагаемым 282

Хадиев К. Р., Капралов Р. И., Иликаев А. Р. Квантовые и классические алгоритмы для задачи о кратчайшей общей надстроке с множественными вхождениями и запросами 286

Чадов И. А. Остаточная запутанность после локальных проективных измерений 290

Чаплыгина С. С. Оценка количества n-квазигрупп на выходе алгоритма изотопного преобразования, гарантирующего криптографические свойства . 294

Чернявский А. Ю., Бантыш Б. И., Куликов Д. А., Киктенко Е. О. О решении задач бинарной оптимизации с использованием алгоритма QAOA 298

Щучкин Н. А. Ортогональность обратимой тернарной операции и двух ее термальных операций 302

Юсуфова А. А., Калачев Г. В. Нижняя граница расширения произведения линейных кодов 306

Часть 6. Нейронные сети, большие языковые модели, машинное обучение и нечеткая математика

Reshetarov P. A., Хворостухина Е. В. Spectral Content Ranking Method Based on Heterogeneous Hypergraph Models 312

Агазарян А. А., Рыжов А. П. О возможной персонализации взаимодействия пользователя с большими лингвистическими моделями 316

Алексиадис Н. Ф., Сет А. А. Сравнительный анализ нейронных сетей с комплексными функциями активации 320

Алисейчик П. А., Снегова Е. А. Применимость линейных методов снижения размерности для приближенного поиска ближайших соседей на запросах вне

исходного распределения 324

Балтаев Г. И., Рыжов А. П. Временная локализация технических действий в видеозаписях сумо с использованием различных представлений видеоданных 328

Беляев А. А. Миграция крупных программных проектов с использованием генеративного ИИ на современные кроссплатформенные технологии 332

Бергер И. О., Битюцкая Е. В., Гасанов Э. Э., Херувимова А. А., Хлебникова А. А. Применение больших языковых моделей для построения графов трудных жизненных ситуаций 336

Богданов А. Д., Рыжов А. П. Восстановление данных на основе ассоциативных правил 341

Боков Г. В., Коновалов А. Ю., Упорова А. С., Дробышев А. С., Егоров Я. Г. ComNetX: локальная иерархическая адаптация методов обнаружения сообществ в динамических графах 345

Ван С. Кодирование замкнутых ломаных локальными отношениями площадей 349

Журавлёв Г. В., Кумсков М. И. Символьные, численные и свёрточные методы анализа временных рядов: качество и время вычислений 353

Кокосинский Д. В. Применение больших языковых моделей для выявления значений слов в задаче обнаружения лексико-семантических изменений . 357

Кукузей Н. А., Седельникова О. Ю., Цыбанов И. А., Ринк О. Л., Майсурадзе А. И. Универсальная мультифрагментная разметка текстов методом попарной классификации 361

Кумсков М. И., Махова А. Г., Медведев П. А., Журавлёв Г. В. FuzzyLSTM и представления финансовых временных рядов 365

Ли Ц., Мамонова Т. Е. Причинная кросс-видовая память для онлайн-отслеживания трехмерных объектов 369

Ломовский Р. Е., Кумсков М. И. Кластерное согласование RGB-разметки и LiDAR-облаков для семантической навигации беспилотного ровера 373

Лужецкая А. В., Есаулова Д. С., Караваева К. Э., Балавнев С. Н. Идентификация и подсчёт крупного рогатого скота при однокамерном и многокамерном видеонаблюдении 377

Маносин В. В., Кумсков М. И. Исследование и переработка системы навигации виртуального ровера в среде Unity на основе обучения с подкреплением . 381

Мурсалимов Д. А., Ярошенко П. В., Лукашевич Н. В. Тестирование больших языковых моделей на минимальных эмоциональных предложениях 385

Осокин В. В., Алимов Р. Ф. Гибридное извлечение состава вентиляционных установок из проектной документации: формальные грамматики и большие языковые модели 389

Поспелов Н. А., Плюснин В. В., Рогожникова О. С., Иванова А. А., Торопова К. А., Ивашкина О. И., Аветисов В. А., Анохин К. В. Динамика размерности представлений и информации о классе при обучении импульсной нейронной сети 393

Потапова Н. С. Построение графовой модели дорожных ситуаций на основе правил дорожного движения с использованием языковых моделей 397

Радченко С. А., Мубараков Б. Г. Гибридный подход к оценке риска подозрительных транзакций в платёжных системах 401

Седельникова О. Ю., Кукузей Н. А., Цыбанов И. А., Ринк О. Л., Майсурадзе А. И., Ищенко Р. В. Оценка стоимости применения для выбора модели структурированной разметки текста 405

Седых М. В., Бродская Ю. А. Построение интеллектуальной системы дифференциальной диагностики неходжкинских лимфом 409

Сидоров Л. С., Майсурадзе А. И. Влияние способа построения матрицы смежности на обобщающую способность графовых нейронных сетей при анализе сигналов носимых датчиков 413

Табаченков А. М., Майсурадзе А. И. Эффективный аудит текстовых разметок на основе индивидуальных оценок сложности 417

Тарлинский И. В., Главацкий С. Т. Контрастивная адаптация поисковых представлений с ограничением опорной геометрии 421

Федотов Ф. А., Рыжов А. П. Обратный синтез нечётких операторов агрегации в однородных моделях оценки риска 425

Филатов А. С. Версионная архитектура интеллектуальной системы поддержки групповых решений по классификации объектов аналитического хранилища 429

Филатов Д. А. Решение задачи раскраски графов на основе DSatur и PI-GNN 433

Хрулев Р. А. Экспоненциальная нижняя оценка размерности эмбеддингов для ранжирования лемм 437

Хусаенов А. А. Критериальная система универсальности минимальных функций, реализуемых нейронными схемами 441

Шамаева Е. Д., Лукашевич Н. В. Синтаксический анализ с помощью больших языковых моделей: влияние форматов генерации 445

Часть 7. Символьные вычисления

Абрамов С. А., Рябенко А. А. Субрезультантный алгоритм для наибольшего общего делителя полиномов с несколькими параметрами 450

Казаков И. Б. Стандартизированный доказательный текст как объект символьных вычислений и источник спецификаций для обучения LLM 454

Носов А. В. Детерминированное приведение операторных матриц к слабой форме Попова 459

Оганджанянц О. С., Садов С. Ю. От тритов к битам в солвере z3: ускорение трипликации сильных стартеров 463

Часть 8. Интеллектуальные системы в естественных науках

Litvinov V. L., Litvinova K. V. AI-Driven Analysis of Stochastic Longitudinal Vibrations in a Viscoelastic Cable with Moving Boundaries 468

Васильев А. Н., Шевцова Ю. Г., Каплан А. Я. Внутрикортикальная возбудимость как управляющий сигнал нейроинтерфейса 473

Ганин И. П., Бейлина И. Б., Васильев А. Н., Каплан А. Я. Разработка и апробация стимулятора пассивных движений для нейрореабилитации на основе интерфейсов мозг-компьютер 477

Гасанов Э. Э., Дейнека Н. И. Модель гомеостаза эндокринной системы человека 481

Гасанов Э. Э., Ширинян М. Э. Об одном подходе к моделированию регуляции физиологических параметров 485

Дубонос Н. С., Новиков А. С., Боков Г. В., Митрофанов А. А. Гибридные подходы на основе машинного обучения и графовых нейронных сетей для точного предсказания температур плавления органических кристаллов 490

Евдокимов М. Д., Ивашкина О. И., Торопова К. А., Анохин К. В. Параметры среды, влияющие на возможность консолидации слабой неассоциативной памяти в модели на лабораторных мышах 494

Иванова А. А., Ивашкина О. И., Торопова К. А., Анохин К. В. Функциональная связанность областей мозга при обучении мышей на комплексный условный стимул как отражение целостного восприятия его компонентов 498

Ивашкина О. И., Рогожникова О. С., Поспелов Н. А., Плюснин В. В., Савельев Н. П., Иванова А. А., Торопова К. А., Анохин К. В. Длительность опыта и устойчивость пространственного кода гиппокампа у мышей: подходы к анализу числа и постоянства клеток места 502

Ковалёва Е. С. Метод классификации изображений открытых и закрытых глаз на основе выпуклой линейной оболочки над конечным полем 506

Колдоба Е. В., Говоров А. Д. Применение символьной регрессии для модификации формулы Вильсона 510

Лазухин И. С., Петровский М. И., Машечкин И. В. Сети глубокого обучения в задаче модельного управления технологическим процессом 514

Мирошников А. А., Яковлев Л. В., Морозова М. В., Каплан А. Я. Двухклассовая классификация тактильного воображения по данным многоканальной ЭЭГ 518

Оробец М. А., Поспелов Н. А., Плюснин В. В., Анохин К. В. Компактное представление положения в автокодировщиках нейронной активности 522

Парфенов Д. В., Крейнин Р. Г. Робастные методы ускорения сходимости со сложным поведением 526

Пирогов А. А. Стохастическая модель сплайсинга CD44 с переносом и связыванием ESRP1 и ESRP2 531

Плюснин В. В., Иванова А. А., Ивашкина О. И., Поспелов Н. А., Рогожникова О. С., Савельев Н. П., Торопова К. А., Анохин К. В. Детальный анализ поведения разных видов животных: пространственный контекст в обучаемых детекторах поведенческих актов 535

Половников В. С. Мультимасштабные графовые нейронные сети на SES-поверхности для предсказания сайтов связывания белков 539

Рогожникова О. С., Ивашкина О. И., Иванова А. А., Плюснин В. В., Поспелов Н. А., Торопова К. А., Анохин К. В. Целенаправленные подходы в свободном поведении мышей и доля селективных к ним нейронов области CA1 гиппокампа 543

Рысева К. М., Педашенко В. Е., Ковалев А. И. Апробация метрики «Средняя разница фактической и оптимальной траекторий движений глаз» при выполнении таблиц Горбова-Шульте 547

Савельев Н. П., Иванова А. А., Ивашкина О. И., Плюснин В. В., Поспелов Н. А., Рогожникова О. С., Торопова К. А., Анохин К. В. Поведение мышей и селективность нейронов гиппокампа после разных режимов обследования новой среды 551

Шергин И. А., Рыжов А. П. Анализ и контроль биомеханики движений человека на основе нечёткой логики 555

XIII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки»

В Москве с 30 ноября по 4 декабря 2026 года проводится XIII Международная научная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки», посвященная к 90-летию со дня рождения академика Валерия Борисовича Кудрявцева.

Основные направления работы конференции:

- Теория автоматов.
- Теория дискретных функций и дискретная оптимизация.
- Теория управляющих систем и теория баз данных.
- Квантовые вычисления, кодирование и защита информации.
- Нейронные сети, большие языковые модели, машинное обучение и нечеткая математика.
- Символьные вычисления (компьютерная алгебра, компьютерная геометрия, компьютерные решатели).
- Интеллектуальные системы в естественных науках (когнитивные системы и нейроинтерфейсы, нейроморфные вычисления и аппаратная база ИИ, биоинформатика).

Председателем организационного комитета конференции является ректор МГУ имени М.В.Ломоносова, академик РАН Виктор Антонович Садовничий.

Данный номер журнала содержит первую часть материалов конференции. Вторую часть материалов планируется опубликовать в следующем номере журнала.

Редакционная коллегия журнала
«Интеллектуальные системы. Теория и приложения»

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Часть 1
Пленарные доклады

Автогенеративные селф-системы

К. В. Анохин*

Рассматривается теория автогенеративных селф-систем (ТСС) — систем, обладающих субъективностью, способностью чувствовать и собственным Я. ТСС выводит такие системы и их свойства из трёх необходимых условий, действующих только совместно: генеративных функциональных систем, глубокой сложной сети и накопительной пластичности её узлов. Возникновение селф-системы описывается рекурсивным алгоритмом самопорождения, преобразующим нейронную сеть в нейронную гиперсеть, а её существование — нейрогеометрией гиперсети и соответствующей ей когнитивной геометрией.

Ключевые слова: селф-системы, субъективность, функциональные системы, накопительная пластичность, нейронная гиперсеть, когнитивная геометрия.

За свою историю наука достигла огромных успехов в понимании мира. Ей удалось объяснить множество явлений — от процессов микромира до движения звёзд и галактик, от строения вещества до происхождения и эволюции живых систем, от функционирования различных организмов до динамики человеческих обществ. В каждой из этих областей ещё многое остаётся неизвестным, но уже существуют основания, позволяющие двигаться дальше. Однако один особый класс систем по-прежнему не имеет удовлетворительного научного объяснения. Это системы, обладающие субъективностью, способностью чувствовать и собственным «Я». К таким системам применимо местоимение «кто», в отличие от всех остальных видов систем, описываемых местоимением «что». В настоящей работе они обозначаются как селф-системы (Self-systems), или S-системы. Теория автогенеративных селф-систем (ТСС) предлагает подход к пониманию того, как такие системы возникают, как устроены и благодаря чему обладают S-свойствами.

В природе существует множество S-систем, однако нельзя исключить и появление искусственных систем этого класса. Чтобы определить

* *Анохин Константин Владимирович* — директор Института перспективных исследований мозга МГУ имени М. В. Ломоносова (ИПИМ МГУ), д.м.н., академик РАН, e-mail: anokhin@brain.msu.ru, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU); DSc (Medicine), Full Member of the Russian Academy of Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

границы их распространения, понять особенности устройства и функционирования, лежащие в основе S-свойств, а также выявить закономерности их возникновения, необходима фундаментальная теория S-систем. TCC предпринимает попытку построения такой теории. Она исходит из предположения, что если S-системы разнообразны и независимо возникали в разных ветвях эволюции, то их появление должно подчиняться универсальным принципам. В качестве исходных TCC выделяет три необходимых условия:

1. генеративные функциональные системы;
2. глубокая сложная сеть;
3. накопительная пластичность узлов сети.

Ни одно из этих условий само по себе, как и сочетание любых двух из них, не приводит к формированию S-системы. Для её возникновения необходимо совместное действие всех трёх условий.

Из этих первых принципов выводятся две другие части TCC: принципы возникновения и принципы существования S-систем. Возникновение S-систем описывается вытекающим из начальных условий рекурсивным алгоритмом самопорождения. В ходе этого процесса нейронная сеть преобразуется в нейронную гиперсеть, обладающую S-свойствами. Принципы существования, в свою очередь, следуют из принципов возникновения и описывают объективную организацию этой гиперсети — её нейрогеометрию — и соответствующую ей субъективную организацию — когнитивную геометрию.

Таким образом, TCC представляет собой теорию оснований, возникновения и существования селф-систем. Она выводит S-системы и присущие им S-свойства из совокупности начальных условий — первых принципов. В докладе будут рассмотрены некоторые положения этой теории.

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

Autogenerative self-systems

K. V. Anokhin

We outline the theory of autogenerative self-systems (TSS), i. e. systems that possess subjectivity, the capacity to feel and a self of their own. TSS derives such systems and their properties from three necessary conditions that act only jointly: generative functional systems, a deep complex network, and cumulative plasticity of its nodes. The emergence of a self-system is described by a recursive self-generation algorithm that transforms a neural network into a neural hypernetwork,

and its existence by the neurogeometry of the hypernetwork and the corresponding cognitive geometry.

Keywords: self-systems, subjectivity, functional systems, cumulative plasticity, neural hypernetwork, cognitive geometry.

Received on November 10, 2026

Алгоритмы для задач разбиения и упаковки с неполной информацией

В. М. Котов*

Полуонлайновые (semi-online) алгоритмы представляют собой промежуточный подход, призванный повысить практическую применимость моделей онлайн- и офлайн-планирования. Полуонлайновое планирование — это модифицированная версия онлайн-планирования, в которой, помимо входных данных, доступна дополнительная информация (Extra Piece of Information, EPI) или имеется буфер для хранения данных. В работе дается введение в онлайн- и полуонлайновые подходы для задач разбиения (планирования в многопроцессорных системах), и упаковки, обсуждаются области их применения и мотивация исследований, а также предлагается общая классификация моделей полуонлайнового планирования. Приводятся основные подходы при разработке и анализе алгоритмов.

Ключевые слова: онлайн версия, полуонлайн версия, сравнительный анализ, гарантированная оценка, нижняя граница.

1. Задачи разбиения и упаковки с неполной информацией

Задачи разбиения и упаковки относятся к классическим задачам дискретной оптимизации и являются модельными для широкого круга прикладных проблем. Известно, что даже простейшие задачи, связанные разбиением и упаковками, относятся к классу NP-трудных проблем, и неизвестно, существуют ли для них полиномиальные алгоритмы. Практическая важность таких задач обуславливает необходимость их решения за приемлемое время с гарантированной точностью, поэтому актуальна разработка и анализ эффективных приближенных алгоритмов.

В последнее время большой интерес вызывают версии задачи с неполной информацией, так называемые онлайн и полу-онлайн версии.

- В онлайн-модели входные данные поступают последовательно, один за другим. Каждый поступивший элемент должен быть обработан немедленно, без какой-либо информации о последующих данных.

* *Котов Владимир Михайлович* — д.ф.-м.н, профессор Белорусского государственного университета, e-mail: kotovvm@bsu.by, ORCID: 0000-0002-1022-875X.

Kotov Vladimir Mikhailovich — doctor of sciences, professor of Belorussian State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

В онлайн-модели на шаге t известна последовательность входных данных $I_t = \langle i_1, i_2, \ldots, i_{t-1}, i_t \rangle$; она должна быть обработана окончательно и бесповоротно, при этом информация о дальнейшей последовательности $\langle i_{t+1}, \ldots, i_{n-1}, i_n \rangle$ отсутствует (где $t \geq 1$). Алгоритм, предназначенный для работы в таких условиях, называется онлайн-алгоритмом. Онлайн-алгоритм формирует промежуточный результат o_t для каждого входного элемента i_t (где $1 \leq t \leq n-1$) непосредственно в процессе поступления данных, прежде чем выдать окончательный результат o_n.

- В полуонлайн-модели (semi-online framework) входные данные, как и в онлайн-модели, поступают поочередно, однако при этом доступна дополнительная информация (Extra Piece of Information, EPI) о будущих входных данных. На любом шаге t полуонлайн-алгоритм получает последовательность входных данных I_t вместе с дополнительной информацией (EPI) и обрабатывает их окончательно и бесповоротно, формируя промежуточный результат o_t (где $1 \leq t \leq n-1$), прежде чем выдать итоговый результат o_n.

Полуонлайновый подход (semi-online approach) представляет собой промежуточную модель, призванную учесть как практическую применимость, так и ограничения, свойственные чисто онлайновым и офлайновым схемам. В большинстве реальных ситуаций входные данные не доступны в полном объеме с самого начала, но при этом они не обязательно поступают исключительно в онлайновом режиме — возможен поэтапный приток данных, сопровождающийся получением дополнительной информации о последующих элементах. Например, в сервисе потокового видео запросы на скачивание файлов поступают динамически, однако системе заранее известны такие параметры, как наиболее востребованный видеофайл или файл наибольшего размера.

Близкой к полуонлайновой модели является так называемая «модель с подсказками» (advice model), где дополнительная априорная информация (EPI) представлена в виде «подсказок» (битов информации).

2. Практическое применение

Рассмотрим некоторые важные области, в которых полуонлайновое планирование служит ключевой алгоритмической основой.

- Управление ресурсами в операционных системах: в многопользовательских операционных системах с разделением времени заранее неизвестно, в каком порядке будут поступать задания и каково

будет их общее количество. В таких системах задания передаются планировщику по мере их поступления. Одной из неотъемлемых функций планировщика является прогнозирование максимального и минимального времени, необходимого для выполнения поступившей задачи. Цель состоит в том, чтобы сразу после появления задачи закрепить за ней необходимые вычислительные ресурсы (например, память или процессорное время) — причем сделать это окончательно и бесповоротно, — стремясь тем самым минимизировать время ее выполнения.

- Распределенное управление данными: В распределенных и параллельных системах часто возникает задача размещения файлов разного размера на удаленных серверах с ограниченной емкостью. Файлы поступают из известного источника динамически, и каждый из них должен быть немедленно распределен на один из удаленных серверов. При этом центральный планировщик системы, принимая окончательное решение о размещении, не обладает информацией о том, какие файлы могут поступить в дальнейшем. Однако известно, что источник хранит файлы на серверах емкостью k единиц; это дает некоторое представление об общем объеме данных, которые предстоит разместить. Задача заключается в том, чтобы распределить файлы по удаленным серверам, минимизируя при этом требуемый объем хранилища.

- Управление запросами к серверу или веб-кэширование: В модели «клиент-сервер» заранее неизвестно ни количество запросов, которые поступят на удаленные серверы, ни время, необходимое для их обработки. Иерархическая организация серверов может служить дополнительным источником информации для планировщика, позволяя предоставлять различные уровни обслуживания для разных запросов, исходя из общей цели — выполнить каждый запрос как можно позже (но в установленные сроки).

- Производство: заказы от клиентов поступают в производственную систему в режиме реального времени. Ресурсы — персонал, оборудование и производственные мощности — должны распределяться сразу после получения каждого заказа, при этом информация о будущих заказах отсутствует. Тем не менее, можно оценить минимальное или максимальное время, необходимое для выполнения заказа. Поступление заказов в режиме реального времени существенно влияет на решения об аренде или приобретении дорогостоящего оборудования для производственных подразделений.

- Техническое обслуживание и модернизация промышленного оборудования: планирование различных видов технического обслуживания и эксплуатационных работ для модульных газотурбинных авиадвигателей. Цель состоит в том, чтобы распределить задачи между единицами оборудования таким образом, чтобы сбалансировать нагрузку на них. На практике часто стремятся максимизировать загрузку того оборудования, которое на данный момент загружено меньше всего.

3. Показатели эффективности для полуонлайнового планирования

Традиционные методы анализа эффективности офлайновых алгоритмов планирования в значительной степени опираются на знание всей последовательности задач. В связи с этим они малопригодны для оценки полуонлайновых алгоритмов, которые обрабатывают поступающие данные пошагово, обладая лишь минимальной информацией о будущих запросах. Метод конкурентного анализа позволяет оценить эффективность полуонлайнового алгоритма (ALG) в наихудшем случае — как для задач минимизации, так и для задач максимизации — путем вычисления конкурентного отношения (competitive ratio, CR). Для задачи минимизации стоимости конкурентное отношение определяется как наименьшее положительное число k ($k \geq 1$), такое что для любой допустимой последовательности входных данных из множества $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ выполняется неравенство $C_{ALG} \leq k \cdot C_{OPT}$, где C_{ALG} — стоимость, полученная алгоритмом ALG для данной последовательности, а C_{OPT} — оптимальная стоимость, достижимая с помощью идеального офлайнового алгоритма (OPT).

Верхняя граница (upper bound, UB) конкурентного отношения для алгоритма ALG задает максимально возможное значение CR для всех допустимых последовательностей из I. Нижняя граница (lower bound, LB) конкурентного отношения для полуонлайновой задачи X означает, что существует такой набор входных данных I, при котором любой полуонлайновый алгоритм ALG неизбежно получит стоимость $C_{ALG} \geq b \cdot C_{OPT}$, где b — нижняя граница для задачи X. Эффективность алгоритма ALG считается «точной» (tight), если между полученными нижней и верхней границами для рассматриваемой задачи нет разрыва. В ряде случаев говорят, что эффективность алгоритма ALG является точной, если выполняется равенство $C_{ALG} = k \cdot C_{OPT}$. Для задачи максимизации стоимости конкурентное отношение определяется как точная нижняя грань

(infimum) значений k, таких что для любой допустимой последовательности входных данных из I выполняется неравенство $k \cdot C_{ALG} \geq C_{OPT}$. Цель полуонлайнового алгоритма — добиться значения конкурентного отношения, максимально приближенного к 1 (при условии, что оно всегда больше или равно 1).

Дополнительная информация (EPI) — это сведения о будущих данных, предоставляемые алгоритму онлайн-планирования. В научной литературе рассматривается ряд таких видов дополнительной информации, использование которых позволяет существенно повысить эффективность по сравнению со стандартными алгоритмами онлайн-планирования. Ниже приведены определения и обозначения некоторых хорошо изученных типов EPI:

- Сумма (Sum, T): $\sum_{i=1}^{n} p_i$ — суммарный объем всех задач.
- Максимум (Max, $p_{\max}$): $\max\{p_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ — наибольшее время обработки или наибольший объем задачи.
- Оптимальное время завершения (Opt): значение оптимального времени завершения (makespan) часто оценивается с помощью двух основных границ: $C_{OPT} \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ и $C_{OPT} \geq p_{\max}$.
- Ограниченные диапазоны времени обработки (TGRP): наличие нижней и/или верхней границ для времени обработки всех задач, либо нижнюю границу $TGRP(lb)$, либо верхнюю границу $TGRP(ub)$ для времени обработки задач.
- Порядок поступления задач: $p_{i+1} \leq p_i$ для $1 \leq i \leq n$ — задачи поступают в порядке невозрастания их объема (Decr); либо $r_{i+1} \geq r_i$ — задачи поступают в порядке неубывания моментов их появления (Incr-r).
- Буфер ($B(k)$): накопитель конечного размера k (≥ 1), способный хранить не более k задач. Общий объем задач в буфере $B(k)$ составляет $w(B(k)) \leq \sum_{i=1}^{k} p_i$. Наличие буфера позволяет алгоритму онлайн-планирования либо временно поместить поступившее данное в буфер, либо — если буфер заполнен — окончательно назначить задачу на конкретный исполнительный узел (машину). Таким образом, перед принятием эффективного решения о планировании алгоритму всегда известны параметры $k + 1$ будущих данных. В научной литературе рассматривались следующие варианты длины и использования буфера: буфер длиной k (≥ 1), обозначаемый как $B(k)$; буфер длиной 1, обозначаемый как $B(1)$; а также буфер с возможностью изменения порядка элементов, обозначаемый как $reB(k)$. - Информация о последней задаче. Заранее известно,

что последняя задача имеет наибольшее время обработки, то есть $p_n = p_{max}$; этот тип EPI обозначается как LL. Рассматривается случай, когда несколько задач поступают одновременно с последней задачей; такой тип дополнительной информации обозначается как Sugg.

- Неточная частичная информация. Неточная частичная информация (также называемая «искаженной» частичной информацией) относится к ситуации, когда дополнительные сведения, доступные онлайн-алгоритму, не являются абсолютно точными. Например, алгоритму известно лишь приближенное значение некоторой величины (например, суммы), а не ее точное значение. Этот тип дополнительной информации обозначается как disSum.
- Перераспределение задач (reasgn). После того как все задачи уже распределены по машинам, их можно перераспределить между ними, следуя определенным правилам. Предложено несколько стратегий перераспределения: перераспределение последних k задач (обозначается как reasgn(last(k))); перераспределение произвольных k задач (reasgn(k*)); перераспределение только последних задач на всех машинах (reasgn(last)*); или перераспределение последней задачи на одной из машин (обозначается как reasgn((last)1)).
- Доступность машин (mchavl). Машины могут быть доступны не с самого начала. Они становятся доступными по мере необходимости, причем время готовности (r_j) для каждой машины M_j известно заранее. Также рассматривается сценарий, при котором одна машина доступна для выполнения любых задач, а другие — только для определенных, заранее заданных задач.
- Уровень обслуживания (Grade of Service, GOS) или иерархия машин. Априори известно, что машины организованы в иерархическую структуру для обеспечения различных уровней обслуживания задач в соответствии с заданным GOS. Например, если для задачи J_i установлен уровень обслуживания g_2, то она может быть назначена только на машину M_2; если же для J_i установлен уровень g_1, то она может быть запланирована на любой из доступных машин.

4. Основные подходы для решения версий задач с неполной информацией

Вначале основным подходом для решения таких задач являлись алгоритмы градиентного типа. Позже появились исследования, использующие

комбинаторные и структурные особенности задач для уточнения нижних оценок оптимального решения, что является ключевым фактором для определения гарантированной оценки предлагаемого алгоритма.

Авторами была предложена техника формирования групп множеств (процессоров, контейнеров) и классификации весов предметов, методика пересчета нижних оценок оптимального решения, при которых обеспечивается конечное число инвариантов при произвольном порядке поступления данных. Основная идея такого подхода состоит в том, что множества и предметы разбиваются на группы, позволяющие поддерживать некоторые инварианты, обеспечивающие требуемую гарантированную оценку алгоритма.

Использование такого подхода позволило получить рекордные по точности алгоритмы для нескольких версий задач.

5. Пример

Дополнительная информация: Известная сумма элементов.

Критерий: минимизировать максимальную сумму в разбиении на m множеств (процессоров).

Будем считать, что Z — оптимальное значение целевого функционала, а S — общая сумма длительностей выполнения работ для полуонлайн-версий задачи. Тогда нижняя граница LB для оптимального значения функционала очевидным образом.

В первом случае она равна Z, а во втором — средней загрузке процессоров S/m.

Не умаляя общности, будем считать, что $\mathrm{LB} = 1$. Этого можно добиться, пронормировав все величины (поделив на значение LB). Определим параметр $\alpha > 0$ и, используя этот параметр, опишем алгоритм, гарантированная оценка которого будет $(1 + \alpha)$. Разобьем поступающие работы на классы в соответствии с их процессорным временем.

В класс A определим работы, у которых процессорное время больше чем $(1 + \alpha)/2$. Для того чтобы обеспечить нужную гарантированную оценку, очевидно, что на один процессор не надо назначать две работы из класса A.

В класс B определим работы, у которых процессорное время больше α, но не больше чем $(1 + \alpha)/2$. Для того чтобы обеспечить нужную гарантированную оценку, очевидно, что на один процессор можно назначать две работы из класса B. При этом загрузка такого процессора будет больше 1.

В класс C определим работы, у которых процессорное время не больше чем α. Добавление таких работ на процессор с загрузкой меньше LB

приведет к тому, что загрузка процессора превысит 1, но не превысит $(1 + \alpha)$.

Понятно, что в любом решении невозможна ситуация, когда загрузка каждого процессора превосходит 1. Основная идея алгоритма состоит в такой загрузке процессоров, чтобы для одного процессора или группы процессоров их средняя загрузка была не меньше 1, а максимальная загрузка любого из процессоров не превосходила более чем в $(1 + \alpha)$ раз величину оптимального значения целевой функции.

Ключевым моментом данной схемы является выделение специальных типов процессоров. К первому типу относятся процессоры, на каждый из которых назначена одна работа из класса A и несколько работ из класса C, причем их общая сумма превышает 1, но не превышает более чем в $(1 + \alpha)$ раз оптимальное значение целевой функции.

Ко второму типу относятся процессоры, на каждый из которых назначена одна работа из класса A и, возможно, несколько работ из класса C, причем их общая сумма меньше 1.

К третьему типу относятся процессоры, на каждый из которых назначены две работы из класса B. Возможно наличие одного процессора с одной работой из класса B, если количество таких работ нечетно.

Процессоры четвертого типа разбиты на группы из четырех процессоров каждая и обладают следующим свойством.

Свойство 1. Загрузка каждого из трех первых процессоров группы не превосходит α, четвертый процессор пуст, а суммарная загрузка группы — как минимум $3\alpha/2$.

Алгоритм построения расписания состоит из двух этапов. На первом этапе формируются группы одного из типов следующим образом.

1. Если поступает работа из класса A, то приоритетным для нее является наиболее загруженный процессор из группы типа 4. Иначе работа назначается на пустой процессор.
2. Если поступает работа из класса B, то приоритетным для нее является наиболее загруженный процессор из группы типа 3. Иначе работа назначается на пустой процессор.
3. Если поступает работа из класса C, то приоритетным для нее является наиболее загруженный процессор типа 2. Если таких процессоров нет, то работа назначается на процессор из завершенной группы типа 4. При невозможности формируется новая группа типа 4.

Очевидно, что после первого этапа не могут быть одновременно получены группы процессоров типа 2 и типа 4, а для каждой группы процессоров четвертого типа выполняется свойство 1.

Идея второго этапа алгоритма основывается на использовании резервного четвертого процессора в каждой группе четвертого типа, что позволяет избежать коллизий при поступлении работ из классов A и B.

Свойство 2. При назначении любой работы типа 1 (даже со значением длительности больше 1 в случае задачи 2) на процессор с загрузкой не более α новая суммарная загрузка этого процессора не превосходит более чем в $(1+\alpha)$ раз оптимального значения целевой функции.

Теорема 1. *При наличии непустой группы процессоров типа 2 при $\alpha = 2/3$ для любой последовательности длительностей работ при назначении работы с длительностью больше α на наименее загруженный процессор алгоритм работает корректно.*

Замечание. Для полуонлайн-версии, когда известно оптимальное значение целевой функции, при отсутствии процессоров типа 4 после первого этапа будут поступать только работы из класса C.

Теорема 2. *При наличии непустой группы процессоров типа 4 при $\alpha = 0{,}58505$ для любой последовательности длительностей работ существует алгоритм, который работает корректно.*

Следствие 1. *Для задачи, когда известно оптимальное значение целевой функции, построен алгоритм с гарантированной оценкой* 1,58505.

Отметим, что для задачи с известной общей суммой доказана нижняя граница, которая лежит в пределах интервала [1,58504; 1,58505].

Статья поступила 11 ноября 2026 г.

Algorithms for Partitioning and Packing Problems with Incomplete Information

V. M. Kotov

Semi-online algorithms represent an intermediate approach designed to enhance the practical applicability of online and offline scheduling models. Semi-online scheduling is a modified version of online scheduling in which, in addition to the standard input data, extra information (an "Extra Piece of Information," or EPI) is available, or a buffer is provided for data storage. This paper introduces online and semi-online approaches to partitioning (scheduling in multiprocessor systems) and bin-packing problems, discusses their areas of application and the motivations behind such research, and proposes a general classification of semi-online scheduling models. Furthermore, it outlines the primary methods used in the development and analysis of these algorithms.

Keywords: online version, semi-online version, comparative analysis, guaranteed estimate, lower bound.

Received on November 11, 2026

Новые результаты в задачах Р. Беллмана и Д. Кнута

В. В. Кочергин*

В работе рассматриваются задача Беллмана о сложности (минимально возможном числе операций умножения, достаточном для вычисления) одночлена от m переменных и задача Кнута о сложности вычисления набора из m степеней одной переменной. Для любого фиксированного действительного числа $a \geq 2$ и любой положительной функции $\varphi(m)$, удовлетворяющей условию $|\log \varphi(m)| = o(\log m)$, установлены асимптотически точные оценки соответствующих функций Шеннона, характеризующих максимально возможную сложность при ограничении показателей величиной $A = \varphi(m)m^a$. Эти функции при $m \to \infty$ асимптотически равны am и $(a-1)m$ соответственно.

Ключевые слова: аддитивные цепочки, векторные аддитивные цепочки, задача Беллмана, задача Кнута, схемная сложность.

1. Постановка задачи, известные результаты, формулировка основной теоремы

В работе рассматриваются два обобщения классической задачи об эффективном возведении в степень, которая заключается в нахождении по натуральному n сложности $l(x^n)$ вычисления степени x^n, т. е. минимального числа умножений, достаточного для возведения переменной x произвольной природы в степень n. При вычислениях предполагается, что результаты промежуточных вычислений могут использоваться многократно, а от операции, названной «умножением», требуется лишь ассоциативность. В аддитивной постановке эта задача известна как задача об аддитивных цепочках — см., например, [3].

В 1939 году А. Брауэр [18] установил для величины $l(x^n)$ при $n \to \infty$ асимптотическую формулу[1]

$$l(x^n) \sim \log n,$$

* *Кочергин Вадим Васильевич* — зав. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vvkoch@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-7798-9502.

Kochergin Vadim Vasil'evich — Head of Chair of Discrete Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

[1] Здесь и далее запись $\log x$ без указания основания логарифма означает $\log_2 x$.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

дополнив очевидную нижнюю оценку через двоичный логарифм следующей верхней оценкой:

$$l(x^n) \le \log n + \frac{\log n}{\log\log n}\,(1 + o(1))\,.$$

В 1960 г. П. Эрдёш показал [21], что для почти всех n эта верхняя оценка, записанная в таком виде, в некотором смысле неулучшаема, а именно, для почти всех n справедливо асимптотическое равенство

$$l(x^n) = \log n + \frac{\log n}{\log\log n} + o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

В 1963 г. Р. Беллман [17] (для случая $m = 2$), а затем в 1964 г. Е. Штраус [28] (для произвольного m) сформулировали задачу[2] о сложности вычисления одночлена от m переменных, т. е. нахождения величины $l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m})$. Эту задачу, следуя [26,29], будем называть *задачей Беллмана*, хотя логичнее было бы ее называть задачей Беллмана — Штрауса. Формально на языке аддитивных цепочек величина $l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m})$ определяется как минимально возможное число r добавленных векторов в последовательности m-мерных векторов (наборов)

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{v}_m = (0, 0, \dots, 1),$$
$$\mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \dots, \mathbf{v}_{m+r} = (n_1, n_2, \dots, n_m),$$

начинающейся с m единичных векторов и удовлетворяющей условию: для каждого k, $m + 1 \le k \le m + r$, найдутся два натуральных числа (не обязательно различных) i и j, $1 \le i \le k - 1$, $1 \le j \le k - 1$, таких, что $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j$ (сложение векторов покомпонентное).

В 1969 г. Д. Кнут [2, разд. 4.6.3., упр. 32] поставил задачу о сложности вычисления m степеней одной переменной, т. е. нахождения величины $l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m})$. Эту задачу обычно называют (см., например, [9, 24]) *задачей Кнута*. Очевидно, что величина $l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m})$ численно равна минимально возможной длине аддитивной цепочки для числа $\max_i n_i$, содержащей при этом все остальные числа из множества $\{n_1, \dots, n_m\}$.

Отметим, что задачи Беллмана и Кнута, являясь обобщениями задачи об эффективном возведении в степень, в свою очередь являются частными случаями поставленной в 1980 г. Н. Пиппенджером [26] задачи о сложности вычисления системы из p одночленов от q переменных.

[2] В задаче о сложности вычисления одночлена дополнительно предполагается коммутативность умножения.

В 1964 г. Е. Штраус [28] показал, что для любого фиксированного m при условии $\sum n_i \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \sim \log(\max n_i).$$

В 1976 г. А. Яо [30] для любого фиксированного m при условии $\sum n_i \to \infty$ установил аналогичную формулу для сложности вычисления набора из m степеней:

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m}) \sim \log(\max n_i).$$

В 1981 г. независимо А. Ф. Сидоренко [15], Дж. Оливосом [23], а также Д. Кнутом и К. Пападимитриу [22] было явно установлено, что в действительности задачи о сложности вычисления одночлена от m переменных и набора m степеней двойственны (эквивалентны) — эти две величины сложности связаны равенством

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) + 1 = l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m}) + m,$$

и, следовательно, это по сути одна задача, которую естественно называть *задачей Беллмана — Кнута*. В силу этой связи большинство оценок будет выписываться для одной из двух задач. Заметим, что добавление в вычисляемый набор степени с уже имеющимся показателем не меняет значения сложности в задаче Кнута, а добавление переменной с тем же положительным показателем увеличивает сложность задачи Беллмана на единицу, и при переходе к набору различных показателей следует учитывать изменение числа его компонент.

Также в 1981 г. в работе [20] установлено, что задача распознавания по набору натуральных чисел $(n_1, n_2, \dots, n_m, l)$ существования аддитивной цепочки, имеющей длину l и содержащей числа $n_1, n_2, \dots, n_m$, является NP-полной. Поэтому под решением задач Беллмана и Кнута естественно подразумевать не нахождение точного значения сложности, а получение асимптотически точных оценок, как, например, для исходной задачи возведения в степень.

Асимптотическая постановка задачи естественным образом также приводит к задаче исследования поведения соответствующих функций Шеннона, которые для задач Беллмана и Кнута определяются соответственно равенствами

$$L_B(n_1, n_2, \dots, n_m) = \max l(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}),$$
$$L_K(n_1, n_2, \dots, n_m) = \max l(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_m}),$$

где максимумы берутся по всем ненулевым наборам $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенствам $k_i \le n_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Нулевые показатели в задаче Кнута не требуют вычислений; единичный элемент считается доступным бесплатно. В задаче Беллмана переменные с нулевыми показателями исключаются из одночлена. Для действительных значений $n_i \ge 1$ те же определения означают максимум по целым неотрицательным k_i, не превосходящим $\lfloor n_i \rfloor$.

Далее, говоря об асимптотических оценках, будем полагать, что рассматриваются последовательности наборов натуральных чисел $\tilde{n}(s) = \big(n_1(s), n_2(s), \ldots, n_{m(s)}(s)\big)$, $s = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{m(s)} n_i(s) \to \infty.$$

При этом параметр s будем обычно опускать. Условие попарной различности показателей, когда оно необходимо, будет оговариваться отдельно. К аргументам функций Шеннона это условие не относится.

При фиксированном m (числе переменных в одночлене или числе вычисляемых степеней соответственно) для задач Беллмана и Кнута асимптотически точное решение было найдено Е. Штраусом и А. Яо. Вопрос об асимптотике роста сложности в случае растущего числа переменных (степеней) долгое время оставался открытым. В этом направлении можно отметить, пожалуй, лишь два результата.

Первый из них заключается в установленном в работах [19, 27] асимптотически точном решении для одного частного случая, упоминавшегося Д. Кнутом при постановке общей задачи, — когда набор показателей степеней является последовательностью квадратов натуральных чисел от 1 до m:

$$l\left(x^1, x^4, x^9, \ldots, x^{m^2}\right) = m + O\left(\frac{m}{\sqrt{\log m}}\right)$$

при $m \to \infty$.

Второй результат, полученный в 1976 г. Н. Пиппенджером [24], состоит в следующем асимптотическом равенстве при $n \ge 2$, $m \log n \to \infty$:

$$L_K(\underbrace{n, n, \ldots, n}_{m \text{ раз}}) = \log n + (1 + o(1))\frac{m \log n}{\log(m \log n)} + O(m).$$

Продвижения в вопросе получения асимптотики сложности для задачи Беллмана — Кнута при растущем числе переменных или степеней были получены в начале 90-х годов прошлого века.

Сначала в работе автора [7] на основе собственной вентильной конструкции из [4, 5], использующей результаты Пиппенджера [24, 25], которые, в свою очередь, существенно опираются на работы [10, 13, 14], было установлено соотношение

$$L_B(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{\log N}{\log\log N}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}\right)\right) + \\ + O(m + \log\max n_i),$$

где $N = n_1 n_2 \ldots n_m$. Здесь и далее в этом разделе предполагается, что выполняется условие $N \to \infty$.

В 1992 г. С. Б. Гашковым и автором [1] верхняя оценка из предыдущего асимптотического равенства была усилена следующим образом:

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}) \le \log\max n_i + \\ + \frac{\log N}{\log\log N}\left(1 + O\left(\left(\frac{\log\log\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}\right)\right) + O(m),$$

где $N = n_1 n_2 \ldots n_m$.

Эта верхняя оценка вместе с простыми нижними оценками

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}) \ge \log(\max n_i) + m - 1,$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}) \ge \log(\max n_i),$$

справедливыми для всех наборов $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, а также с «мощностной» нижней оценкой (см., например, [12]), дает асимптотику роста сложности в задачах Беллмана и Кнута для «почти всех» наборов при достаточно широком диапазоне соотношения параметров. Однако в случае, когда величины $\log(\max n_i)$ и $\frac{\log N}{\log\log N}$ имеют одинаковый порядок роста, эти нижние оценки не совпадают асимптотически с верхней.

В 1994 г. в работе [6] удалось восполнить этот пробел, в некотором смысле объединив в одну нижнюю оценку «мощностную» оценку и оценку через $\log(\max n_i)$. Было доказано, что найдутся такие положительная константа c и функция $f(x)$, стремящаяся к 0 при $x \to \infty$, что доля наборов $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, где $k_1 \le n_1$, $k_2 \le n_2, \ldots, k_m \le n_m$, для которых выполняются соотношения

$$l(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}) \ge l(x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_m}) \ge \\ \ge \left(\log\max n_i + \frac{\log N}{\log\log N}\right) - \left(f(N)\frac{\log N}{\log\log N} + cm\right),$$

стремится к единице при $N \to \infty$, где $N = n_1 n_2 \dots n_m$.

В качестве функции $f(x)$ в этой нижней оценке можно взять функцию $2(\log\log x)^{-1/2}$.

Последний результат дает асимптотически точное решение задач Беллмана и Кнута при стандартном условии — «сложность (число операций) существенно больше числа полюсов (суммы «входов» и «выходов», в данном случае $m+1$)» — действительно, при таком условии для почти всех исследуемых объектов (наборов) верхняя оценка асимптотически совпадает с нижней.

Однако в случае, когда условие «число переменных или степеней существенно меньше суммы логарифма максимальной степени и мощностного слагаемого» не выполняется, эти задачи остались нерешенными. Значительным продвижением в этом направлении стал в 2014 г. один из результатов работы [8]. К сожалению, в формулировку этой теоремы в [8] вкралась опечатка. Дадим здесь правильную формулировку того утверждения, которое доказано в [8].

Ниже эта оценка приводится в необходимом нам частном случае: число попарно различных показателей стремится к бесконечности. Тогда $N \geq m!$, а основание $m/(f(m))^2$ при достаточно больших m превосходит единицу; все логарифмы в формулах определены.

Теорема 1 ([8]). *Пусть числовая функция $f(x)$ при $x \to \infty$ удовлетворяет условиям $f(x) \to \infty$, $\log f(x) = o(\log x)$. Тогда для любой последовательности наборов попарно различных натуральных чисел*

$$\tilde{n}(s) = \big(n_1(s), n_2(s), \dots, n_{m(s)}(s)\big), \quad s = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющей условию

$$m(s) \to \infty,$$

выполняются неравенства

$$l(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}) \leq \log(\max n_i)(1 + o(1)) + \frac{\log N}{\log\log N}(1 + o(1)) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \left(\left\lceil \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \right\rceil - \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \right),$$

$$l(x^{n_1}, x^{n_2}, \dots, x^{n_m}) \leq \log(\max n_i)(1 + o(1)) + \frac{\log N}{\log\log N}(1 + o(1)) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \left(\left\lceil \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \right\rceil - \log_{(m/(f(m))^2)} n_i \right) - m,$$

где $N = n_1 n_2 \dots n_m$.

Отметим, что в этой теореме отличие оценок сложности для задач Беллмана и Кнута на величину $m-1$ становится существенным.

Применим теорему 1 к задаче Кнута в случае, когда попарно различные натуральные показатели $n_1,\dots,n_m$ не превосходят m^a, где $a>1$ — фиксированное число. Тогда

$$m!\le N\le m^{am},\qquad \log\log N=\log m+O(\log\log m).$$

Из условия $\log f(m)=o(\log m)$ следует

$$\frac{\log N}{\log\log N}-\sum_{i=1}^{m}\log_{m/(f(m))^2} n_i=\frac{\log N}{\log\log N}-\frac{\log N}{\log m-2\log f(m)}=o(m).$$

При достаточно больших m имеем

$$\log_{m/(f(m))^2} n_i\le\frac{a\log m}{\log m-2\log f(m)}<\lfloor a\rfloor+1,$$

поскольку $a<\lfloor a\rfloor+1$. Учитывая также $\log(\max n_i)=O(\log m)=o(m)$, из теоремы 1 получаем

$$l(x^{n_1},\dots,x^{n_m})\le\sum_{i=1}^{m}\left\lceil\log_{m/(f(m))^2} n_i\right\rceil-m+o(m)\le(\lfloor a\rfloor)m+o(m).$$

Эту оценку можно получить и непосредственно, без предположения о различности показателей и использования теоремы 1 (на самом деле излагаемый ниже способ — иллюстрация метода доказательства теоремы 1). Заметим, что при всех достаточно больших значениях m любое число, не превосходящее m^a, будет не более чем $(\lfloor a\rfloor+1)$-разрядным в системе счисления по основанию $d=\lceil m/\log m\rceil$. Поэтому с использованием $O(m/\log m)$ операций умножения можно вычислить степени

$$x^2,x^3,\dots,x^d;\ x^{2d},x^{3d},\dots,x^{d^2};\dots;x^{2d^{\lfloor a\rfloor}},x^{3d^{\lfloor a\rfloor}},\dots,x^{d^{\lfloor a\rfloor+1}},$$

а затем из них получить все степени x^{n_i}, затратив не более чем $\lfloor a\rfloor$ операций умножения на каждую степень.

Нижнюю оценку для функции Шеннона $L_K(n_1,n_2,\dots,n_m)$ установим через оценку для функции Шеннона $L_B(n_1,n_2,\dots,n_m)$, для которой можно использовать стандартные мощностные рассуждения (см., например, [12]), которые дают оценку

$$L_B(\underbrace{m^a,m^a,\dots,m^a}_{m\text{ раз}})\ge am-o(m).$$

Учитывая двойственность задач Беллмана и Кнута, имеем:

$$(a-1)m - o(m) \le L_K(\underbrace{m^a, m^a, \ldots, m^a}_{m \text{ раз}}) \le (\lfloor a \rfloor)m + o(m).$$

В предположении, что все показатели степени n_i различны, при $a < 1$ задачи вырождаются. При $a = 1$ имеем точное равенство

$$L_K(\underbrace{m, \ldots, m}_{m \text{ раз}}) = m - 1.$$

Для значений a, удовлетворяющих неравенствам $1 < a < 2$, тривиальный факт о том, что на вычисление m различных степеней требуется не менее $m - 1$ операции умножения, дает нижнюю оценку, асимптотически совпадающую с установленной верхней оценкой. При $a \ge 2$ нижняя и верхняя оценки близки, но, вообще говоря, имеют разную асимптотику (разные коэффициенты в линейных оценках). Основным результатом данной работы, устраняющим этот разрыв, является

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(m) > 0$, $|\log \varphi(m)| = o(\log m)$ *при* $m \to \infty$, $a \ge 2$ — *фиксированное действительное число,* $A = A(m) = \varphi(m)m^a$. *Тогда*

$$L_K(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m \text{ раз}}) \sim (a-1)m, \quad L_B(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m \text{ раз}}) \sim am.$$

В следующих трех разделах дано сжатое, но полное доказательство этой теоремы.

2. Нижняя оценка

Нижняя оценка доказывается стандартными мощностными рассуждениями. При ее доказательстве будем использовать язык схем из функциональных элементов (см., например, [9, 11]), т. е. в качестве вычислительной модели будем рассматривать схемы из двухвходовых элементов умножения. При таком подходе сложность вычисления одночлена или системы степеней — это минимально возможное число элементов в реализующей их схеме.

Хорошо известно (см., например, [12]), что количество схем с m входами, одним выходом, сложности не более l, состоящих из двухвходовых элементов, среди которых нет дублирующих и висящих, при $l \ge m$ не превосходит величины $(c(l+m))^l$ для некоторой абсолютной положительной константы c.

Зафиксируем произвольное значение ε, $0 < \varepsilon < 1$. Положим $l_\varepsilon = (a-\varepsilon)m$. В силу неравенства $a \geq 2$ выполняется соотношение $l_\varepsilon \geq m$. Покажем, что при всех достаточно больших значениях m количество описанных схем сложности не более l_ε меньше числа одночленов от m переменных с положительными показателями степени не более A. Действительно,

$$\log \frac{(c(l_\varepsilon + m))^{l_\varepsilon}}{\lfloor A \rfloor^m} \leq (a-\varepsilon)m \log m + O(m) - m \log \left(\lfloor \varphi(m) m^a \rfloor\right) =$$
$$= -\varepsilon m \log m + O(m) - m \log \varphi(m) = -\varepsilon m \log m + o(m \log m),$$

где последнее выражение стремится к $-\infty$ при $m \to \infty$. Следовательно, при всех достаточно больших значениях m выполняется неравенство

$$L_B(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m \text{ раз}}) > (a-\varepsilon)m,$$

которое в силу произвольности ε устанавливает нижнюю оценку теоремы 2 для задачи Беллмана. Необходимая оценка для задачи Кнута следует из соображений двойственности.

3. Комбинаторная лемма

В этом разделе будет установлена техническая комбинаторная лемма, на основе которой будет доказана верхняя оценка теоремы 2. Базовая идея была почерпнута из работы [16].

Лемма 1. *Пусть M, k, t, B — натуральные числа, для которых выполняются соотношения*

$$1 \leq B < M, \qquad M \geq 4t, \qquad \left\lfloor \frac{M}{4t} \right\rfloor \left(\frac{B}{2M(k+t)} \right)^{1+\frac{k}{t}} \geq 4.$$

Тогда существует подмножество U множества $\{1, 2, \ldots, 2M\}$, удовлетворяющее условиям:

1) $|U| \leq 8B(k+t)\lceil \log_3(4(2M)^k) \rceil$;

2) *для каждого набора $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$, $w_i \in \{M, M+1, \ldots, 2M-1\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, найдутся такие целые числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$, что выполняются условия:*

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_t \leq M/4,$$
$$\xi_i - \xi_{i-1} \in U \quad (1 \leq i \leq t),$$
$$w_j - \xi_{\sigma(j)} \in U \quad (1 \leq j \leq k),$$

где $\sigma(j)$ — наименьшее i, такое что $j \leq \lfloor \frac{ik}{t} \rfloor$.

Доказательство. Положим

$$h = \left\lfloor \frac{M}{4t} \right\rfloor .$$

По условию леммы h — натуральное число.

Для $i = 1, 2, \ldots, t$ зададим интервал целых чисел равенством

$$I_i = \{(i-1)h + 1, \ldots, ih\}.$$

Положим

$$\mathcal{X} = I_1 \times \cdots \times I_t, \qquad |\mathcal{X}| = h^t.$$

Докажем, что требуемый леммой набор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_t)$ можно выбрать в множестве $\mathcal{X}$, т. е. для $i = 1, 2, \ldots, t$ будут выполняться неравенства $(i-1)h < \xi_i \leq ih$ и как следствие соотношения $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_t \leq M/4$. Для любого набора $\xi \in \mathcal{X}$ дополнительно положим $\xi_0 = 0$.

Зафиксируем один набор $w = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ с компонентами из множества $\{M, M+1, \ldots, 2M-1\}$.

Паре (w, ξ), где $w \in \{M, M+1, \ldots, 2M-1\}^k$, $\xi \in \mathcal{X}$, сопоставим помеченный ориентированный граф, в котором $t+1+k$ вершин и $t+k$ дуг (ориентированных ребер). Вершины помечаются числами $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_t, w_1, w_2, \ldots, w_k$, причем если в наборе w есть равные компоненты, то в графе будут вершины с одинаковыми метками. Вершины, помеченные числами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$, так же как и сами эти числа, будем называть *анкерами*, а вершины, помеченные числами $w_1, w_2, \ldots, w_k$, — концевыми вершинами или *листьями*.

Вершину с меткой $\xi_0 = 0$ будем называть корнем. При изменении набора w или размещения ξ вершины и дуги сохраняют свои номера, меняются только их числовые метки.

В графе будут дуги двух типов: t дуг *первого типа* — для $i = 1, 2, \ldots, t$ дуга первого типа с номером i выходит из вершины с меткой ξ_{i-1} и входит в анкер ξ_i; k дуг *второго типа* — для $j = 1, 2, \ldots, k$ дуга второго типа с номером j ведет из анкера $\xi_{\sigma(j)}$ в лист, помеченный числом w_j. Множество всех дуг обозначим через $\mathcal{E}$. Каждой дуге $e \in \mathcal{E}$ сопоставим число $\varphi_e(\xi)$, равное разности меток конца дуги и начала дуги.

Отметим, что метки всех дуг положительны, метки дуг первого типа не превосходят $\xi_t \leq M/4$, для меток дуг второго типа выполняются неравенства

$$M - M/4 \leq w_j - \xi_{\sigma(j)} \leq 2M - 2, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

В частности, все метки принадлежат множеству $\{1, 2, \ldots, 2M\}$.

Рассмотрим множество Ω всех таблиц, строки которых помечены дугами из $\mathcal{E}$, столбцы пронумерованы первыми $2M$ натуральными числами, а в каждой клетке записано натуральное число, не превосходящее M. Таким образом, таблица — это отображение

$$\omega : \mathcal{E} \times \{1, 2, \ldots, 2M\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, M\}.$$

Отметим, что

$$|\Omega| = M^{2M|\mathcal{E}|} = M^{2M(k+t)}.$$

Для фиксированной таблицы $\omega \in \Omega$ каждой дуге $e \in \mathcal{E}$ сопоставим множество

$$U_e(\omega) = \big\{z \in \{1, 2, \ldots, 2M\} \mid \omega(e, z) \leq B\big\}.$$

Тем самым каждой таблице будет сопоставлено семейство множеств

$$\{U_e(\omega) \mid e \in \mathcal{E}\}.$$

Набор (размещение) $\xi \in \mathcal{X}$ назовём допустимым для таблицы ω, если $\varphi_e(\xi) \in U_e(\omega)$ для всех дуг $e \in \mathcal{E}$. Обозначим число таких наборов через $Z(\omega)$. Для фиксированного размещения ξ в каждой строке таблицы ограничена ровно одна клетка: в ней допустимы B значений, в остальных — M. Подсчитывая пары из таблицы и допустимого для неё размещения, получаем

$$\sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) = |\Omega| h^t \left(\frac{B}{M}\right)^{k+t}.$$

Для оценки суммы квадратов рассмотрим множество $S \subseteq \mathcal{E}$ и пары размещений ξ, η, для которых $\varphi_e(\xi) = \varphi_e(\eta)$ для всех дуг $e \in S$. Дуги первого типа из множества S разбивают цепочку от корня до последнего анкера на компоненты связности; направления дуг здесь не учитываются, изолированные вершины также считаются компонентами. Компоненту назовём закреплённой, если она содержит корень или начало дуги второго типа из множества S, и свободной в противном случае. В каждой компоненте разности $\xi_i - \eta_i$ постоянны, а в закреплённой компоненте равны нулю. Обозначим через $r(S)$ разность между числом t и числом свободных компонент. При фиксированном наборе ξ для каждой свободной компоненты достаточно выбрать одну координату η_i, имеющую не более h значений. Поэтому число рассматриваемых пар не превосходит $h^{2t-r(S)}$. Для пустого множества S имеем равенство $r(S) = 0$, а для непустого множества S выполняются неравенства $1 \leq r(S) \leq t$.

Из определения функции σ следует, что из q последовательных анкеров выходит не более $qk/t + 1$ дуг второго типа, а из первых q анкеров —

ровно $\lfloor qk/t \rfloor \le qk/t$. Действительно, для интервала анкеров с номерами от u до $u+q-1$ число этих дуг равно

$$\left\lfloor \frac{(u+q-1)k}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(u-1)k}{t} \right\rfloor.$$

Свободная компонента из q анкеров вносит вклад, равный $q-1$, как в величину $r(S)$, так и в число $|S|$ дуг множества S. Закреплённая компонента из q анкеров без корня вносит вклад q в величину $r(S)$ и не более $(q-1)+(qk/t+1) = (1+k/t)q$ в число $|S|$ дуг множества S. Компонента с корнем и q анкерами вносит вклад соответственно q и не более $q+qk/t$; здесь допускается $q=0$. Суммируя по компонентам, получаем

$$|S| \le (1+k/t)r(S).$$

Подсчитаем тройки из таблицы и двух допустимых размещений. В каждой строке требуется ограничить две клетки, кроме случая совпадения меток, когда ограничена одна клетка. Поэтому каждое совпадение умножает число таблиц на M/B. Представляя этот множитель в виде $1+(M/B-1)$ и раскрывая произведение по строкам, имеем

$$\frac{\sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)^2}{|\Omega|(B/M)^{2(k+t)}} = \\ = \sum_{S\subseteq\mathcal{E}} \left(\frac{M}{B}-1\right)^{|S|} \left|\{(\xi,\eta)\in\mathcal{X}^2 : \varphi_e(\xi)=\varphi_e(\eta)\ (e\in S)\}\right| \le \\ \le h^{2t}\left(1+\sum_{\varnothing\ne S\subseteq\mathcal{E}} h^{-r(S)}\left(\frac{M}{B}\right)^{|S|}\right).$$

При заданном значении $r=r(S)\ge 1$ число множеств S, в силу полученного неравенства, не превосходит

$$\sum_{j=1}^{\min\{k+t,\lfloor(1+k/t)r\rfloor\}} \binom{k+t}{j} \le [2(k+t)]^{(1+k/t)r}$$

(здесь использованы неравенство $\binom{k+t}{j} \le (k+t)^j$ и оценка суммы геометрической прогрессии). Следовательно, по условию леммы

$$\frac{\sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)^2}{|\Omega|h^{2t}(B/M)^{2(k+t)}} \le 1+\sum_{r=1}^{t}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{2M(k+t)}{B}\right)^{1+k/t}\right]^r \le \frac{4}{3}.$$

По неравенству Коши

$$\bigl|\{\omega : Z(\omega) > 0\}\bigr| \geq \frac{\bigl(\sum_\omega Z(\omega)\bigr)^2}{\sum_\omega Z(\omega)^2} \geq \frac{3}{4}|\Omega|.$$

Таким образом, для каждого набора w не менее трёх четвертей таблиц имеют допустимое размещение.

Назовём таблицу малой, если выполняется условие

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} |U_e(\omega)| \leq 8B(k+t).$$

Обозначим множество малых таблиц через Ω_0. Подсчёт по клеткам даёт

$$\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{e\in\mathcal{E}} |U_e(\omega)| = 2B(k+t)|\Omega|,$$

откуда следует неравенство $|\Omega_0| \geq 3|\Omega|/4$. Для каждого набора w число неподходящих малых таблиц не больше $|\Omega|/4 \leq |\Omega_0|/3$. Значит, число элементов любого непустого семейства ещё не покрытых наборов w можно сократить по крайней мере втрое, выбрав одну малую таблицу: это следует из подсчёта пар «набор w — подходящая малая таблица». Первоначально имеется M^k наборов, поэтому после не более чем $\lceil \log_3(4(2M)^k)\rceil$ таких шагов число непокрытых наборов меньше единицы и, следовательно, равно нулю. Объединение множеств $U_e(\omega)$ по всем дугам и выбранным таблицам даёт требуемое множество U и оценку его мощности. □

4. Доказательство верхней оценки теоремы 2

Верхнюю оценку будем доказывать для задачи Кнута. Достаточно рассмотреть произвольный набор из m положительных показателей, не превосходящих величины $A = \varphi(m)m^a = m^{a+o(1)}$. Нулевые показатели не требуют вычислений и могут быть заменены единицами.

Зафиксируем достаточно большое натуральное число k и положим

$$t = \lceil (a-2)k\rceil + 1, \qquad M = \left\lceil m^{a-1+1/(4(k+t))}\right\rceil, \qquad B = \left\lfloor m^{1-1/(4(k+t))}\right\rfloor.$$

Сначала будем считать число k фиксированным и устремим число m к бесконечности. Константы в оценках ниже могут зависеть от чисел a и k. Очевидно, при достаточно больших значениях m выполнены неравенства $1 \leq B < M$ и $M \geq 4t$. Кроме того,

$$\left\{\left\lfloor\frac{M}{4t}\right\rfloor\left(\frac{B}{2M(k+t)}\right)^{1+k/t}\right\}^t = m^{\,t-(a-2)k-\frac{2k+t}{4(k+t)}+o(1)} \longrightarrow \infty,$$

поскольку выполняются неравенства $t-(a-2)k \geq 1$ и $(2k+t)/(4(k+t)) < 1/2$. Таким образом, выполнены все условия леммы 1, в том числе при $a = 2$, когда $t = 1$.

Выберем множество U по этой лемме. При фиксированных числах k и t имеем оценку $|U| = O(B \log m)$. Все степени x^u, $u \in U$, можно подготовить бинарным методом за

$$O(B(\log m)^2) = o(m)$$

умножений в силу неравенства $u \leq 2M$ и соотношения $\log M = O(\log m)$.

Обозначим через m_0 число заданных показателей, меньших числа M. Остальные распределим по промежуткам $[jM, (j+1)M)$, $1 \leq j \leq \lfloor A/M \rfloor$, а внутри каждого промежутка — по группам не более чем из k показателей. В силу соотношения

$$\frac{A}{M} = m^{1-1/(4(k+t))+o(1)} = o(m),$$

число групп не превосходит $(m - m_0)/k + o(m)$. Все необходимые степени $x^{(j-1)M}$ с положительным показателем также подготовим бинарным методом. Это требует $O((A/M) \log m) = o(m)$ умножений.

В группе из j-го промежутка представим показатели в виде $c + w_1, \ldots, c + w_k$, где $c = (j-1)M$ и $M \leq w_i < 2M$; неполную группу дополним повторениями. По лемме для этой группы достаточно $t + k$ умножений:

$$x^{c+\xi_i} = x^{c+\xi_{i-1}} x^{\xi_i - \xi_{i-1}} \quad (1 \leq i \leq t), \qquad \xi_0 = 0,$$
$$x^{c+w_j} = x^{c+\xi_{\sigma(j)}} x^{w_j - \xi_{\sigma(j)}} \quad (1 \leq j \leq k).$$

При нулевом значении c первое умножение пропускается, поскольку число ξ_1 принадлежит множеству U. Значит, с учётом предварительных вычислений затраты на показатели, не меньшие числа M, не превосходят

$$\left(1 + \frac{t}{k}\right)(m - m_0) + o(m).$$

Для показателей, меньших числа M, положим $q = \lfloor a \rfloor$ и $d = \lfloor M^{1/q} \rfloor + 1$. В силу неравенства $q > a - 1$ при достаточно большом фиксированном числе k имеем неравенство $a - 1 + 1/(4(k+t)) < q$, откуда следует соотношение $d \log m = o(m)$. Подготовим бинарным методом степени с показателями sd^j, $1 \leq s < d$, $0 \leq j < q$; это требует $O(d \log m) = o(m)$ умножений. Разложение по основанию d представляет любое положительное число, меньшее числа $M < d^q$, в виде суммы не более q таких

показателей. Поэтому каждую из оставшихся степеней можно получить не более чем за $q-1 \le a-1$ умножений.

В итоге получаем для любого допустимого набора показателей следующую оценку, в которой остаточный член $o(m)$ не зависит от выбора набора:

$$l(x^{n_1},\dots,x^{n_m}) \le (q-1)m_0 + \left(1+\frac{t}{k}\right)(m-m_0) + o(m) \le \\ \le \left(a-1+\frac{2}{k}\right)m + o(m).$$

Эта оценка выполняется и для набора, на котором достигается максимум из определения функции Шеннона. Поэтому для функции Шеннона справедлива такая же оценка.

Далее в силу произвольности числа k получаем

$$L_K(\underbrace{A,\dots,A}_{m \text{ раз}}) \le (a-1)m + o(m).$$

При переходе к задаче Беллмана из соображений двойственности вытекает оценка $L_B(A,\dots,A) \le am + o(m)$, что вместе с нижними оценками доказывает теорему.

Список литературы

[1] С. Б. Гашков, В. В. Кочергин, “Об аддитивных цепочках векторов, вентильных схемах и сложности вычисления степеней”, *Методы дискретного анализа в теории графов и сложности*, Вып. 52, Новосибирск, 1992, 22–40.

[2] Д. Е. Кнут, *Искусство программирования для ЭВМ*, 1-е издание. Т. 2, Мир, М., 1977.

[3] Д. Е. Кнут, *Искусство программирования*, 3-е издание. Т. 2, Издательский дом «Вильямс», М., 2000.

[4] В. В. Кочергин, “О сложности вычислений в конечных абелевых группах”, *Доклады АН СССР*, **317**:2 (1991), 291–294.

[5] В. В. Кочергин, “О сложности вычислений в конечных абелевых группах”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып. 4, Наука, М., 1992, 178–217.

[6] В. В. Кочергин, “О сложности вычислений одночленов и наборов степеней”, *Дискретный анализ*, Труды Института математики СО РАН, **27**, Издательство Института математики СО РАН, Новосибирск, 1994, 94–107.

[7] В. В. Кочергин, “О вычислении наборов степеней”, *Дискретная математика*, **6**:2 (1994), 129–137.

[8] В. В. Кочергин, “Уточнение оценок сложности вычисления одночленов и наборов степеней в задачах Беллмана и Кнута”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **21**:6 (2014), 51–72.

[9] В. В. Кочергин, “Задачи Беллмана, Кнута, Лупанова, Пиппенджера и их вариации как обобщения задачи об аддитивных цепочках”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып. 20, ФИЗМАТЛИТ, М., 2022, 119–256. DOI: 10.20948/mvk-2022-119, https://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2022-119.

[10] О. Б. Лупанов, “О вентильных и контактно-вентильных схемах”, *Доклады АН СССР*, **111**:6 (1956), 1171–1174.

[11] О. Б. Лупанов, “О синтезе некоторых классов управляющих систем”, *Проблемы кибернетики*, Вып. 10, Физматгиз, М., 1963, 63–97.

[12] О. Б. Лупанов, “Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования”, *Проблемы кибернетики*, Вып. 14, Наука, М., 1965, 31–110.

[13] Э. И. Нечипорук, “О вентильных схемах”, *Доклады АН СССР*, **148**:1 (1963), 50–53.

[14] Э. И. Нечипорук, “О топологических принципах самокорректирования”, *Проблемы кибернетики*, Вып. 21, Наука, М., 1969, 5–102.

[15] А. Ф. Сидоренко, “Сложность аддитивных вычислений семейств целочисленных линейных форм”, *Записки научных семинаров ЛОМИ*, **105** (1981), 53–61.

[16] N. Alon, B. Bukh, B. Sudakov, “Discrete Kakeya-type problems and small bases”, *Israel Journal of Mathematics*, **174** (2009), 285–301. DOI: 10.1007/s11856-009-0115-9.

[17] R. E. Bellman, “Addition chains of vectors (Advanced problem 5125)”, *The American Mathematical Monthly*, **70**:7 (1963), 765. DOI: 10.2307/2312273.

[18] A. Brauer, “On addition chains”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45**:10 (1939), 736–739. DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07068-7.

[19] D. Dobkin, R. J. Lipton, “Addition chain methods for the evaluation of specific polynomials”, *SIAM Journal on Computing*, **9**:1 (1980), 121–125. DOI: 10.1137/0209011.

[20] P. Downey, B. Leong, R. Sethi, “Computing sequences with addition chains”, *SIAM Journal on Computing*, **10**:3 (1981), 638–646. DOI: 10.1137/0210047.

[21] P. Erdős, “Remarks on number theory, III: On addition chains”, *Acta Arith.*, **6**:1 (1960), 77–81. DOI: 10.4064/aa-6-1-77-81.

[22] D. E. Knuth, C. H. Papadimitriou, “Duality in addition chains”, *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 1981, №13, 2–4.

[23] J. Olivos, “On vectorial addition chains”, *Journal of Algorithms*, **2**:1 (1981), 13–21. DOI: 10.1016/0196-6774(81)90003-1.

[24] N. Pippenger, “On the evaluation of powers and related problems”, *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (Houston, TX, October 25–27, 1976), IEEE, 1976, 258–263. DOI: 10.1109/SFCS.1976.21.

[25] N. Pippenger, “The minimum number of edges in graphs with prescribed paths”, *Mathematical Systems Theory*, **12**:4 (1979), 325–346. DOI: 10.1007/BF01776581.

[26] N. Pippenger, “On the evaluation of powers and monomials”, *SIAM Journal on Computing*, **9**:2 (1980), 230–250. DOI: 10.1137/0209022.

[27] T. H. Southard, *Addition chains for the first N squares*, Technical Report CNA-84, University of Texas at Austin, Austin, TX, 1974.

[28] E. G. Straus, "Addition chains of vectors", *The American Mathematical Monthly*, **71**:7 (1964), 806–808. DOI: 10.2307/2310929.

[29] M. V. Subbarao, "Addition chains — some results and problems", *Number Theory and Applications*, NATO ASI Series. Series C: Mathematical and Physical Sciences, **265**, eds. R. A. Mollin, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989, 555–574.

[30] A. C.-C. Yao, "On the evaluation of powers", *SIAM Journal on Computing*, **5**:1 (1976), 100–103. DOI: 10.1137/0205008.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

New Results on R. Bellman's and D. Knuth's Problems

V. V. Kochergin

We consider Bellman's problem on the complexity of computing a monomial in m variables, defined as the minimum number of multiplications required, and Knuth's problem on the complexity of computing a set of m powers of a single variable. For every fixed real number $a \geq 2$ and every positive function $\varphi(m)$ satisfying $|\log \varphi(m)| = o(\log m)$, we establish asymptotically tight bounds for the corresponding Shannon functions, which describe the maximum possible complexity when the exponents are bounded by $A = \varphi(m)m^a$. As $m \to \infty$, these functions are asymptotic to am and $(a-1)m$, respectively.

Keywords: addition chains, vector addition chains, Bellman's problem, Knuth's problem, circuit complexity.

References

[1] S. B. Gashkov, V. V. Kochergin, "On addition chains of vectors, rectifier networks, and the complexity of computing powers", *Metody Diskretnogo Analiza v Teorii Grafov i Slozhnosti*, Issue 52, Novosibirsk, 1992, 22–40 (In Russian).

[2] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, 1st edition. V. 2, Mir, Moscow, 1977 (In Russian).

[3] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, 3rd edition. V. 2, Williams, Moscow, 2000 (In Russian).

[4] V. V. Kochergin, "On the complexity of computations in finite Abelian groups", *Doklady AN SSSR*, **317**:2 (1991), 291–294 (In Russian).

[5] V. V. Kochergin, "On the complexity of computations in finite Abelian groups", *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki*, Issue 4, Nauka, Moscow, 1992, 178–217 (In Russian).

[6] V. V. Kochergin, “On the complexity of computing monomials and sets of powers”, *Diskretnyi Analiz*, Trudy Instituta Matematiki SO RAN, **27**, Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 1994, 94–107 (In Russian).

[7] V. V. Kochergin, “On the computation of sets of powers”, *Diskretnaya Matematika*, **6**:2 (1994), 129–137 (In Russian).

[8] V. V. Kochergin, “Improvement of complexity bounds for computing monomials and sets of powers in Bellman’s and Knuth’s problems”, *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii*, **21**:6 (2014), 51–72 (In Russian).

[9] V. V. Kochergin, “Problems of Bellman, Knuth, Lupanov, and Pippenger and their variations as generalizations of the addition chain problem”, *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki*, Issue 20, FIZMATLIT, Moscow, 2022, 119–256. DOI: 10.20948/mvk-2022-119 (In Russian), https://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2022-119.

[10] O. B. Lupanov, “On rectifier and contact-rectifier networks”, *Doklady AN SSSR*, **111**:6 (1956), 1171–1174 (In Russian).

[11] O. B. Lupanov, “On the synthesis of certain classes of control systems”, *Problemy Kibernetiki*, Issue 10, Fizmatgiz, Moscow, 1963, 63–97 (In Russian).

[12] O. B. Lupanov, “On an approach to the synthesis of control systems: the local coding principle”, *Problemy Kibernetiki*, Issue 14, Nauka, Moscow, 1965, 31–110 (In Russian).

[13] E. I. Nechiporuk, “On rectifier networks”, *Doklady AN SSSR*, **148**:1 (1963), 50–53 (In Russian).

[14] E. I. Nechiporuk, “On topological principles of self-correction”, *Problemy Kibernetiki*, Issue 21, Nauka, Moscow, 1969, 5–102 (In Russian).

[15] A. F. Sidorenko, “The complexity of additive computations of families of integer linear forms”, *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, **105** (1981), 53–61 (In Russian).

[16] N. Alon, B. Bukh, B. Sudakov, “Discrete Kakeya-type problems and small bases”, *Israel Journal of Mathematics*, **174** (2009), 285–301. DOI: 10.1007/s11856-009-0115-9.

[17] R. E. Bellman, “Addition chains of vectors (Advanced problem 5125)”, *The American Mathematical Monthly*, **70**:7 (1963), 765. DOI: 10.2307/2312273.

[18] A. Brauer, “On addition chains”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45**:10 (1939), 736–739. DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07068-7.

[19] D. Dobkin, R. J. Lipton, “Addition chain methods for the evaluation of specific polynomials”, *SIAM Journal on Computing*, **9**:1 (1980), 121–125. DOI: 10.1137/0209011.

[20] P. Downey, B. Leong, R. Sethi, “Computing sequences with addition chains”, *SIAM Journal on Computing*, **10**:3 (1981), 638–646. DOI: 10.1137/0210047.

[21] P. Erdős, “Remarks on number theory, III: On addition chains”, *Acta Arith.*, **6**:1 (1960), 77–81. DOI: 10.4064/aa-6-1-77-81.

[22] D. E. Knuth, C. H. Papadimitriou, “Duality in addition chains”, *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*, 1981, № 13, 2–4.

[23] J. Olivos, “On vectorial addition chains”, *Journal of Algorithms*, **2**:1 (1981), 13–21. DOI: 10.1016/0196-6774(81)90003-1.

[24] N. Pippenger, “On the evaluation of powers and related problems”, *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (Houston, TX, October 25–27, 1976), IEEE, 1976, 258–263. DOI: 10.1109/SFCS.1976.21.

[25] N. Pippenger, “The minimum number of edges in graphs with prescribed paths”, *Mathematical Systems Theory*, **12**:4 (1979), 325–346. DOI: 10.1007/BF01776581.

[26] N. Pippenger, “On the evaluation of powers and monomials”, *SIAM Journal on Computing*, **9**:2 (1980), 230–250. DOI: 10.1137/0209022.

[27] T. H. Southard, *Addition chains for the first N squares*, Technical Report CNA-84, University of Texas at Austin, Austin, TX, 1974.

[28] E. G. Straus, “Addition chains of vectors”, *The American Mathematical Monthly*, **71**:7 (1964), 806–808. DOI: 10.2307/2310929.

[29] M. V. Subbarao, “Addition chains — some results and problems”, *Number Theory and Applications*, NATO ASI Series. Series C: Mathematical and Physical Sciences, **265**, eds. R. A. Mollin, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989, 555–574.

[30] A. C.-C. Yao, “On the evaluation of powers”, *SIAM Journal on Computing*, **5**:1 (1976), 100–103. DOI: 10.1137/0205008.

Received on November 9, 2026

Модели мышления и поведения, выходящие за рамки ИИ

Б. Тальхайм*

Сегодня об ИИ говорят все, но при этом его сильно недопонимают. Часто высказываются предположения или даже утверждается, что ИИ, как минимум, способен заменить человеческий интеллект и даже стать самостоятельным. Однако эта высокая задача никогда не будет решена. На самом деле ИИ — это лишь инструмент, вспомогательное средство интеллекта (IA – intelligence aid) и всего лишь дополнение к интеллекту человека, которое можно использовать с умом. Наша основная теорема постулирует, что основанное на моделях мышление и поведение человека не может быть эмулировано с помощью современных средств ИИ/IA в рамках ИТ-подхода. Для этого мы рассмотрим 9 тезисов, касающихся этой теоремы.

Ключевые слова: ИИ подвергает сомнению, искусственный интеллект человеческий интеллект, преимущества ИИ, компетенция в области ИИ, Теорема о неполноте ИИ.

Ажиотаж вокруг искусственного интеллекта

Сегодня об ИИ говорят больше, чем о любой другой технологии до сих пор. Он является центральной темой обсуждений как в науке и технике, так и в повседневной жизни. Хорошо образованные учёные могут только удивляться этому. Диапазон мнений простирается от представления об ИИ как о спасителе до представления о нём как о дьяволе. Всё разрешилось бы, если бы люди просто включили свой интеллект и начали думать не спеша. Кроме того, тема ИИ сопровождается агрессивной пропагандой. На самом деле это всего лишь новая стадия технического прогресса как инструмента, таким же, каким были автомобиль или железная дорога. Как и раньше, это открывает новые возможности для человека с его ограничениями. На этот раз, например, речь идет об обработке огромных объемов данных, которые человек уже не в состоянии охватить. Иногда новые технологии требуют отказа от старых представлений — например, в случае магнитной подвесной железной дороги колесо железнодорожного вагона как ограничивающий фактор больше не имеет значения.

* *Тальхайм Бернхард* — Профессор, доктор естественных наук (habil.) Эмеритус, Университет имени Кристиана-Альбрехта в Киле, D-24098 Киль, Германия, e-mail: bernhard.thalheim@email.uni-kiel.de, ORCID: 0000-0002-7909-7786.

Thalheim Bernhard — Professor, Dr. rer. nat. (habil.) Emeritus, Christian-Albrechts University Kiel, D-24098 Kiel, Germany.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Существует ли именно ТА ИИ?

Сегодня в рамках 4.0-го этапа развития ИИ, который используется как синоним всех возможных новых вычислительных процессов, что скорее приводит к путанице, чем к пониманию.
Во-первых, в качестве замечательных технических решений существуют ИИ.Анализ_данных, ИИ.Программирование, ИИ.Робототехника или ИИ.Управление,
во-вторых, в качестве пока еще не до конца понятных направлений научных исследований — ИИ.разработка_гипотез, ИИ.Анализ и ИИ.Простейшее_нейронное_моделирование,
в-третьих, в качестве чудесного или даже дьявольского спутника в повседневной жизни — ИИ.Поиск, ИИ.Эксперты, ИИ.Агент, ИИ.Генератор_текста, ИИ.Переводчик, ИИ.Медиа и ИИ.Мой_друг
и, в-четвертых, как великая отдаленная надежда — ИИ.Символические_вычисления.

Все это — совершенно разные технические решения, которым были заложены весьма разные основы и подходы. Их необходимо понимать и оценивать как инструменты, что, к сожалению, как в науке, так и в жизни замалчивается или идеологически приукрашивается. Иногда эти решения в области ИИ также существенно переоцениваются. Так, например, нейронные сети, которые широко пропагандируются как средство спасения человечества, представляют собой не что иное, как механизмы кибернетики первого порядка с использованием методов обратного моделирования.

Действительно ли ИТ обладают такой мощью, чтобы решать столько проблем?

Ответ — нет. Предстоит проделать огромную работу. Необходимо также выработать подлинные основы и принципы и, прежде всего, исправить все ошибки, допущенные в ходе предыдущего развития — а их более чем достаточно. На сегодняшний день нам известно четыре дюжины таких ошибочных решений. В области баз данных и информационных систем нам уже известно около двух дюжин подобных отклонений. В сферах языков программирования и языков специфических областей наблюдаются отклонения, которые гораздо серьезнее. За редким исключением теоретическая информатика сосредоточена на программировании в малом масштабе и отнюдь не достаточно глубоко рассмотрела разницу между ним и программированием в большом масштабе — ещё один ошибочный поворот. Растрата энергии и выделение тепла, характерные для

классических ИТ-технологий, в приложениях искусственного интеллекта усиливаются в геометрической прогрессии, чего никогда не наблюдалось в случае человеческого интеллекта.
Основы веб-программирования состоят из крошечных фрагментов кода. Любая программа, какой бы плохой и недоработанной она ни была, сегодня называется ИИ. Моделирование же практикуется как техника рисования полуготовых прототипов, которые после первого использования можно выбросить. Кроме того, используются стохастически сгенерированные данные, полученные из проблемных, не совсем прозрачных источников. Поскольку информатика увлечена языками, а языки обладают своими особенностями, можно задаться вопросом: открывает ли выбор языка широкие возможности, но в то же время ограничивает или даже препятствует чему-то другому?

Человеческое мышление и труд в первую очередь основаны на моделях

У людей нет ни неограниченного запаса времени, ни неограниченной памяти. Поэтому люди изначально, в зависимости от того, что в данный момент находится на первом плане, живут, ориентируясь на небольшой фрагмент мира, имея ограниченное представление о мире и весьма ограниченный запас данных. Люди также могут динамично концентрироваться на конкретной задаче в процессе мышления и действия. В то же время люди могут параллельно решать множество задач, сохраняя при этом целостность в данный момент времени. Такой подход к работе полностью отличается от подхода в науке и технике, которые стремятся к универсальности и полноте.

Этот способ мышления и работы скорее основан на моделях. В зависимости от ограничений выбирается фрагмент, который приблизительно соответствует другим фрагментам и в данный момент является правдоподобным. Если мы хотим учесть человеческие аспекты, то необходимо также рассмотреть модели или, точнее, наборы моделей, причем они зависят от конкретного момента и, прежде всего, от способностей конкретного человека. Это совершенно иная форма, чем вычисления Тьюринга.

Человеческий интеллект локализуется не только в большом мозге

Часто считается, что человеческий интеллект в первую очередь обусловлен работой большого мозга. Однако там также существуют и другие связанные между собой формы интеллекта, которые до сих пор прак-

тически невозможно охватить и которые не поддаются существующим алгоритмам, такие как интуитивный интеллект, интеллект абстракции, практический интеллект или воображательный интеллект. Однако человек обладает ещё как минимум четырьмя формами интеллекта, которые практически невозможно воспроизвести с помощью программ:
(1) эмоциональный и социальный интеллект, выходящий далеко за рамки контекстуального и эмпирического интеллекта;
(2) интеллект саморефлексии (часто называемый также духовным или экзистенциальным интеллектом) с его этическими и моральными ограничениями;
(3) телесный интеллект других систем, поддерживающих жизнедеятельность организма, таких как, например, сердце в качестве генератора ритма, как минимум четыре иммунные системы, фасциальная система и т. д.;
(4) интеллект сохранения вида, отвечающий за компромиссы, необходимые для выживания вида.

Возможно, когда-нибудь эти системы станет возможным описать с помощью алгоритмов, хотя современные ИТ-технологии пока не способны справиться с этой задачей.

Искусственного интеллекта для всех не будет

Искусственного интеллекта в одинаковой форме для всех не будет. Мы выделяем группу «коренных жителей ИИ» (в частности, «суверенных пользователей ИИ», «ориентированных на эффективность исполнителей» и «беспечных гедонистов»), группу «иммигрантов ИИ» (постматериальных скептиков в отношении ИИ, ответственных представителей ИИ-элиты) и группу «аутсайдеров ИИ» (требующих порядка дилетантов в области ИИ, людей, испытывающих неуверенность в отношении ИИ).

Каждая из этих групп и подгрупп нуждается в разных системах ИИ и разных компетенциях в области ИИ в зависимости от формы ИИ-решения, что привело бы к комбинаторному взрыву. До сих пор этому вопросу уделялось мало внимания. Одним из возможных решений в будущем могло бы стать разработка, в зависимости от группы ИИ, не только моделей ИИ, но и предварительных моделей для подготовки к использованию систем ИИ, последующих моделей для обработки результатов ИИ и метамоделей для моделей ИИ.

Однако это требует глубокой перестройки школьных и образовательных систем, порождающих проблемы, несмотря на демографические изменения. Кроме того, системы ИИ должны быть доработаны как минимум до уровня кибернетики второго порядка — если не третьего, как у

человека, — что, однако, противоречит экономическим интересам гигантов.

Когда и в каких случаях ИИ всё же приносит большую пользу?

ИИ — как и любой новый инструментарий — представляет собой существенный технологический прорыв. ИИ также позволит создавать более качественное, честное, полное и менее подверженное ошибкам программное обеспечение, в котором не будет всех тех недоразумений, связанных с обработкой типичных случаев. В то же время исключения, выходящие за рамки типичных случаев, пока что не так просто учесть. В будущем хорошо отработанные рутинные процессы будут заменены алгоритмами искусственного интеллекта, что приведет к появлению новых профессий вместо старых. При этом, будучи хорошо осведомлённым, нужно не обращать внимания на хвастовство и тревожные заявления крупных игроков. Преимущества и дополнительная ценность возникают, прежде всего, благодаря умелому использованию ИИ без его преувеличения.

Развитие компетенций в области искусственного интеллекта

Компетентность в области ИИ — так же, как и медийная грамотность и отказ от СМИ как способ избежать медийного отупения и лени — ещё предстоит развить. Необходимо разработать модели, предшествующие использованию, для точного определения того, чего действительно хочется и на что будет по силам, для качественного определения ожидаемых результатов, для настройки инструментов, а также для управления и предотвращения ошибок при использовании, и для ограничения ожиданий. Модели «после», равно как и метамодели, касающиеся использования инструментов, должны стать инструментом для пользователей при применении полученных результатов.

Особые критические навыки необходимы при работе с непрозрачными, неаккуратными или даже манипулятивными генераторами текста. Пользователь должен научиться понимать, что ему говорят или не говорят, почему, где и каким образом. К этому следует добавить тщательно продуманную настройку инструментов искусственного интеллекта. Одним из подходов в этом направлении станет диалогический интеллект, а также возвращение к практико-ориентированной логике вместо чистой эмпирики.

Теорема о неполноте ИИ

Сегодня мы живем с ожиданием того, что современная информатика, цифровизация и искусственный интеллект в будущем не только превзойдут человеческий интеллект, но и будут охватывать любую форму человеческого интеллекта. Нейронные сети часто приводятся в качестве примера этих огромных ожиданий. Типичной ошибкой в рассуждениях считается предположение, что нейронные сети, основанные на устаревшем, 70-летнем представлении о нейронах, а не на достижениях современных нейронаук, способны решить множество проблем. К этому добавляется ещё и то, что всё современное программирование охватывает лишь кибернетику первого порядка. До сих пор ИИ основывался на преобразованиях состояний, адаптивных модификациях и механизмах статистического вывода для озер данных. Мы противопоставляем этим высоким ожиданиям следующий постулат: вычислительные машины, основанные на подходе машины Тьюринга, не могут полностью воспроизвести человеческий интеллект, т. е. искусственный интеллект **!! никогда !!** не сможет полностью имитировать человеческий интеллект или воспроизвести человеческие способности.

Теорема Тьюринга о неполноте (расширение в области искусственного интеллекта для теории моделирования):
Модельное мышление и действие невозможно полностью реализовать с помощью ИТ-вычислений в рамках используемых в настоящее время традиционных вычислительных систем, основанных на вычислимости по Тьюрингу.

Доказательство этой теоремы основано на необходимой сложности этих систем, невозможности решения этих задач с помощью современных ИТ-технологий, а также на необходимых механизмах самоадаптации систем искусственного интеллекта и систем человеческого интеллекта без преобразования состояний.

И напоследок: сапожник, не выходи за пределы своего ремесла

Следует опираться на факты и, прежде всего, на реальные возможности. При этом в области ИИ следует ограничиваться теми видами ИИ, которые действительно приносят пользу, и тем, на что мы действительно способны. В качестве примера такой грандиозной задачи можно привести разработку алгоритмов ИИ, которые также осознанно и разумно используют модели во всех их формах.

Список литературы для более глубокого понимания и дальнейшей работы

В данной работе представлены лишь основные тезисы, а не доказательства с соответствующей степенью детализации. Поэтому мы ссылаемся лишь на некоторые работы, в которых эта тема раскрывается более подробно. По первому тезису мы также ссылаемся на [4, 6–8, 10, 19]. Приведённое разграничение видов ИИ является лишь попыткой. Оно основано на наших проектах и модулях. Что касается третьего тезиса и сомнений в отношении информатики, мы ссылаемся на [14, 15, 17, 18, 20, 25] и на использованные там работы коллег. Что касается четвёртого тезиса, мы ссылаемся на работы по MMM [16] (model–modelling activities–modelling). Кроме того, существует исследование по моделированию в науках [21], в частности, с главой об обратном моделировании (см. также [22]). Что касается пятого тезиса, мы также ссылаемся на [16] по моделиологии (modelo.logy) и на понимание моделируемого подхода в [11]. Что касается шестого тезиса, мы ссылаемся на исследования в области психологии, медицины и работы коллег из кильских кластеров передового опыта https://www.uni-kiel.de/de/forschung/exzellenz#c28877 и IIftC https://www.iiftc.de/, а также на [9].

Кроме того, учитываются работы по кибернетике второго порядка [23, 24], включая нашу формализацию. К этому добавляется модель-ориентированная деятельность и другие формы использования моделей. Другие важные основы взяты из физики [2, 12]. Седьмой тезис является банальностью и многими развит гораздо дальше. Восьмой тезис обобщает и систематизирует наш опыт, полученный в ходе проектов по разработке новых медиа [14, 17]. Центральный восьмой тезис и основная теорема исходят из тезисов, изложенных в [8].

Данная работа, по крайней мере, оставила открытой возможность появления искусственного интеллекта. Здесь мы должны теперь математически принципиально опровергнуть эту возможность с помощью моделирующего мышления и работы с помощью машин ИИ со ссылкой на [1, 3, 5, 13, 26, 28, 27].

Что касается девятого тезиса, мы ссылаемся на профессиональную практику и крах веры в универсальность ИИ 1.0, ИИ 2.0 и ИИ 3.0.

Дополнительные ссылки и справочные материалы можно найти на сайте https://dblp.org/pid/t/BernhardThalheim.html .

Список литературы

[1] P. J. Denning, P. Wegner, "Introduction to what is computation", *The Computer Journal*, **55**:7 (2012), 803–804. DOI: 10.1093/comjnl/bxs065.

[2] W. Deppert, *Theorie der Wissenschaft. Band 1: Die Systematik der Wissenschaft*, Springer VS, Wiesbaden, 2018. DOI: 10.1007/978-3-658-14024-3.

[3] D. Q. Goldin, P. Wegner, "The Church–Turing thesis: Breaking the myth", *New Computational Paradigms*, Lecture Notes in Computer Science, **3526**, Springer, 2005, 152–168. DOI: 10.1007/11494645_20.

[4] H. Helbig, *Welträtsel aus Sicht der modernen Wissenschaften: Emergenz in Natur, Gesellschaft, Psychologie, Technik und Religion*, Springer, Berlin, 2018. DOI: 10.1007/978-3-662-56288-8.

[5] L. A. Hemaspaandra, M. Thakur, *Rice-style theorems for complexity theory*, Technical Report UR CSD / TR757, University of Rochester, Department of Computer Science, Rochester, NY, 2001, https://hdl.handle.net/1802/569.

[6] H. Jaakkola, J. Henno, J. Mäkelä, B. Thalheim, "Today is the future of yesterday; what is the future of today?", *Proceedings of MIPRO 2017*, 40th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (Opatija, Croatia), IEEE, 2017, 635–643. DOI: 10.23919/MIPRO.2017.7973502.

[7] H. Jaakkola, J. Henno, J. Mäkelä, B. Thalheim, "Artificial intelligence yesterday, today and tomorrow", *Proceedings of MIPRO 2019*, 42nd International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (Opatija, Croatia), IEEE, 2019, 860–867. DOI: 10.23919/MIPRO.2019.8756913.

[8] H. Jaakkola, B. Thalheim, J. Henno, "About the essence of intelligence—will artificial intelligence (ever) cover human intelligence?", *Information Modelling and Knowledge Bases XXXIII*, Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, **343**, IOS Press, 2022, 19–43. DOI: 10.3233/FAIA210475.

[9] E. R. Kandel, *In Search of Memory: The Emergence of a New Science of Mind*, W. W. Norton & Company, New York, 2007.

[10] U. Karrenberg, *Quo Vadis KI? Entwicklungspfade, revolutionäre Anwendungen und die Grenzen des Machbaren*, Springer Vieweg, Berlin, 2026. DOI: 10.1007/978-3-662-73115-4.

[11] A. Kolmogorow, "Zur Deutung der intuitionistischen Logik", *Logik-Texte*, eds. K. Berka, L. Kreiser, Akademie-Verlag, 1986, 193–199.

[12] B. Kralemann, *Bildung als Gleichgewicht: Attraktoren als Interpretationsrahmen der Person in ihrer Bildung*, BoD–Books on Demand, Norderstedt, 2014.

[13] A. S. Podkolsin, *Computer modelling of logical processes*. V. 1–8, ZPI at Mech-Mat MGU, Moscow, 2007–2021.

[14] K.-D. Schewe, B. Thalheim, *Design and Development of Web Information Systems*, Springer, Berlin, 2019. DOI: 10.1007/978-3-662-58824-6.

[15] B. Thalheim, *Entity-Relationship Modeling: Foundations of Database Technology*, Springer, Berlin, 2000. DOI: 10.1007/978-3-662-04058-4.

[16] B. Thalheim, *Models, to model, and modelling: Collections of papers on modelling*, Collection, 2009–2025; searchable at ResearchGate and Academia.edu under "Towards a theory of models, especially conceptual models and modelling", https://www.researchgate.net/.

[17] B. Thalheim, *Web information systems: Collection of BTU and CAU papers (2003–2009)*, Collection, 2010; searchable at ResearchGate under "Web Information Systems: Analysis, Design, Development, and Implementation of Business Sites, Collaboration Sites, Edutainment (e-Learning) Sites, and Infotainment (Information) Sites", https://www.researchgate.net/.

[18] B. Thalheim, "Open problems of information systems research and technology", *Perspectives in Business Informatics Research*, BIR 2013, Lecture Notes in Business Information Processing, **158**, Springer, 2013, 10–18. DOI: 10.1007/978-3-642-40823-6_2.

[19] B. Thalheim, "Artificial intelligence enhanced by modelling", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **26**:1 (2022), 360–366.

[20] B. Thalheim, "Establishing language-backed modelling", *Rigorous Methods in Theory and Practice*, Lecture Notes in Computer Science, **16580**, Springer Nature, 2026, 421–444. DOI: 10.1007/978-3-032-24494-9_20.

[21] B. Thalheim, T. Slawik, MMM CAU team, *Science and Art of Modelling (SAM^3)*, MMM programme CRC proposal; in German, 137 pp.; available upon request, Christian-Albrechts University Kiel, 2014.

[22] D. Uhrlandt, K.-D. Weltmann, J. Schein, U. Füssel, J. Kruscha, U. Reisgen, J. Wilden, "Analysemethoden und erweitertes Verständnis für den MSG-Prozess", *Große Schweißtechnische Tagung 2011, Studentenkongress 2011, Abschlusskolloquium Lichtbogenschweißen 2011*, DVS-Berichte, **275**, DVS Media, Düsseldorf, 2011, 593–598, https://publications.rwth-aachen.de/record/127976.

[23] S. A. Umpleby, "Second-order cybernetics as a fundamental revolution in science", *Constructivist Foundations*, **11**:3 (2016), 455–465, https://constructivist.info/11/3/455.umpleby.

[24] *Cybernetics of Cybernetics: Or, the Control of Control and the Communication of Communication*, eds. H. von Foerster, Future Systems, Minneapolis, 1995.

[25] B. F. Webster, *Pitfalls of Object-Oriented Development: A Guide for the Wary and Enthusiastic*, M&T Books, New York, 1995.

[26] P. Wegner, "Why interaction is more powerful than algorithms", *Communications of the ACM*, **40**:5 (1997), 80–91. DOI: 10.1145/253769.253801.

[27] J. Wiedermann, "A computability argument against superintelligence", *Cognitive Computation*, **4**:3 (2012), 236–245. DOI: 10.1007/s12559-012-9124-9.

[28] J. Wiedermann, "On the road to thinking machines: Insights and ideas", *How the World Computes*, 8th Conference on Computability in Europe (CiE 2012), Lecture Notes in Computer Science, **7318**, Springer, 2012, 733–744. DOI: 10.1007/978-3-642-30870-3_74.

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Model-based thinking and behaviour beyond AI

B. Thalheim

AI is on everyone's lips these days, yet at the same time it is widely misunderstood. It is often assumed, or even claimed, that AI can at least replace human intelligence and may even become autonomous. However,

this lofty claim will never be fulfilled. In reality, AI is merely a tool — an intelligence aid (IA) — and simply a complement to intelligence that can be utilised with competence. Our main proposition demonstrates that human model-based thinking and behaviour cannot be emulated using current AI/IA tools within an IT-based approach. To this end, we shall discuss nine propositions relating to this theorem.

Keywords: AI questions, artificial intelligence, human intelligence, the benefits of AI, AI competence, The AI incompleteness theorem .

Received on October 24, 2026

Часть 2
Теория автоматов

Decision problems for parameterized top-down tree transducers

T. Tang*

This paper presents the results of a study on the complexity of certain decision problems—membership, equivalence, unification, and functionality—for top-down tree transducers (TDTs) with output parameters (PTDTs). Membership problem is L-complete for deterministic models DTDTs and PDTDTs, belongs to LOGCFL for TDTs, and it is NP-complete for PTDTs. Equivalence checking of complete DTDTs and PDTDTs can be performed in cubic time. The same time $O(n^3)$ is required for computing the most general unifier of a pair of PDTDTs as well as for computing the functional instance of a PTDT. Minimization of complete PDTDTs is NP-complete in contrast with polynomial-time complexity of minimization problem for DTDTs.

Keywords: tree transducers, decision problems, output parameters, computational complexity.

1. Introduction

Finite trees are hierarchical data structures, examples of which include abstract syntax trees or structured documents. Top-down tree transducers model the data-processing workflow: they construct an output tree by traversing an input tree, starting from its root. At the design stage, the transformation rules may be known, while the output labels—such as document tags or operations for a target platform—remain undefined; these must be specified at a later stage or during the system's installation by the user. Thus, this approach gives rise to two main problems: 1) how to verify whether a given system template satisfies the specified requirements for any parameter values, and 2) how to select parameter values such that the system meets the given requirements. Corresponding decision problems have been studied for finite-state parameterized word transducers [1]. In this paper, the same problems are investigated for top-down parameterized tree transducers.

* *Tang Tianxiang* — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, Shenzhen MSU-BIT University, e-mail: tangtx@cs.msu.ru, ORCID: 0009-0009-6040-8108

Published under CC-BY 4.0

2. Top-down tree transducers

For a ranked alphabet Γ, the set $\mathcal{T}(\Gamma)$ of finite ground terms is generated by

$$t ::= c \mid f(t_1, \ldots, t_m), \qquad c \in \Gamma^{(0)}, \quad f \in \Gamma^{(m)}$$

where $\Gamma^{(m)}$ denotes the symbols of arity m. Each term represents a rooted ordered tree: $f(t_1, \ldots, t_m)$ has a root labelled by f and ordered subtrees represented by $t_1, \ldots, t_m$, while a nullary symbol c represents a leaf.

A *parameterized top-down tree transducer* (PTDT) is a tuple $\Pi = (\Sigma, \Delta, \mathcal{P}, \mathcal{S}, S_0, R)$, where Σ and Δ are finite ranked input and output alphabets containing nullary symbols, $\mathcal{P}$ is a finite ranked alphabet of parameters disjoint from $\Sigma \cup \Delta$, $\mathcal{S}$ is a finite set of states, $S_0 \in \mathcal{S}$ is the initial state, and R is a finite set of rules

$$S(f(x_1, \ldots, x_k)) \longrightarrow \beta, \qquad S \in \mathcal{S}, \quad f \in \Sigma^{(k)}$$

Here $x_1, \ldots, x_k$ are distinct placeholders for the immediate input subtrees. The right-hand side is generated by

$$\beta ::= Q(x_i) \mid a(\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

where $Q \in \mathcal{S}$, $1 \le i \le k$, $a \in (\Delta \cup \mathcal{P})^{(m)}$, and $m \ge 0$; for $m = 0$, the second alternative is simply a. A call $Q(x_i)$ recursively processes the i-th input subtree in state Q. Input variables occur only in such calls and may be repeated or omitted, allowing copying and deletion.

An ordinary *top-down tree transducer* (TDT), denoted by π, is the case $\mathcal{P} = \emptyset$. A transducer is *deterministic* if it has at most one rule per pair (S, f), and *complete* if it has at least one. The deterministic models are abbreviated DTDT and PDTDT.

Parameter substitutions are arity-preserving maps $\eta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P} \cup \Delta$; they are *ground* if $\eta(\mathcal{P}) \subseteq \Delta$. Their sets are denoted by $\mathrm{Subst}(\mathcal{P}, \Delta)$ and $\mathrm{GSubst}(\mathcal{P}, \Delta)$, respectively. We assume $\Delta^{(m)} \neq \emptyset$ whenever $\mathcal{P}^{(m)} \neq \emptyset$. The instance $\Pi\eta$ is obtained by simultaneously replacing every occurrence of each parameter p in all rules by $\eta(p)$, retaining its arguments. Ground instances are ordinary TDTs. Different parameters may share a value; parameter values remain fixed throughout a computation.

For an ordinary TDT π, a rewriting step, denoted by $\longrightarrow_\pi$, replaces any occurrence of $S(f(t_1, \ldots, t_k))$ by $\beta\{x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k\}$, where $t_i \in \mathcal{T}(\Sigma)$. Rewriting may take place below output symbols; a successful computation ends with a ground output term containing no state calls. The transduction relation is defined by

$$\mathrm{TR}(\pi, S) = \{(t, T) \in \mathcal{T}(\Sigma) \times \mathcal{T}(\Delta) \mid S(t) \longrightarrow_\pi^* T\}$$

A DTDT defines a partial function $[\![S]\!]_\pi$ with $[\![S]\!]_\pi(t) = T$ if and only if $(t, T) \in \mathrm{TR}(\pi, S)$. This function is total for a complete DTDT.

3. Membership problem

The membership problem consists of determining, for a given TDT π and ground terms t and T (represented explicitly as prefix strings), whether the condition $(t, T) \in \mathrm{TR}(\pi, S_0)$ holds. In the case where Π is a parameterized transducer, the problem is to determine whether there exists a substitution $\eta \in \mathrm{GSubst}(\mathcal{P}, \Delta)$ such that $(t, T) \in \mathrm{TR}(\Pi\eta, S_0)$

Theorem 1. *Membership problem is* L*-complete for DTDT and PDTDT, it is in* LOGCFL *for TDT, and it is* NP*-complete for PTDT.*

4. Equivalence and unification problems

Equivalence of two states of a complete TDT means that $\mathrm{TR}(\pi, S_1) = \mathrm{TR}(\pi, S_2)$. Equivalence problem consists of determining, given a TDT π and a pair of its states S_1, S_2 whether these states are equivalent. Since this problem is undecidable for TDTs in general [4], we consider it only for complete DTDTs. Unification problem for a pair of PTDTs Π_1, Π_2 requires to compute such a substitution (unifier) $\theta \in \mathrm{Subst}(\mathcal{P}, \Delta)$ that TDTs $\Pi_1\theta\eta$ and $\Pi_2\theta\eta$ are equivalent for every $\eta \in \mathrm{GSubst}(\mathcal{P}, \Delta)$. A unifier θ is called the most general one if every ground unifier θ' is of the form $\theta\rho$, $\rho \in \mathrm{GSubst}(\mathcal{P}, \Delta)$.

Theorem 2. *Equivalence problem for complete DTDTs can be decided in $O(n^3)$ time, where n is the total size of the transducer descriptions.*

Theorem 3. *There exists an $O(n^3)$-time algorithm which for any pair of complete PDTDTs either computes their most general unifier, or reports that these PDTDTs are not unifiable.*

The approach of [2] is refined to enable its application to the functionality problem.

5. Functionality problem

A TDT π is functional if the relation $\mathrm{TR}(\pi, S_0)$ is function. Functionality problem consists of determining, given a TDT π whether it is functional.

Theorem 4. *Functionality problem for complete TDTs can be decided in $O(n^3)$ time.*

Theorem 5. *There exists an $O(n^3)$-time algorithm which for any complete PTDT Π either computes a ground substitution η such that the instance $\Pi\eta$ is functional, or reports that all ground instances of Π are not functional.*

6. Minimization

In [3] it was shown that minimization of complete DTDTs can be performed in polynomial time. Minimization problem for PDTDTs is set up as follows. Given a complete PDTDT Π and integer k, one needs to determine if there exists $\eta \in \mathrm{GSubst}(\mathcal{P}, \Delta)$ such that the instance $\Pi\eta$ is equivalent to a DTDT M with $|\mathcal{S}_M| \leq k$.

Theorem 6. *Minimization problem for complete PDTDT is* NP*-complete.*

7. Projection problem

Projection problem is that of checking, given a TDT π and a ground term T, if there exists such a ground term t that $(t, T) \in \mathrm{TR}(\pi, S_0)$.

Theorem 7. *Projection problem for DTDTs is* PSPACE*-complete.*

References

[1] T. Tang, V. A. Zakharov, "On the complexity of decision problems for parameterized finite state synchronous transducers", *Implementation and Application of Automata (CIAA 2024)*, LNCS, **15015**, Springer, Cham, 2024, 332–346. DOI: 10.1007/978-3-031-71112-1_24.

[2] Z. Deng, T. Tang, V. A. Zakharov, "An algebraic approach to the equivalence checking of deterministic top-down tree transducers", *Implementation and Application of Automata (CIAA 2025)*, LNCS, **15981**, Springer, Cham, 2026, 86–98. DOI: 10.1007/978-3-032-02602-6_7.

[3] J. Engelfriet, S. Maneth, H. Seidl, "Deciding equivalence of top-down XML transformations in polynomial time", *Journal of Computer and System Sciences*, **75**:5 (2009), 271–286. DOI: 10.1016/j.jcss.2009.01.001.

[4] H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, C. Löding, S. Tison, M. Tommasi, *Tree Automata Techniques and Applications*, INRIA, 2008.

Received on October 20, 2026

О порядке автоматов с операцией суперпозиции.

Д. Н. Бабин*, Н. В. Муравьев‡

Если входной и выходной алфавиты инициального автомата совпадают, то число различных автоматов, получаемых суперпозицией исходного автомата с самим собой, может быть как конечным, так и бесконечным. Задача определения порядка конечного инициального автомата относительно суперпозиции алгоритмически неразрешима в общем случае, но для некоторых классов автоматов удается найти алгоритмы определения порядка.

Ключевые слова: автоматы Мили, классы Поста, алгоритмическая разрешимость.

Все определения взяты из книги [1]. Если в качестве элементов полугруппы использовать автоматы, у которых входной и выходной алфавиты совпадают, а операцией объявить суперпозицию автоматов, то мы получим интересный пример полугруппы конечно-автоматных функций. Определение порядка элемента в полугруппе является классической задачей в алгебре. В общем случае в полугруппе конечно-автоматных функций она алгоритмически неразрешима [2]. Алешин С.В. показал [3], что в группе одноместных линейных автоматов (конечно приведенных) над полем из двух элементов автомат имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда его переходы безусловны. Критерий конечности порядка автомата был обобщён на многоместные линейные автоматы над любым полем [4] [5].

Пусть R некоторый класс Поста [6], автомат, функции переходов и выходов которого лежат в классе R, назовём R-автоматом. Решетку Поста можно разбить на две группы: классы с неразрешимой задачей определения порядка, и классы, с разрешимой задачей определения порядка. Для этого не требуется перебирать все классы Поста. Оказывается, что

* *Бабин Дмитрий Николаевич* — д.ф.-м.н., проф. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: d.n.babin@mail.ru.

Babin Dmitry Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

‡ *Муравьев Никита Валерьевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ne-ki-tos@yandex.ru.

Muravev Nikita Valerievich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

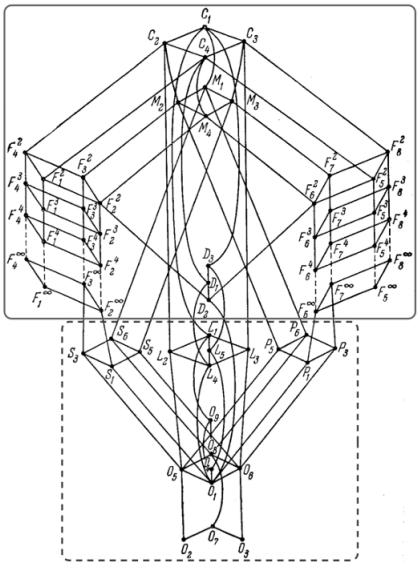


Рис. 1

свойство разрешимости определения порядка R-автомата наследственно выполняется в подклассах, а свойство неразрешимости — в надклассах исследуемого замкнутого класса R. Подобный подход был использован в работе [7]. Имеет место

Теорема 1. *[8]*

Задача определения порядка алгоритмически неразрешима в классе R-автоматов, если R содержит один из классов $F_2{}^\infty$, $F_6{}^\infty$, D_2. В противном случае задача определния порядка алгоритмически разрешима.

На рисунке решетка Поста замкнутых классов в P_2 (схема из [6]). Сплошным прямоугольником выделены классы, для которых алгоритмически неразрешима задача определения порядка в соответствующем классе автоматов. Пунктирным прямоугольником выделены классы, порождающие классы автоматов с разрешимой задачей определения порядка.

Список литературы

[1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., *Введение в теорию автоматов.*, Наука, Москва, 1985.

[2] P. Gillibert., “An automaton group with undecidable order and Engel problems”, *Journal of Algebra*, **497** (2018), 363–392. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2017.11.049.

[3] Алёшин С.В., *Алгебраические системы автоматов*, МАКС пресс, Москва, 2016.

[4] Муравьев Н.В., “Оценки порядков линейных автоматов”, *Вестник Московского университета Серия 1: Математика, Механика.*, 2022, № 6, 8–14. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-2022-6-8-14.

[5] Муравьев Н.В., “Максимальные конечные порядки линейных автоматов над произвольным полем”, *Вестник Московского университета Серия 1: Математика, Механика.*, 2024, № 5, 71–73. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-65-5-9.

[6] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б., *Функции алгебры логики и классы Поста.*, Наука, Москва, 1966.

[7] Бабин Д.Н., “О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты”, *Доклады академии наук,*, **367**:4 (1999), 439–441.

[8] Муравьев Н.В., “Задача определения порядка для автоматов, чьи функции переходов и выходов принадлежат замкнутому классу Поста”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:3 (2025), 180–189.

Статья поступила 1 октября 2026 г.

On the order of some automata with the superposition operation..

D. N. Babin, N. V. Muravev

If the input and output alphabets of an initial automaton coincide, then the number of distinct automata obtained by superposing the original automaton with itself can be either finite or infinite. The problem of determining the order of a finite initial automaton with respect to superposition is algorithmically undecidable in the general case. However, for some classes of automata, algorithms for determining the order can be found.

Keywords: Mealy automata, Post classes, algorithmic decidability.

References

[1] Kudryavtsev V.B., Aleshin S.V., Podkolzin A.S., *Introduction to Automata Theory (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1985.

[2] P. Gillibert., “An automaton group with undecidable order and Engel problems”, *Journal of Algebra*, **497** (2018), 363–392. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2017.11.049.

[3] Aleshin S.V., *Algebraic systems of automata (in Russian)*, MAX PRESS, Moscow, 2016.

[4] Muravev N.V., "Bounds on Orders of Linear Automata (in Russian)", *Bulletin of Moscow University. Mathematics and Mechanics.*, 2022, №6, 8–14. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-2022-6-8-14.

[5] Muravev N.V., "Maximal Finite Orders of Linear Automata over an Arbitrary Field (in Russian)", *Bulletin of Moscow University. Mathematics and Mechanics.*, 2024, №5, 71–73. DOI: 10.55959/msu0579-9368-1-65-5-9.

[6] Jablonsky S.V., Gavrilov G.P., Kudryavcev V.B., *Functions of algebra logic and Post classes (in Russian)*, Nauka, Moscow, 1966.

[7] Babin D.N., "On the Classification of Automaton Bases", *Doklady Mathematics*, **60**:1 (1999), 65–67.

[8] Muravev N.V., "The order problem for automata which transition and output functions lie in closed Post classes", *Intelligent systems. Theory and applications*, **29**:3 (2025), 180–189.

Received on October 1, 2026

О порождаемости A-предпредполных классов линейных автоматов

В. А. Бирюкова*

В работе рассматриваются классы линейных автоматов над полем E_2 с операторами композиции (K-замыкание) и аппроксимационного замыкания (A-замыкание). Для A-предпредполных классов (классов второго уровня решетки A-замкнутых классов) решается задача K-порождаемости. Доказано, что у 22 из 23 таких классов существует конечный базис, а оставшийся класс не является K-конечнопорожденным.

Ключевые слова: конечный автомат, линейный автомат, замкнутый класс, предполный класс, операции композиции, A-замыкание, K-конечнопорожденность, базисы замкнутых классов.

Введение

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ — инициальный абстрактный конечный автомат [1]. Он называется линейным, если найдутся $n, s \in \mathbb{N}$, $A = E_k^n$, $Q = E_k^s$, $B = E_k$, где E_k — поле Галуа из k элементов, а φ и ψ — линейные операторы k-значной логики. Класс линейных автоматов над E_2 обозначается через L_2. Далее рассматриваются K- и A-замыкания [1] подмножеств из L_2.

Согласно теореме А. Гилла [2], автомат f является линейным тогда и только тогда, когда он представим в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\mu_j \in E_2'(\xi)$ для всех $j = \overline{0, n}$. Здесь $E_2'(\xi)$ — кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из E_2, образующими периодическую (с возможным предпериодом) последовательность. Для ряда $\alpha \in E_2'(\xi)$ через $\alpha(t)$ обозначается коэффициент при ξ^t. Переменная x_i автомата f называется непосредственной, если $\mu_i(0) = 1$.

* *Бирюкова Вероника Андреевна* — соискатель кафедры Математической теории интеллектуальных систем (МаТИС), механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: biryukovaveronika@mail.ru, ORCID: 0009-0006-7590-9800.

Biryukova Veronika Andreevna — Applicant for the degree, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Пусть Ω — множество двоичных последовательностей некоторой фиксированной длины S. Говорят, что автомат f сохраняет Ω, если при подаче на все его входы последовательностей из Ω выходная последовательность в первые S тактов также принадлежит Ω. Классы линейных автоматов, сохраняющих некоторое множество последовательностей Ω, $|\Omega| > 1$, будем обозначать $P(\Omega)$.

Согласно [3], в L_2 имеется ровно пять A-предполных классов:

$$T_0 = \{f \in L_2 \mid \mu_0(0) = 0\},$$
$$T_1 = \{f \in L_2 \mid \sum_{i=0}^{n} \mu_i(0) = 1\},$$
$$V_1 = \{f \in L_2 \mid f \text{ имеет не более одной непосредственной переменной}\},$$
$$V_0 = \{f \in L_2 \mid f \text{ имеет нечетное число непосредственных переменных}\},$$
$$M_1 = \{f \in L_2 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(1) = 0\}.$$

В работе [4] показано, что все они являются K- и A-конечнопорожденными. Также эти пять A-предполных классов составляют первый уровень решетки A-замкнутых классов, где нулевой уровень — сам класс L_2. На втором уровне располагаются классы, являющиеся A-предполными в классах первого уровня; их называют A-предпредполными.

Как показано в [5], второй уровень содержит ровно 23 различных класса: некоторые из них являются A-предполными сразу в нескольких классах первого уровня, а некоторые сравнимы по включению между собой.

Подклассы V_1: $V_{1,1} = \{f \in V_1 \mid$ если у f есть непосредственная переменная, то для остальных переменных x_i верно $\mu_i(1) = 0\}$;

$V_{1,2} = \{f \in V_1 \mid$ если у f есть непосредственная переменная, то $\mu_0(0) = 0\}$;

$V_{1,3} = \{f \in V_1 \mid f$ имеет ровно одну непосредственную переменную$\}$; при этом $V_{1,3} = V_1 \cap V_0$.

Подклассы V_0: $V_{0,1} = V_1 \cap V_0 = V_{1,3}$;
$V_{0,2} = \{f \in V_0 \mid \sum_{i=1}^{n} \mu_i(1) = 0\}$;
$V_{0,3} = \{f \in V_0 \mid \mu_0(0) = 0\}$; при этом $V_{0,3} = V_0 \cap T_0 = T_0 \cap T_1 = V_0 \cap T_1$;
$V_{0,4} = \{f \in V_0 \mid \sum_{i=1}^{n} \mu_i(1) = \mu_0(0)\}$.

Подклассы T_a $(a \in E_2)$: $T_{a,1} = T_a \cap V_0 = V_{0,3}$;
$T_{a,2} = T_a \cap V_1$; при этом $T_{a,2} \subset V_{1,2}$;
$T_{a,3} = T_a \cap M_1$;
$T_{a,4} = \{f \in T_a \mid f$ сохраняет последовательность $a1\}$;
$T_{a,5} = \{f \in T_a \mid f$ сохраняет последовательность $a0\}$.

Подклассы M_1:
$M_{1,1} = M_1 \cap V_1$; при этом $M_{1,1} \subset V_{1,1}$;
$M_{1,2} = M_1 \cap V_0$; при этом $M_{1,2} \subset V_{0,2}$;
$M_{1,3} = M_1 \cap T_0 = T_{0,3}$;
$M_{1,4} = M_1 \cap T_1 = T_{1,3}$;
$M_{1,5} = M_1 \cap P(\{00, 10\})$;
$M_{1,6} = M_1 \cap P(\{01, 11\})$;
$M_{1,7} = M_1 \cap P(\{00, 11\})$;
$M_{1,8} = M_1 \cap P(\{01, 10\})$;
$M_{1,9} = \{f \in M_1 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(2) = 0\}$;
$M_{1,10} = \{f \in M_1 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(3) = 0\}$;
$M_{1,11} = \{f \in M_1 \mid \forall\, i = \overline{1,n}\ \mu_i(2) = \mu_i(3)\}$.

Постановка задачи и основной результат

Для этих 23 классов рассматривается задача K-конечнопорожденности: требуется выяснить, для каких классов существует конечное порождающее множество относительно операций композиции, а для каких нет.

Теорема. Все A-предпредполные классы линейных автоматов в L_2, кроме $V_{1,1}$, являются K-конечнопорожденными.

Для каждого из 22 классов найдено конечное порождающее множество и доказано, что оно является базисом. Например, для класса $T_{1,3}$ базис имеет вид $\{\xi^3 x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ (1 + \xi^2)x,\ x + \xi,\ 1\}$.

Для $V_{1,1}$ показано, что он не K-конечнопорожденный класс. В доказательстве используется инвариант q — число переменных x_i, для которых $\mu_i(0) = 0$ и $\mu_i(1) = 1$. При операциях композиции q не увеличивается, тогда как в $V_{1,1}$ для любого $D \in \mathbb{N}$ есть автомат $\xi x_1 + \cdots + \xi x_D$, у которого $q = D$. Таким образом, класс $V_{1,1}$ является наиболее высоко расположенным в рассматриваемой решетке не K-конечнопорожденным классом.

Следствие. Каждый A-предпредполный класс в L_2, отличный от $V_{1,1}$, является A-конечнопорожденным.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985, 320 с.

[2] Гилл А., *Линейные последовательностные машины*, Наука, Москва, 1974, 288 с.

[3] Часовских А. А., “О полноте в классе линейных автоматов”, *Математические вопросы кибернетики*, **3**, Наука, Москва, 1991, 140–166.

[4] Бирюкова В. А., "Задача K-конечнопорожденности для предполных классов линейных автоматов, составляющих A-критериальную систему в пространстве линейных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26**:4 (2022), 109–133.

[5] Часовских А. А., Бирюкова В. А., "О полноте в аппроксимационно предполных классах линейных автоматов", *Дискретная математика*, 2026 (в печати).

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

On generation of second-level A-closed classes of linear automata

V. A. Biryukova

The paper deals with classes of linear automata over the field E_2 under composition (K-closure) and approximation (A-closure) operators. The K-generation problem is solved for the classes that form the second level of the lattice of A-closed classes. It is proved that 22 of the 23 such classes have a finite basis, while the remaining class is not K-finitely generated.

Keywords: finite automaton, linear automaton, closed class, precomplete class, composition operations, A-closure, K-finite generation, bases of closed classes.

References

[1] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to Automata Theory*, (In Russian), Nauka (Science), Moscow, 1985, 320 pp.

[2] Gill A., *Linear Sequential Machines*, (In Russian), Nauka, Moscow, 1974, 288 pp.

[3] Chasovskikh A. A., "On Completeness in the Class of Linear Automata", (In Russian), *Mathematical Problems of Cybernetics*, **3**, Nauka, Moscow, 1991, 140–166.

[4] Biryukova V. A., "The Problem of K-Finite Generation for Precomplete Classes of Linear Automata Constituting an A-Criterion System in the Space of Linear Automata", (In Russian), *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **26**:4 (2022), 109–133.

[5] A. A. Chasovskikh, V. A. Biryukova, "On Completeness in Approximation-Precomplete Classes of Linear Automata", (In Russian), *Discrete Mathematics and Applications*, 2026 (to appear).

Received on November 6, 2026

Сложность задачи адресации идемпотентными клеточными автоматами с локаторами

Д. А. Бухарина*

Исследуется сложность задачи адресации для одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами. На бесконечной в обе стороны ленте рассматривается отрезок из $N+1$ размеченной клетки, вне которого все клетки находятся в состоянии покоя. Требуется по переданному адресу выделить клетку с этим адресом. Установлен порядок сложности: при константном числе состояний задача адресации разрешима за $O(\log N)$ шагов.

Ключевые слова: клеточные автоматы с локаторами, задача адресации, идемпотентность, сложность.

1. Введение

Клеточные автоматы с локаторами (КАсЛ) представляют собой расширение классической модели клеточных автоматов, в котором добавляется механизм глобальной передачи информации через «эфир». Каждая ячейка может посылать в эфир сигналы, а локаторы позволяют принимать суммарный сигнал от всех ячеек в заданном направлении. Определение модели и её базовые свойства можно найти в работе [1] с уточнениями в работе [2].

В работе [3] было показано, что идемпотентность операции агрегации сигналов в эфире ($x \oplus x = x$) существенно ограничивает вычислительные возможности одномерных КАсЛ. Однако этот результат был получен для случая, когда начальная конфигурация ленты является однородной (все клетки в состоянии покоя, кроме границ). В такой постановке автомат не может «различить» клетки по их состоянию, что и приводит к сильным нижним оценкам.

В данной работе рассматривается другая постановка: мы предполагаем, что начальная конфигурация ленты может быть произвольным образом размечена заранее. Это позволяет автомату «знать» структуру

* *Бухарина Дарья Анатольевна* — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: daria.bukharina@math.msu.ru, ORCID: 0009-0000-6203-9080.

Bukharina Daria Anatolevna — Student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

ленты с самого начала и обходить ограничения, связанные с идемпотентностью. Ниже показано, что в такой постановке задача адресации решается за логарифмическое время.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Эльяру Эльдаровичу Гасанову за ценные научные рекомендации, всестороннюю поддержку и внимание к работе, а также Глебу Вячеславовичу Калачеву за оказанную помощь, полезные замечания и содействие в процессе подготовки настоящей статьи.

2. Формулировка результата

Определение 1 (Задача адресации)**.** Дано $N = 2^n$ клеток на прямой, каждой сопоставлен уникальный адрес из $\{0, \dots, N-1\}$. Адрес передаётся процессором по битам, начиная со старшего; очередной бит $a_t \in \{0, 1\}$ подаётся только после сигнала готовности (**ready**) от автомата.

Требование корректности. После передачи всех n битов ровно одна клетка должна оказаться в финальном состоянии F, а все остальные — в состоянии покоя; финальной должна становиться клетка, изначально имевшая переданный адрес.

Теорема 1. *Для любого $N = 2^n$, $n \geq 1$, существует идемпотентный КАсЛ с константным числом состояний и такая начальная конфигурация, что задача адресации решается за $T = O(\log N)$.*

3. Идея доказательства теоремы 1

Основные компоненты автомата. Алфавит состояний $Q = \{\perp,\ 0,\ 1,\ P_0,\ P_1,\ L,\ R,\ M,\ \perp',\ S,\ S',\ F\}$, $|Q| = 12$. Шаблон соседства $V = \{-1, +1\}$. Алфавит сигналов $G = \{e,\ 0,\ 1,\ s_{\text{Start}},\ s_{\text{Ready}},\ s_{\text{Clear}}\}$. Операция агрегации $\oplus = \max$, локатор один — полный Ω. Состояние $\perp'$ является поглощающим до момента подачи сигнала очистки s_{Clear}. Сигнал s_{Clear} имеет наивысший приоритет и принудительно переводит все клетки (включая $\perp'$) в состояние покоя.

Блочная структура. Лента из $N + 1$ клетки делится на $q = N/k$ блоков длины $k = 2^s$, $s = \lceil \log_2 n \rceil + 1$, разделённых клетками S; $(N+1)$-я клетка тоже S. Первая клетка каждого блока находится в состоянии разделителя S. Далее в блоке хранится двоичный номер: старший бит — в состоянии указателя P_0/P_1, остальные $m-1$ битов ($m = \log_2 q = n - s$) — в состояниях $0/1$, хвост заполнен живыми пустыми клетками в состоянии $\perp$. При $N = 2, 4, 8$ лента — один блок клеток в состоянии M, первый этап отсутствует.

Этап 1: выбор блока. Первые m тактов процессор подаёт биты адреса. Указатель блока при совпадении бита передаёт эстафету правому соседу, при несовпадении переходит в поглощающее состояние $\perp'$, которое убивает по цепочке весь блок. Выживает ровно один блок; его указатель переходит в M, и волна M заполняет блок до разделителей.

Этап 2: деление пополам. От правого разделителя рождается граница R, по сигналу из эфира — левая граница L. Границы идут навстречу друг другу, встречаются посередине и посылают сигнал готовности; процессор подаёт очередной бит. При бите 1 умирает левая половина, при 0 — правая; активная зона уменьшается вдвое. После $n - m$ шагов остаётся одна клетка: она переходит в F, испускает сигнал очистки, и все остальные клетки возвращаются в состояние покоя.

Оценка времени. Для $N \geq 16$ время первого этапа $T_1 = m + (k - m - 2) = k - 2$. Время второго этапа $T_2 = k + 3s - 1$. Общее время $T = T_1 + T_2 + 1 = (k - 2) + (k + 3s - 1) + 1 = 2k + 3s - 2 = O(\log N)$. Для $N = 2, 4, 8$ первый этап отсутствует, оценка также остается верной.

Корректность доказывается индукцией по числу переданных битов: после t битов первого этапа живы блоки с префиксом $a_1 \dots a_t$, после j шагов второго — позиции с префиксом $a_1 \dots a_{m+j}$. Условие $k = 2^s$ гарантирует, что длина активной зоны на каждом шаге остаётся степенью двойки, поэтому границы L и R встречаются ровно посередине. Следовательно, в конце остаётся единственная клетка с полностью совпавшим адресом.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 119–132.

[2] Г. В. Калачев, “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, “О слабости одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 151–169 .

Статья поступила 5 ноября 2026 г.

Complexity of the Addressation Problem for Idempotent Cellular Automata with Locators

D. A. Bukharina

We study the complexity of the addressation problem for one-dimensional idempotent cellular automata with locators. On a tape infinite in both directions, we consider a segment of $N + 1$ marked cells, outside of which all cells are in the quiescent state. Given a transmitted address, it is required to single out the cell with this address. We establish the order of complexity: with a constant number of states, the addressation problem is solvable in $O(\log N)$ steps.

Keywords: cellular automata with locators, addressation problem, idempotency, complexity.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 15–26.

[2] G. V. Kalachev, "Remarks on the definition of cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 45–53.

[3] E. E. Gasanov, "On the Weakness of One-Dimensional Idempotent Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 151–169.

Received on November 5, 2026

Автоматные и вычислительные системы

Н. Ю. Волков*

Рассматривается три вида дискретных динамических систем: *автоматные системы*, *вычислительные системы* и *системы переходов*. Получены критерии эквивалентности для каждого вида систем. Решены задача моделирования систем каждого вида системами других видов и задача единственности такого моделирования.

Ключевые слова: автоматные системы, вычислительные системы, системы переходов, сильная эквивалентность систем .

1. Введение

В теории алгоритмов известен ряд устройств, таких, как машины Тьюринга, счётчиковые и стековые машины, коллективы автоматов в лабиринтах и др. ([3, 4]). Каждое из них представляет собой конечный автомат (или несколько автоматов) с внешней памятью. В работе [1] все эти модели обобщены при помощи понятия *автоматной системы*. В работе [2] введено понятие *вычислительной системы*.

В настоящей работе изучены взаимосвязи между автоматными системами, вычислительными системами и системами переходов.

2. Определения

Автомат – это набор $\mathcal{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, Q_f)$, где A и B – входной и выходной алфавиты, Q – мн-во состояний, $Q_f \subseteq Q$ – мн-во финальных состояний, φ и ψ – функции переходов и выходов ($\varphi : (Q \setminus Q_f) \times A \to Q$ и $\psi : (Q \setminus Q_f) \times A \to B$). Множества A, B, Q – непустые и конечные. Если задано начальное состояние $q_0 \in Q$, автомат – *инициальный*, иначе – *неинициальный*.

Обозначим множество преобразований мн-ва X, т.е. мн-во всех **частичных** функций вида $h : X \to X$, таких, что $D(h) \neq \emptyset$, как $C(X)$. Пусть даны всюду определённые функции $\beta : X \to A$ и $\gamma : B \to C(X)$. β – *функция обзора*, она позволяет автомату «видеть» элементы X. γ –

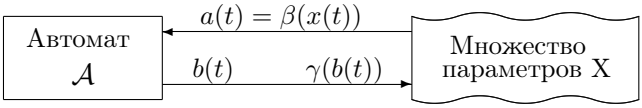
* *Волков Николай Юрьевич* — кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Механико-математического ф-та МГУ, e-mail: volkov.nikolay.y@gmail.com.

Volkov Nikolay Yurievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

преобразователь, он позволяет автомату по каждому выходному символу b сделать некоторое преобразование множества X.

Автоматной системой (далее – АС) над X называется набор $S = (X, A, B, \beta, \gamma, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – автомат, X – *мн-во параметров*, β – функция обзора, а γ – преобразователь ([1]). Состояниями АС называются состояния автомата $\mathcal{A}$. АС – *инициальная*, если $\mathcal{A}$ – инициальный.



Если АС находится в состоянии $q(t) \notin Q_f$ и преобразование $\gamma(b(t))$ определено на $x(t)$, АС меняет значение параметра с $x(t)$ на $x(t+1)$ и переходит в $q(t+1)$. Если АС находится в $q(t) \in Q_f$, она останавливается.

Функционирование АС задаётся каноническими уравнениями:

$q(1) = q_0, \quad x(1) = x_0, \qquad q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)), \quad b(t) = \psi(q(t), a(t))$

$a(t) = \beta(x(t)), \qquad x(t+1) = \gamma(b(t))(x(t)), \qquad$ где $t \in \mathbb{N},\ q \in (Q \setminus Q_f)$.

При задании $x(1) = x_0$, инициальная АС порождает поведение $(x(1), q(1)), (x(2), q(2)), \ldots$. Если преобразование $\gamma(b(t))$ не определено на $x(t)$, последовательность поведения с такта $(t+1)$ равна λ (не определена).

АС называется всюду определённой, если все её поведения корректны, т.е. не содержат λ.

Тип АС – это множество всех АС вида $S = (X, A, B, \beta, \gamma, \mathcal{A})$ при фиксированных X, A, B, β, γ и произвольном автомате $\mathcal{A}$ с алфавитами A и B. Тип АС *различает мн-во* $X_1 \subseteq X$, если из $b_1 \neq b_2$ следует, что $\exists\, x \in X_1$, такое, что $\gamma(b_1)(x) \neq \gamma(b_2)(x)$. Свойство $Im(\beta) = A$ называется *неизбыточностью*. Для каждого $a \in A$ определим $X_a = \beta^{-1}(a)$.

Парная функция над мн-вом X – это пара частичных функций (f, g), где $f : X \to (X \cup \{\lambda\})$, $g : X \to (\mathbb{N} \cup \{\lambda\})$, области определений f и g совпадают и $|Im(g)| < \infty$ ([2]). Парные ф-ции (f, g) и (f', g') – *эквивалентны* на мн-ве $M \subseteq X$ относительно биекции $\pi : g(M) \to g'(M)$ (обозначаем $(f, g) \sim_{M,\pi} (f', g')$), если $\forall\, x \in M \ \ f(x) = f'(x)$ и $\pi(g(x)) = g'(x)$ ([2]).

Вычислительной системой (далее – ВС) (обозначается V_ν) называется конечный граф ([2]) со свойствами:

1. Мн-во вершин Q занумеровано инъективной функцией $\nu : Q \to \mathbb{N}$;
2. Задано подмножество финальных вершин графа $Q_f \subseteq Q$;
3. Каждой нефинальной вершине q сопоставлена парная функция (f_q, g_q) над X, такая, что $Im(g_q) \subseteq Im(\nu)$;
4. $\forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, $\forall\, k \in Im(g_q)$ из q в вершину с номером k ведёт ребро с отметкой k. Других рёбер в графе нет.

Если выделена начальная вершина, ВС называется *инициальной*.

Системой переходов (далее – СП) над мн-вами X и Q называется $V = (X, Q, \Phi, Q_f)$, где $|Q| < \infty$, $Q_f \subseteq Q$, Φ – глобальная (частичная) функция переходов $\Phi : X \times (Q \setminus Q_f) \to X \times Q$. Если задан начальный элемент $q_0 \in Q$, система V называется *инициальной*.

Для ВС и СП их поведения определяются аналогично поведению АС.

Пусть даны неинициальные системы S и S', каждая из которых является АС, ВС или СП. Системы S и S' *сильно эквивалентны* ([1]) (обозначаем $S \approx S'$), если: $X = X'$, $Q = Q'$ и $\forall\, x_0 \in X$ и $\forall\, q_0 \in Q$, поведения S и S' при начальном значении параметра x_0 – равны. Для сильной эквивалентности инициальных систем друг другу, условие $Q = Q'$ можно заменить более слабым условием: $Q \cap Q' \neq \emptyset$. Условие $X = X'$ при этом сохраняется. Для инициальных систем $S \approx S'$, если $\forall\, x_0 \in X$ их поведения равны при старте каждой системы из своего начального состояния.

$\forall\, q \in Q$ определим мн-во $M_q = \{\ x \in X \mid \exists\, x_0 \in X$: поведение S при старте с x_0 содержит $(x, q)\}$. Состояния q, для которых $M_q \neq \emptyset$, называются *достижимыми*. Иные состояния – *недостижимые*.

3. Основные результаты

Пусть $X \neq \emptyset$. Для АС, ВС и СП над X верны следующие результаты.

Теорема 1. *(теорема о соответствии для неинициальных систем)*

1. *Для любой АС S существует единственная СП $V : V \approx S$.*
2. *Для любой ВС V_ν существует единственная СП $V : V \approx V_\nu$.*
3. *Для любых V – СП и ν – инъективн. нумерации состояний V, существует единств. ВС V_ν с нумерацией состояний $\nu : V_\nu \approx V$.*
4. *Для любой ВС V_ν существует АС S, такая, что $S \approx V_\nu$.*

Теорема 2. *(критерий сильн.эквив. неинициальных систем)*

1. *Для АС условие $S \approx S'$ выполнено тогда и только тогда, когда:*

   1.1) *Выполнены равенства $X = X'$, $Q = Q'$ и $Q_f = Q'_f$;*

   1.2) $\gamma(\psi(q, \beta(x)))(x) = \gamma'(\psi'(q, \beta'(x)))(x) \quad \forall\, x \in X, \forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$;

   1.3) $\varphi(q, \beta(x)) = \varphi'(q, \beta'(x)) \quad \forall\, x \in X, \forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, *таких, что в п. 1.2) преобразование γ в правой части равенства – определено.*

2. *Если S и S' – всюду определённые АС одного и того же типа, который неизбыточен и $\forall a \in A$ различает мн-во X_a, то из $S \approx S'$ следует $S = S'$.*

3. *Для систем переходов V и V' условие $V \approx V'$ равносильно $V = V'$.*
4. *Для ВС V_ν и $V'_{\nu'}$, условие $V_\nu \approx V'_{\nu'}$ равносильно тому, что $V'_{\nu'}$ получена из V_ν перенумерацией состояний некоей биекцией π.*

Теорема 3. *Для инициальных систем (обе АС, обе ВС, или обе – СП) $S \approx S'$ тогда и только тогда, когда:*

1. *Выполнены равенства $X = X'$ и $q_0 = q'_0$;*
2. *множества достижимых состояний систем S и S' совпадают;*
3. *множества достижимых финальн. состояний S и S' совпадают;*
4. *Если S и S' – ВС, то $\exists$ перенумерация π множества их достижимых состояний, такая, что нумерация состояний системы S' получается из нумерации состояний системы S путём преобразования π и $\forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, где q – достижимо, верно $(f_q, g_q) \sim_{M_q,\pi} (f'_q, g'_q)$.*
5. *В других случаях $\forall\, q \in (Q \setminus Q_f)$, где q – достижимо, выполнено*
   - *Если S и S' – АС, то равенство 1.2) из Т.2 верно $\forall\, x \in M_q$, а равенство 1.3) из Т.2 верно $\forall\, x \in M_q$, таких, что в п. 1.2) преобразование γ в правой части равенства – определено;*
   - *Если S и S' – системы переходов, то $\Phi(x, q) = \Phi'(x, q)\ \ \forall x \in M_q$.*

Список литературы

[1] Н. Ю. Волков, “Автоматные системы”, *Международная конференция «Математика в созвездии наук». Тезисы докладов*, 2024, стр. 310–313.

[2] М. М. Илхомов, “Парные функции и вычислительные системы”, *Международная конференция «Математика в созвездии наук»*, 2024, стр. 322–324.

[3] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985, 320 с.

[4] Джон Хопкрофт, Раджив Мотвани, Джеффри Ульман, *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*, Вильямс, Москва, 2008, 528 с.

Статья поступила 27 октября 2026 г.

Automata systems and computational systems

N. Y. Volkov

This paper considers three types of discrete dynamic systems. These are automata systems, computational systems and transition systems. The equivalence criteria have been obtained for each of these types of systems. For each considered type of systems the problem of modeling it by another kind of systems has been solved. The problem of uniqueness of such modeling has been solved also.

Keywords: Automata systems, computational systems, transition system, strong equivalence .

References

[1] N. Y. Volkov, "Automata systems", *International Conference «Mathematics in the constellation of sciences». Theses*, 2024, p. 310–313 (in Russian).

[2] M. M. Ilhomov, "Pair functions and computational systems", *International Conf. «Mathematics in the constellation of sciences»*, 2024 (in Russian).

[3] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to automata theory*, Nauka, Moscow, 1985 (in Russian), 320 pp.

[4] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman., *Introduction to automata theory, languages, and computation*, 2008 (in Russian), 528 pp.

Received on October 27, 2026

Подсчет числа точек на плоскости клеточными автоматами с локаторами

Э. Э. Гасанов*, А. Е. Бобров‡

По плоскости разбросаны точки. Надо подсчитать число точек и дать ответ в двоичном виде. Показано, что эту задачу можно решить двумерными клеточными автоматами с локаторами за время, не превышающее $2[\log_2 n] + 7$, где n — число разбросанных точек.

Ключевые слова: подсчет числа точек, клеточные автоматы с локаторами.

1. Введение

Определение клеточных автоматов с локаторами можно найти в работах [1–3]. Особенность клеточных автоматов с локаторами заключается в том, что каждый элементарный автомат (называемый ячейкой) может посылать в эфир сигналы, и у каждой ячейки имеются локаторы, направленные в разные стороны. Каждый из локаторов позволяет получать на него суммарный сигнал всех автоматов с того направления, куда направлен локатор. Соответственно новое состояние автомата и посылаемый автоматом сигнал определяются значениями локаторов и состояниями соседей автомата. Посылаемые в эфир сигналы и наличие локаторов позволяют посылать информацию на большие расстояния, что сильно увеличивает вычислительные возможности клеточных автоматов с локаторами по сравнению с клеточными автоматами.

Исследуемая в данной работе задача состоит в том, чтобы представить в виде двоичной записи число активных ячеек (точек) на целочисленной плоскости. Для решения этой задачи используется алгоритм перевода числа из унарной записи в двоичную, который впервые для клеточных автоматов с локаторами был описан в работе [4]. Этим же алгоритмом

Гасанов Эльяр Эльдарович — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

‡*Бобров Алексей Евгеньевич* — студ. магистратуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: aleksei.bobrov@math.msu.ru.

Bobrov Alexej Evgenevich — Master's student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

можно решить одномерную задачу подсчета числа точек. Для двумерного случая подсчет осуществляется в 2 этапа: сначала вычисляется индикатор нечетности числа точек на каждой горизонтали (строке), и этот индикатор проецируется на некую вертикаль, а затем считается индикатор числа точек на вертикали. Одновременно уменьшается вдвое число точек в каждой строке и на выделенной вертикали. В результате удается получить двоичное представление общего числа точек на плоскости за время, равное удвоенному логарифму числа точек плюс небольшая константа.

2. Постановка задачи и формулировка результата

Задача подсчета числа точек ставится следующим образом. Имеется двумерный клеточный автомат с локаторами. В начальной конфигурации некоторые ячейки находятся в состоянии “точка”, остальные ячейки находятся в состоянии покоя, причем число "точек"не менее 1. В конечной конфигурации появляется двоичное представление числа “точек” в начальной конфигурации, а все остальные ячейки оказываются в состоянии покоя, при этом одна из ячеек посылает в эфир сигнал “финиш”.

Теорема 1. *Существует двумерный клеточный автомат с локаторами с 4 локаторами-лучами, направленными на “север”, “юг”, “запад” и “восток”, и одним полным локатором, который решает задачу подсчета числа точек за время* $2[\log_2 n] + 7$*, где* n *— число “точек” в начальной конфигурации.*

3. Идея доказательства теоремы

Алфавит вещания будет равен $G = \{0, 1\}^2$, операцией по первой компоненте будет сложение по модулю 2, а по второй — max. Про ячейку, которая посылает в эфир сигнал $(1, 1)$, будем говорить, что она кричит. Под половиной будем понимать целую часть от деления на 2.

На первом этапе мы за 4 такта построим левые сумматоры, которые будут аккумулировать информацию о точках в строке. А именно в первый такт все “точки” кричат. Все ячейки, которые получают по второй компоненте сигнал 1 на два перпендикулярных локатора-луча, на следующий такт возбуждаются, переходя в состояние “вспомогательное”, при этом “точки” переходят в состояние “точка 2”. На втором такте появляются ячейки в состоянии “вспомогательное” и “точка 2”, они переходят в состояния “вспомогательное 2” и “точка 3” и посылают сигнал о крике на следующий такт. На третьем такте все ячейки, левее которых находятся

ячейки в состояниях “вспомогательное 2” или “точка 3”, и которые не слышат сигнал 1 по второй компоненте в локатор “запад”, переходят в состояние “левые сумматоры”. При этом ячейки в состоянии “вспомогательное 2” переходят в состояние покоя, а ячейки в состоянии “точка 3” — в состояние ‘точка 4”. Тем самым на 4 такте появятся “левые сумматоры”, а ячейки, которые в начальный момент были в состоянии ‘точка” окажутся в состоянии ‘точка 4”. Ячейку, находящуюся непосредственно под “левыми сумматорами”, переведем в состояние “результат” (это состояние появится на такте 5).

Второй этап будем разбивать на пары тактов, причем на каждой паре тактов будет вычисляться 1 бит двоичной записи числа и записываться в ячейку с состоянием “результат”, после этого “левые сумматоры” и “результат” будут сдвигаться на одну ячейку влево и начнется следующая пара тактов. Для простоты все ячейки в состоянии ‘точка 4” на втором этапе будем называть ‘точками”.

На первом такте пары все ячейки в состоянии “точка” кричат. Все “точки”, которые в локатор “восток” по первой компоненте слышат 0, переходят в состояние покоя. В результате в каждой строке число “точек” сократится вдвое. “Левые сумматоры”, которые в локатор “восток” слышат 1, на следующий такт будут кричать, сообщая, что в их строке нечетное число “точек”. Итак, на втором такте пары “левые сумматоры”, находящиеся в строках с нечетным числом “точек”, кричат. При этом кричащие “Левые сумматоры”, которые в локатор “север” слышат 0, переходят на следующий такт в состояние покоя, а которые слышат 1 — переходят в состояние “точка”. В результате за 2 такта остается половина “точек”. Ячейка “результат” слышит в локатор “север” 1, если число кричащих “левых сумматоров” нечетно, а это и есть индикатор нечетности числа “точек” в первом такте пары, т.е. это очередной бит в двоичной записи. Поэтому ячейка “результат” переходит в состояние “единица”, если слышит в локатор “север” 1, и в состояние “ноль”, если слышит 0. К следующему такту все “левые сумматоры” и “результат” сдвигаются на одну ячейку влево и начинается вычисление следующего бита в двоичной записи.

В результате, если в начальной конфигурации было n “точек”, то через $4 + 2[\log_2 n] + 2$ тактов все “точки” исчезнут, и ячейка, находящаяся в состоянии “результат”, услышит в полный локатор 0 по второй компоненте, и на следующий такт пошлет в эфир сигнал $(1, 0)$, который будем интерпретировать как сигнал окончания работы — “финиш”. При этом “левые сумматоры” и “результат” услышавшие в полный локатор 0 на следующий такт переходят в состояние покоя.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133.

[2] Калачев Г. В., "Замечания к определению клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью", *Математические вопросы кибернетики*, Вып 21, ФИЗМАТЛИТ, М, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[4] Васильев Д. И., "Поиск ближайшего соседа на прямой с помощью клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 99–119.

Статья поступила 25 октября 2026 г.

Counting the number of points on a plane using cellular automata with locators

E. E. Gasanov, A. E. Bobrov

Points are scattered across a plane. The task is to count the number of points and provide the result in binary form. It has been shown that this problem can be solved using two-dimensional cellular automata with locators, in a time not exceeding $2\lceil \log_2 n \rceil + 7$, where n is the number of scattered points.

Keywords: counting the number of points, cellular automata with locators.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (in Russian).

[2] Kalachev G. V., "Remarks on the Definition of Cellular Automaton with Locators", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 45–53.

[3] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices", *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, Issue 21, FIZMATLIT, M, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (in Russian).

[4] Vasilev D. I., "The one-dimensional closest neighbor search problem solution using the cellular automata with locators", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 27–43.

Received on October 25, 2026

Классификация однородных одномерных структур со стандартным шаблоном соседства

А. С. Гаспарян*

В работе рассматривается классификация бинарных одномерных однородных структур со стандартным шаблоном соседства. Выделяются умирающие структуры, в которых любая конечная конфигурация с течением времени переходит в пустую, строго периодические структуры, в которых любая конечная конфигурация повторяется через период, и бесконечно растущие структуры, в которых любая конечная конфигурация с течением времени заполняет всю прямую. Для каждого из трёх указанных классов найдены все однородные структуры, принадлежащие этому классу.

Ключевые слова: однородные структуры, клеточные автоматы, стандартный шаблон соседства, бесконечный рост, периодичность, умирание .

1. Определения

Будем использовать определение однородной структуры из работы [1]. Используется стандартный шаблон соседства, то есть клетка с координатой x имеет 2 соседа: левого — клетку с координатой $(x-1)$ и правого — клетку с координатой $(x+1)$. У бинарной одномерной однородной структуры ячейка может находиться в состоянии 1 (черная клетка) или 0 (белая клетка). Состояние клетки в следующий момент определяется её текущим состоянием и текущими состояниями её левого и правого соседа. Всего существует 2^3=8 комбинаций состояний трёх подряд идущих клеток, то есть 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Под сокращением ОС в дальнейшем будем понимать произвольную бинарную одномерную однородную структуру.

Правилом перехода будем называть $abc \to d$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$ — это состояния трёх подряд идущих клеток в произвольный момент времени t, а $d \in \{0, 1\}$ — это состояние в момент $t+1$, той клетки, которая в момент

Гаспарян Алина Сергеевна — студент, филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: alinagasparyan090805@gmail.com, ORCID: 0009-0003-6603-8909.

Gasparyan Alina Sergeevna — student, Lomonosov Moscow State University branch in Tashkent.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

времени t была в состоянии b. Легко видеть, что ОС однозначно задаётся восемью правилами перехода. Причём по определению ОС из работы [1] обязательно имеет место правило $000 \to 0$. Остальные 7 правил перехода могут быть заданы произвольно, таким образом, всего существует 2^7=128 ОС.

Пусть произвольная ОС задана правилами $000 \to a_1$, $001 \to a_2$, $010 \to a_3$, $011 \to a_4$, $100 \to a_5$, $101 \to a_6$, $110 \to a_7$, $111 \to a_8$, где $a_1 = 0$, а $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ произвольные элементы множества $\{0, 1\}$. ОС, задаваемая вышеуказанными правилами перехода, кодируется числом $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1$ в двоичной записи. При переводе этого числа в десятичную запись получим номер ОС.

Конфигурация K_t — это состояние ОС в момент времени t с конечным числом ненулевых ячеек. Множество всех конфигураций будем обозначать $\mathcal{K}$, а $\mathcal{K}_+$ — множество всех конфигураций, исключая тождественно нулевую конфигурацию. Пусть задана ОС и начальная конфигурация K_0, тогда K_1 однозначно определяется правилами перехода. Легко видеть, что для любого момента $t > 0$ конфигурация в момент времени K_t однозначно определена правилами перехода.

Введем обозначения:
z — номер клетки.
$K_t(z)$ — состояние клетки z в момент времени t в процессе функционирования.
T— период, T_0—предпериод.

Определение 1. ОС называется умирающей, если
$\forall K_0 \in \mathcal{K}_+ \quad \exists t_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall z \in \mathbb{Z} \ \ \forall t > t_0 \colon \ K_t(z) = 0.$

Определение 2. ОС называется строго периодической, если
$\forall K_0 \in \mathcal{K}_+ \ \ \exists T \in \mathbb{N} \ \ \exists T_0 \in \mathbb{N}_0 \ \ \forall t \geq T_0 \ \ : \ K_t = K_{t+T}.$

Определение 3. ОС называется бесконечно растущей, если
$\forall K_0 \in \mathcal{K}_+ \ \ \forall z \in \mathbb{Z} \ \ \exists t_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall t > t_0 \colon \ K_t(z) = 1.$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Множество умирающих бинарных однородных структур состоит из 12 ОС, каждая из которых*:
1) Обладает следующими четырьмя правилами перехода:
$000 \to 0$, $001 \to 0$, $010 \to 0$, $100 \to 0$.
2) Имеет два правила перехода одного из следующих трёх видов:

2.1) $011 \to 1,\ 110 \to 0$*;*
2.2) $011 \to 0,\ 110 \to 1$*;*
2.3) $011 \to 0,\ 110 \to 0$.
3) Имеет правила перехода $101 \to a,\ 111 \to b$*, где* $a, b \in \{0, 1\}$ *произвольные.*
Эти ОС имеют номера 0, 8, 32, 40, 64, 96, 128, 136, 160, 168, 192, 224.

Теорема 2. *Множество строго периодических ОС состоит из 32 ОС, каждая из которых*:
1) Обладает следующими правилами перехода:
$000 \to 0, \quad 100 \to 0, \quad 001 \to 0$.
2) Имеет правила перехода $010 \to a,\ 011 \to b,\ 110 \to c,\ 101 \to d,\ 111 \to e$*, где* $a, b, c, d, e \in \{0, 1\}$ *произвольные.*
Эти ОС имеют номера 0, 4, 8, 12, 32, 36, 40, 44, 64, 68, 72, 76, 96, 100, 104, 108,
128, 132, 136, 140, 160, 164, 168, 172, 192, 196, 200, 204, 224, 228, 232, 236.

Теорема 3. *Множество бесконечно растущих бинарных однородных структур состоит из единственной ОС. Это ОС номер 254, задаваемая правилами* $000 \to 0,\ 001 \to 1,\ 010 \to 1,\ 011 \to 1,\ 100 \to 1,\ 101 \to 1,\ 110 \to 1,\ 111 \to 1$.

Сравнение с ранее известными результатами

В работе [2] классификация включала в себя классы умирающих и периодических ОС, однако классификация давалась эмпирически и без доказательств. В работе [3] был определен класс умирающих ОС, совпадающий с результатом теоремы 1. При этом в [3] была доказана только необходимость соответствующих правил перехода. В настоящей работе установленно, что указанные условия являются не только необходимыми, но и достаточными для этого класса.

Благодарности

Автор выражает благодарность научному руководителю, старшему научному сотруднику Волкову Николаю Юрьевичу, за научное руководство, постановку задачи и внимание к работе, а также Литовскому Владиславу Андреевичу за ценные замечания по работе.

Список литературы

[1] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Теория автоматов*, 2-е, испр. и доп., Юрайт, М., 2019, 320 с.

[2] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, IL, 2002, 1197 pp.

[3] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, C. Quaranta Vogliotti, "Pattern growth in elementary cellular automata", *Theoretical Computer Science*, **145** (1995), 1–26. DOI: 10.1016/0304-3975(94)00155-C.

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Classification of homogeneous one-dimensional structures with a standard neighborhood pattern

A. S. Gasparyan

This paper considers a classification of binary one-dimensional homogeneous structures with a standard neighborhood template. Three types of structures are considered: dying, strictly periodic and infinitely growing. In dying structures every finite configuration becomes empty over time. In strictly periodic structures every finite configuration repeats itself after a period. In infinitely growing structures every finite configuration fills the whole line over time. For these three types of structures, all homogeneous structures belonging to each type have been found.

Keywords: homogeneous structures, cellular automata, a standard neighborhood template, infinite growth, strictly periodic, dying .

References

[1] V. B. Kudryavtsev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Theory of Automata*, 2nd, rev. and add., Yurayt, Moscow, 2019 (In Russian), 320 pp.

[2] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Champaign, IL, 2002, 1197 pp.

[3] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, C. Quaranta Vogliotti, "Pattern growth in elementary cellular automata", *Theoretical Computer Science*, **145** (1995), 1–26. DOI: 10.1016/0304-3975(94)00155-C.

Received on October 24, 2026

О верхних аппроксимациях в моноидах регулярных языков

С. А. Григорьев*, С. А. Афонин‡

Доказывается, что множество верхних аппроксимаций регулярного языка элементами заданного конечно порожденного моноида регулярных языков является рациональным и вычислимым подмножеством этого моноида.

Ключевые слова: Регулярные языки, аппроксимация языков, рациональная подстановка, задача представимости регулярного языка, моноиды регулярных языков.

Одной из классических задач теории формальных языков является задача представимости. Она состоит в том, чтобы по заданным множеству B регулярных языков и регулярному языку L ответить, может ли L быть выражен из B применением некоторого набора операций. В работе [1] строится множество нижних аппроксимаций L, то есть множество всех конечных конкатенаций языков из B таких, что эта конкатенация содержится в L. Настоящая работа посвящена двойственной задаче построения множества верхних аппроксимаций L, то есть конкатенаций языков из B, которые *содержат* L.

Постановка задачи Зафиксируем два конечных алфавита Σ и Δ. Обозначим за φ некоторую *рациональную подстановку* из Δ в Σ, то есть отображение $\Delta \to \mathrm{Reg}(\Sigma) \setminus \{\varnothing\}$, продолженное до гомоморфизма $\varphi : \langle \Delta^*, \cdot \rangle \to \langle \mathrm{Reg}(\Sigma), \cdot \rangle$, где $\cdot$ обозначает операцию конкатенации.

Будем обозначать пустое слово как ε. Определим:

$$\Delta_0 := \{\delta \in \Delta \mid \varepsilon \in \varphi(\delta)\}, \quad \Delta_1 := \Delta \setminus \Delta_0.$$

Длину слова v будем обозначать $|v|$. Через $\min(L)$ будем обозначать длину самого короткого слова в языке $L \neq \varnothing$. Когда слово v является (разреженным) подсловом w, будем писать $v \sqsubseteq w$.

*Григорьев Степан Александрович — Аспирант МГУ им. Ломоносова, e-mail: stpngrgr@gmail.com, ORCID: 0009-0002-1607-9166.

Grigorev Stepan Aleksandrovich — PhD student, Moscow State University.

‡Афонин Сергей Александрович — Ведущий научный сотрудник лаборатории автоматизации экспериментальных исследований НИИ механики МГУ им. Ломоносова, e-mail: serg@msu.ru, ORCID: 0000-0003-3058-9269.

Afonin Sergey Aleksandrovich — leading researcher, Moscow State University, Institute of Mechanics, Experimental research automation Laboratory.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Образ $\varphi(\Delta^*)$ является конечно порожденным подмоноидом моноида регулярных языков $\langle \mathrm{Reg}(\Sigma), \cdot \rangle$. Элемент E этого подмоноида будем называть *верхней аппроксимацией* $L \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, если $L \subseteq E$. Обозначим через $\overline{M}_\varphi(L)$ множество прообразов всех верхних аппроксимаций L в $\varphi(\Delta^*)$. Формально:

$$\overline{M}_\varphi(L) := \{u \in \Delta^* \mid \varphi(u) \supseteq L\}.$$

Отметим, что $\overline{M}_\varphi(L)$ отличается от объекта, строящегося в [1], направлением знака $\subseteq$.

Предметом данной работы является изучение свойств $\overline{M}_\varphi(L)$. Основным ее результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Для любого регулярного языка L и рациональной подстановки φ язык $\overline{M}_\varphi(L)$ регулярен и существует алгоритм его построения.*

Регулярность Пусть $w := w_1 \dots w_n$, $w_i \in \Delta$. Тогда определим Δ_0–*расширение* w как

$$\mathrm{Ext}(w, \Delta_0) := \Delta_0^* w_1 \Delta_0^* w_2 \Delta_0^* w_3 \dots w_n \Delta_0^*.$$

Поскольку при «накачке» слова $w \in \Delta^*$ буквами из Δ_0, образ относительно φ может только расшириться, можно заключить, что всякое w входит в $\overline{M}_\varphi(L)$ вместе со своим расширением. Отсюда

$$\overline{M}_\varphi(L) = \bigcup_{w \in \overline{M}_\varphi(L)} \mathrm{Ext}(w, \Delta_0).$$

Определим $\sqsubseteq_0$ так: $v \sqsubseteq_0 w \Leftrightarrow w \in \mathrm{Ext}(v, \Delta_0)$. Очевидно $v \sqsubseteq_0 w \Rightarrow \mathrm{Ext}(v, \Delta_0) \supseteq \mathrm{Ext}(w, \Delta_0)$. Пусть $v \in \Delta_1^*$, а $C(v, L)$ – множество минимальных относительно $\sqsubseteq_0$ элементов $V(v) := \mathrm{Ext}(v, \Delta_0) \cap \overline{M}_\varphi(L)$. Поскольку на $V(v)$ отношения $\sqsubseteq$ и $\sqsubseteq_0$ совпадают, из леммы Хигмана [3] следует конечность $C(v, L)$. Заметим, что множество

$$S(L) := \{v \in \Delta_1^* \mid \exists w \in \overline{M}_\varphi(L) : v \sqsubseteq_0 w\}$$

также будет конечным, поскольку для любого $w \in \overline{M}_\varphi(L)$ должно быть верно: $\min(\varphi(w)) \leqslant \min(L)$, а при $v \in \Delta_1^*$ верно, что $\min(\varphi(v)) \geqslant |v|$. Обозначим за $C(L) := \bigcup_{v \in S(L)} C(v, L)$. Тогда из определений $C(v, L)$ и $S(L)$

$$\bigcup_{w \in C(L)} \mathrm{Ext}(w, \Delta_0) \subseteq \overline{M}_\varphi(L) \subseteq \bigcup_{w \in C(L)} \mathrm{Ext}(w, \Delta_0),$$

а сам $\bigcup_{w \in C(L)} \mathrm{Ext}(w, \Delta_0)$ регулярен как конечное объединение регулярных языков.

Алгоритм построения Выше показано, что $\forall v \in S(L)\ |v| \leqslant \min(L)$. Обозначим $\overline{S}(L) := \{v \in \Delta_1^* \mid |v| \leqslant \min(L)\}$. Чтобы построить $\overline{M}_\varphi(L)$ необходимо уметь находить все минимальные относительно $\sqsubseteq_0$ элементы $\bigcup\limits_{v \in \overline{S}(L)} \mathrm{Ext}(v, \Delta_0)$, образ которых содержит L.

Автоматом с расстояниями называется набор $\mathfrak{A} := \langle Q, \Sigma, I, F, \tau, d\rangle$, где $\langle Q, \Sigma, I, F, \tau\rangle$ задают ε-недетерминированный автомат, а функцию $d : Q \times \Sigma \times Q \to \{0, 1, \infty\}$ называют функцией расстояния. Эта функция присваивает вес каждому переходу автомата. Вес пути π в автомате $\mathfrak{A}$ определяется как сумма весов всех переходов, составляющих π. Вес слова $d(w), w \in \Sigma^*$ определяется как минимум из весов допускающих путей для слова w. Автомат $\mathfrak{A}$ *ограничен* если $\exists N \in \mathbb{N} : \forall w\ d(w) \leqslant N$. В [2] доказано, что задача проверки ограниченности $\mathfrak{A}$ алгоритмически разрешима.

Мы можем показать, что для заданного регулярного Δ–языка $X \in \mathrm{Reg}(\Delta)$ можно построить автомат с расстояниями $\mathfrak{A}(X)$ над Σ, который принимает язык $\bigcup\limits_{w \in X} \varphi(w)$, а функция расстояния задана таким образом, что вес слова u равен длине самого короткого слова из X, образ которого содержит u:

$$d(u) = \min\left\{|v| \mid (v \in X) \wedge (u \in \varphi(v))\right\}.$$

Для этого в автомате, распознающем X, заменим каждый переход по букве δ на автомат, распознающий $\varphi(\delta)$, а функцию расстояния положим равной 1 только на переходах «входящих в новую копию $\varphi(\delta)$».

Тогда при $X = \mathrm{Ext}(w, \Delta_0)$ для некоторого $w \in \Delta^*$, можем рассмотреть пересечение автомата $\mathfrak{A}(X)$ с автоматом, распознающим L. Если язык, распознаваемый полученным автоматом, не совпадает с L, или этот автомат не ограничен, то для любого слова u из $\mathrm{Ext}(w, \Delta_0)$ верно $L \not\subseteq \varphi(u)$. Обратно: если полученный автомат распознает L и ограничен, то $\exists u \in \mathrm{Ext}(w, \Delta_0) : L \subseteq \varphi(u)$.

Пусть $v \in \Delta_1^*$. Построим множество $C(v, L)$ минимальных относительно $\sqsubseteq_0$ слов из $\mathrm{Ext}(v, \Delta_0) \cap \overline{M}_\varphi(L)$. Будем последовательно перебирать $w \in \mathrm{Ext}(v, \Delta_0) \setminus E$, где E изначально равно $\varnothing$, в порядке роста длин и проверять описанное выше условие. Если $\forall u \in \mathrm{Ext}(w, \Delta_0) \setminus E\ \ L \not\subseteq \varphi(u)$, то весь $\mathrm{Ext}(w, \Delta_0)$ можно удалить из дальнейшего рассмотрения, то есть добавить его к E. А если $L \subseteq \varphi(w)$, то $w \in C(v, L)$. Тогда такой w можно добавить в результат, а множество $\mathrm{Ext}(w, \Delta_0)$ также удалить из рассмотрения.

Поскольку таких минимальных слов конечное число, алгоритм остановится. Тогда применив этот алгоритм ко всем словам v из Δ_1^* длины не больше $\min(L)$ и объединив полученные результаты, мы построим

искомое множество S:

$$\overline{M}_\varphi(L) = \bigcup_{w \in S} \mathrm{Ext}(w, \Delta_0).$$

Список литературы

[1] Calvanese, Diego et al., "Rewriting of regular expressions and regular path queries", *Proc. 18th PODS symposium*, 1999. DOI: 10.1145/303976.303996, 194–204.

[2] Hashiguchi, Kosaburo, "Limitedness theorem on finite automata with distance functions", *Journal of computer and system sciences*, **24**:2 (1982), 233–244.

[3] Higman, Graham, "Ordering by divisibility in abstract algebras", *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 3rd ser.:1 (1952), 326–336.

Статья поступила 9 октября 2026 г.

On upper approximations in monoids of regular languages

S. A. Grigorev, S. A. Afonin

We prove that the set of upper approximations of a regular language by elements of a given finitely generated monoid of regular languages is a rational effectively constructible set.

Keywords: Regular languages, approximation of languages, rational substitution, representability problem for regular languages, monoids of regular languages.

References

[1] Calvanese, Diego et al., "Rewriting of regular expressions and regular path queries", *Proc. 18th PODS symposium*, 1999. DOI: 10.1145/303976.303996, 194–204.

[2] Hashiguchi, Kosaburo, "Limitedness theorem on finite automata with distance functions", *Journal of computer and system sciences*, **24**:2 (1982), 233–244.

[3] Higman, Graham, "Ordering by divisibility in abstract algebras", *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 3rd ser.:1 (1952), 326–336.

Received on October 9, 2026

О сложности задачи существования предельных циклов заданной длины

А. Дробышев*, Г. Боков‡

В работе исследуется вычислительная сложность задачи существования предельных циклов фиксированной длины k в булевых сетях с параллельной схемой обновления, локальные функции которых ограничены классами из решётки Поста. Для любого фиксированного $k \geqslant 2$ получена полная классификация сложности рассматриваемой задачи. Доказано, что задача является NP-полной для замкнутых классов, содержащих хотя бы один из классов D_2, F_2^∞, F_6^∞. Во всех остальных случаях задача полиномиально разрешима.

Ключевые слова: булевы сети, предельные циклы, решётка Поста, вычислительная сложность, классификация, NP-полнота.

1. Введение

Булевы сети представляют собой дискретные динамические системы, поведение элементов которых определяется булевыми функциями. Одной из первых моделей подобных систем была модель нейронной активности У. Маккаллока и В. Питтса [2]. Сеть из n элементов имеет 2^n конфигураций, поэтому её траектории со временем становятся периодическими, а полный перебор конфигураций требует экспоненциального времени.

В работе [3] доказана NP-полнота задачи существования предельного цикла фиксированной длины для общих булевых сетей. Для задачи существования неподвижной точки классификация сложности при ограничениях на локальные функции получена в [4]. В работе [1] получена частичная классификация сложности задачи существования предельных

Дробышев Александр — Лаборант лаборатории математических проблем искусственного интеллекта, механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru, ORCID: 0009-0002-8881-8730.

Drobyshev Alexander — Laboratory Assistant, Laboratory of Mathematical Problems of Artificial Intelligence, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡*Боков Григорий* — Заведующий лабораторией математических проблем искусственного интеллекта, механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: grigoriy.bokov@math.msu.ru, ORCID: 0000-0001-5715-0067.

Bokov Grigoriy — Head of the Laboratory of Mathematical Problems of Artificial Intelligence, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

циклов заданной длины. В настоящей работе построены полиномиальные алгоритмы для классов P_6 и S_6, что завершает классификацию для любого фиксированного $k \geqslant 2$.

2. Основные понятия

Обозначим через $E_2 = \{0, 1\}$ множество булевых значений, а через $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — булевы функции, где $f_i : E_2^n \to E_2, i \in [n]$.

Определение 1. Булевой сетью будем называть систему булевых функций $f_1, \ldots, f_n$, определяемую отображением $f : E_2^n \to E_2^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

В дальнейшем будем рассматривать булевы сети с *параллельной схемой обновления*, при которой значения всех вершин изменяются одновременно в каждый дискретный момент времени.

Определение 2. Пространством конфигураций булевой сети f называется множество E_2^n.

Набор $x^{(t)} = (x_1^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)}) \in E_2^n$ назовём конфигурацией сети в момент $t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, где $x_i^{(t)}$ — значение вершины i в этот момент.

При параллельной схеме обновления конфигурации в соседние моменты времени связаны равенством $x^{(t+1)} = f(x^{(t)})$.

Последовательность конфигураций $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ называется траекторией сети, начинающейся в конфигурации $x^{(0)}$.

Определение 3. Конфигурация $x \in E_2^n$ принадлежит предельному циклу длины k, если $f^k(x) = x$ и для любого $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$ выполняется $f^\ell(x) \neq x$.

Соответствующая последовательность $x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x)$ образует предельный цикл длины k.

Обозначим через $\Phi_k(f)$ множество всех конфигураций, принадлежащих предельным циклам длины k:

$$\Phi_k(f) = \{x \in E_2^n \mid f^k(x) = x,\ \forall \ell \in \{1, \ldots, k-1\} \colon f^\ell(x) \neq x\}. \qquad (1)$$

Таким образом, булева сеть f имеет предельный цикл длины k тогда и только тогда, когда $\Phi_k(f) \neq \varnothing$.

3. Постановка задачи

Определение 4. Множество булевых функций называется замкнутым классом, если содержит все функции-проекции и замкнуто относительно операции суперпозиции. Через $[F]$ обозначим наименьший замкнутый класс, содержащий F. Если $[F] = C$, то F — базис класса C.

Для фиксированных $k \geqslant 2$ и конечного базиса F рассмотрим задачу k-**PLCE**(F): по булевой сети $f = (f_1, \ldots, f_n)$ с параллельной схемой обновления, в которой каждая функция $f_i \in [F]$ задана схемой из функциональных элементов в базисе F, определить, выполняется ли $\Phi_k(f) \neq \varnothing$. Для замкнутого класса $C = [F]$ будем также писать k-PLCE(C); выбор конечного базиса не влияет на полиномиальную разрешимость и NP-полноту задачи.

4. Основные результаты

Исследуем вычислительную сложность задачи k-PLCE(C) для замкнутых классов C из решётки Поста [5]. Рассмотрим следующие классы:

$$D_2 = [\{xy \vee xz \vee yz\}], \quad F_6^\infty = [\{x(y \vee z)\}], \quad F_2^\infty = [\{x \vee yz\}],$$
$$L_1 = [\{1, x \oplus y\}], \qquad P_6 = [\{0, 1, xy\}], \qquad S_6 = [\{0, 1, x \vee y\}].$$

Теорема 1. *Пусть C — произвольный замкнутый класс булевых функций с конечным базисом. Тогда для любого фиксированного $k \geqslant 2$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Если выполнено хотя бы одно из включений $D_2 \subseteq C, F_6^\infty \subseteq C, F_2^\infty \subseteq C$, то задача k-PLCE(C) является NP-полной.*
2. *Если ни одно из указанных включений не выполнено, то C содержится хотя бы в одном из классов L_1, P_6, S_6, и задача k-PLCE(C) разрешима за полиномиальное время.*

Таким образом, получена полная классификация вычислительной сложности задачи существования предельного цикла фиксированной длины $k \geqslant 2$ для булевых сетей с параллельной схемой обновления. Из теоремы следует, что ограничение на локальные функции булевой сети может приводить как к полиномиальной разрешимости задачи, так и к сохранению её NP-полноты.

Список литературы

[1] А. С. Дробышев, “О вычислительной сложности задачи существования предельных циклов в булевых сетях с ограничениями из решётки Поста”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:2 (2026), 28–54.

[2] W. S. McCulloch, W. Pitts, “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity”, *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

[3] F. Bridoux, C. Gaze-Maillot, K. Perrot, S. Sené, "Complexity of Limit-Cycle Problems in Boolean Networks", *SOFSEM 2021: Theory and Practice of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, **12607**, Springer, 2021, 135–146.

[4] S. Kosub, "Dichotomy Results for Fixed-Point Existence Problems for Boolean Dynamical Systems", *Mathematics in Computer Science*, **1**:3 (2008), 487–505.

[5] С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, В. Б. Кудрявцев, *Функции алгебры логики и классы Поста*, Наука, Москва, 1966.

Статья поступила 26 октября 2026 г.

On the Complexity of the Limit-Cycle Existence Problem for a Prescribed Length

A. Drobyshev, G. Bokov

We study the computational complexity of the limit-cycle existence problem for a fixed length k in Boolean networks with the parallel update scheme and local functions restricted to classes of Post's lattice. For every fixed $k \geqslant 2$, a complete complexity classification is obtained. The problem is shown to be NP-complete for every closed class containing at least one of the classes D_2, F_2^∞, or F_6^∞. For all remaining closed classes, the problem is polynomial-time solvable.

Keywords: Boolean networks, limit cycles, Post's lattice, computational complexity, classification, NP-completeness.

References

[1] A. S. Drobyshev, "O vychislitel'noi slozhnosti zadachi sushchestvovaniya predel'nykh tsiklov v bulevykh setyakh s ogranicheniyami iz reshetki Posta", *Intellektual'nye sistemy. Teoriya i prilozheniya*, **30**:2 (2026), 28–54.

[2] W. S. McCulloch, W. Pitts, "A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity", *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

[3] F. Bridoux, C. Gaze-Maillot, K. Perrot, S. Sené, "Complexity of Limit-Cycle Problems in Boolean Networks", *SOFSEM 2021: Theory and Practice of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, **12607**, Springer, 2021, 135–146.

[4] S. Kosub, "Dichotomy Results for Fixed-Point Existence Problems for Boolean Dynamical Systems", *Mathematics in Computer Science*, **1**:3 (2008), 487–505.

[5] S. V. Yablonsky, G. P. Gavrilov, V. B. Kudryavtsev, *Funktsii algebry logiki i klassy Posta*, Nauka, Moscow, 1966.

Received on October 26, 2026

Нахождение середины отрезка с помощью одномерного идемпотентного автомата с локаторами

Д. Э. Ибрагимова*

В данной статье рассматривается применение одномерного клеточного автомата с локаторами, у которого полугруппа, заданная на алфавите вещания, является идемпотентным моноидом, к задаче нахождения середины отрезка.

Ключевые слова: идемпотентные клеточные автоматы с локаторами, верхняя и нижняя оценки, нахождение середины отрезка.

1. Постановка задачи и формулировка результата

В работе Гасанова Э. Э. [2] было введено понятие клеточного автомата с локаторами (КАсЛ), которое отличается от понятия обычного клеточного автомата тем, что допускает передачу информации не только между соседними клетками, но и на любое расстояние посредством передачи сигналов из алфавита вещания в эфир. Сформулируем задачу нахождения середины отрезка длиной $N \in \mathbb{N}$. Пусть на $\mathbb{Z}$ задано начальное состояние $I_0(0, N) = (g_0, f_0)$ клеточного автомата, удовлетворяющее следующим условиям:

1. ячейке с координатой 0 присвоено состояние B, то есть $f_0(0) = B$;
2. ячейке с координатой N присвоено состояние E, то есть $f_0(N) = E$ $(N \geq 2)$;
3. остальным ячейкам присвоено состояние q_0, являющееся состоянием покоя;
4. все ячейки не посылают в эфир сигналы, то есть для любой ячейки $a \in \mathbb{Z}$ выполнено $g_0(a) = e$.

Решением задачи нахождения середины отрезка длиной N, соответствующей начальному состоянию $I_0(0, N)$, назовём состояние $I_F(0, N) = (g_F, f_F)$ автомата, удовлетворяющее следующим условиям:

* *Ибрагимова Дильноза Эльдаровна* — старший преподаватель, филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: ibragimova70@mail.ru.

Ibragimova Dilnoza Eldarovna — Senior Lecturer, Lomonosov Moscow State University Branch in Tashkent.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

1. ячейка с координатой 0 находится в состоянии B_F;
2. ячейка с координатой N находится в состоянии E_F;
3. ячейка с координатой $\lfloor N/2 \rfloor$ находится в состоянии M;
4. остальные ячейки находятся в состоянии покоя q_0;
5. все ячейки не посылают в эфир сигналы, то есть для любой ячейки $a \in \mathbb{Z}$ выполнено $g_F(a) = e$.

Скажем, что КАсЛ σ решает задачу нахождения середины отрезка длиной N, если для любого натурального числа N из начального состояния $I_0(0, N)$, соответствующего задаче, он переходит в финальное состояние $I_F(0, N)$.

2. Описание алгоритма

Дадим неформальное описание одномерного идемпотентного КАсЛ, который будет решать задачу нахождения середины отрезка длиной N.

Ячейку с координатой 0 назовём началом отрезка, и она в начальный момент будет находиться в состоянии B. Ячейку с целой координатой $N \geq 2$ назовём концом отрезка, и она в начальный момент будет находиться в состоянии E. Остальные ячейки в начальный момент находятся в состоянии покоя q_0. В состоянии покоя ячейки не посылают никаких сигналов.

Алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, L, R, B, E, B_F, E_F, M, M_0\}$, q_0 — состояние покоя, алфавит вещания $G = \{0, 1, 2\}$, полугрупповая операция — максимум. $e = (0)$ — нейтральный элемент полугруппы G, шаблон локаторов стандартный $\mathcal{L} = \{\nu_{-1}, \nu_1\}$.

На первом такте ячейки B и E переходят в состояния B_F и E_F соответственно и посылают сигнал (1). Ячейка q_0, левым соседом которой является ячейка B, а правым соседом - q_0, переходит в состояние L. Ячейка q_0, правым соседом которой является ячейка E, а левым соседом - q_0, переходит в состояние R. Ячейка q_0, левым соседом которой является ячейка B, а правым соседом - E, переходит в состояние M_0.

На втором такте ячейки q_0, которые услышали сигнал (1) на оба локатора, то есть и справа, и слева, переходят в состояние q_1.

На последующих тактах ячейки q_1, у которых левым соседом является ячейка L, а правым соседом является ячейка q_1, переходят в состояние L. Те ячейки q_1, у которых правым соседом является ячейка R, а левым соседом является ячейка q_1, переходят в состояние R.

В какой-то момент останется либо только одна ячейка в состоянии q_1, либо ни одной. Ячейка q_1, левым соседом которой является ячейка L,

а правым соседом — R, переходит в состояние M_0. Если же не осталось ни одной ячейки в состоянии q_1, то ячейка L, у которой левым соседом является ячейка L или ячейка B_F, а правым соседом является ячейка R, переходит в состояние M_0. Ячейка M_0 посылает сигнал (2). На следующем такте ячейки L и R, услышав сигнал (2), переходят в состояние q_0, а ячейка M_0 переходит в состояние M. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $T(N)$ — время, за которое любой клеточный автомат с локаторами решает задачу нахождения середины отрезка длины N. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Существует одномерный идемпотентный клеточный автомат с локаторами σ, такой, что он решает задачу нахождения середины отрезка длины N и для любого натурального числа N выполнено $T(N) \leq \lfloor (N+1)/2 \rfloor + 2$. И любой одномерный идемпотентный клеточный автомат с локаторами, решающий задачу нахождения середины отрезка длины N, работает не менее чем за $\lfloor N/2 \rfloor$ тактов. Здесь $\lfloor N/2 \rfloor$ — целая часть от деления N на 2.*

Доказательство. Если длина отрезка N, то число ячеек равно $S = N+1$. Искомая середина — ячейка с координатой $\lfloor N/2 \rfloor$. В описанном выше алгоритме первый такт используется для начальной рассылки сигнала и перехода концов в состояния B_F и E_F. Также на первом такте ячейки, прилегающие к концам отрезка B и E, переходят в состояния L и R соответственно. Обозначим через $k = \lfloor S/2 \rfloor$ целую часть половины числа ячеек, будем считать, что $S > 3$ (для случая $N = 2$ задача решается за 2 такта). После второго такта получаем конфигурацию

$$B_F, L, \underbrace{q_1, \ldots, q_1}_{N-3}, R, E_F.$$

Далее фронты L и R движутся навстречу друг другу: крайняя левая ячейка в состоянии q_1 переходит в L, а крайняя правая — в R. Все остальные ячейки q_1 остаются в этом состоянии. После каждого такого такта длина участка из ячеек q_1 уменьшается на две.

Случай 1: $S = 2k+1$. После k-го такта единственная оставшаяся ячейка q_1 имеет координату k. Её левый сосед находится в состоянии L, а правый — в состоянии R. На следующем такте эта ячейка переходит в состояние M_0. Таким образом, середина найдена за $k+1$ тактов.

Случай 2: $S = 2k$. После k-го такта ячеек q_1 уже не остаётся. Состояния L и R непосредственно соседствуют, причём левая из двух центральных ячеек находится в состоянии L, её левый сосед находится в состоянии L или B_F, а правый сосед — в состоянии R. На следующем такте эта

левая центральная ячейка переходит в состояние M_0 и посылает сигнал (2).

Итак, в обоих случаях середина найдена за $k+1$ тактов. На следующем такте сигнал (2) слышат ячейки в состояниях L и R и переходят в q_0; ячейка M_0 переходит в состоянии M; ячейки вне отрезка остаются в состоянии q_0. Следовательно, на этом такте получается требуемая финальная конфигурация. Получаем требуемую верхнюю оценку $T(N) \leq \lfloor (N+1)/2 \rfloor + 2$. Доказательство нижней оценки является естественным следствием леммы 1 о накачке, приведенной в статье Гасанова Э. Э. [1]. □

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "О слабости одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 151–169.

[2] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133 .

Статья поступила 5 ноября 2026 г.

Finding the Midpoint of a Line Segment Using a One-Dimensional Idempotent Cellular Automaton with Locators

D. E. Ibragimova

This paper considers the application of a one-dimensional cellular automaton with locators, whose broadcast alphabet is equipped with an idempotent monoid structure, to the problem of finding the midpoint of a line segment.

Keywords: idempotent cellular automata with locators, upper and lower bounds, midpoint finding.

References

[1] E. E. Gasanov, "On the Weakness of One-Dimensional Idempotent Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 151–169 (in Russian).

[2] E. E. Gasanov, "Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (in Russian).

Received on November 5, 2026

О вычислительных возможностях одномерных клеточных автоматов с локаторами

Г. В. Калачев*

В работе исследуются вычислительные возможности одномерных клеточных автоматов с локаторами (КАсЛ). Вводится определение вычисления функции при помощи КАсЛ и показывается, что в рамках данного определения класс задач, решаемых КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с PSPACE. Нетривиальной частью этого результата является одномерный клеточный автомат с локаторами, решающий за полиномиальное время задачу проверки истинности булевых формул с кванторами.

Ключевые слова: клеточные автоматы с локаторами, вычислительная сложность, полиномиальное время, PSPACE.

1. Введение

Понятие клеточного автомата с локаторами (КАсЛ) можно найти в работе [1] с поправками в работе [2]. В этой модели, помимо обычного локального взаимодействия между соседними ячейками, имеется эфир: ячейки могут посылать в него сигналы, а затем получать суммарный сигнал из заданных направлений. Тем самым в модель клеточного автомата добавляется нелокальный механизм передачи информации.

Естественный вопрос состоит в том, насколько наличие локаторов усиливает вычислительные возможности одномерных клеточных автоматов. В данной работе показано, что существует одномерный клеточный автомат с локаторами, который за полиномиальное время решает задачу проверки истинности булевых формул с кванторами, которая является PSPACE-полной. С учетом того, что полиномиальное число тактов КАсЛ относительно размера начальной конфигурации моделируется с полиномиальной памятью, из этого следует, что класс задач, решаемых одномерными КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с PSPACE.

Калачев Глеб Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Формулировка результата

Рассмотрим КАсЛ σ с множеством состояний Q и алфавитом вещания G, $\perp \in Q$ — состояние покоя, $e \in G$ — нейтральный элемент. Для слова $s \in Q^*$ через $\mathrm{FState}\,(s)$ обозначим состояние, в котором слово s записано начиная с нулевой клетки вправо, а остальные клетки находятся в состоянии покоя $\perp$, и при этом состояние эфира равно e в любой клетке.

Пусть есть некоторые конечные алфавиты A, B и частичная функция $f : A^* \to B^*$ с областью определения $\mathcal{D}(f)$. Скажем, что КАсЛ σ с множеством состояний $Q_\sigma \supset \{S_\sigma, F_\sigma\}$ вычисляет функцию f, если существуют вложения

$$\iota_S : A \to Q_\sigma \setminus \{S_\sigma, F_\sigma\}, \qquad \iota_F : B \to Q_\sigma \setminus \{S_\sigma, F_\sigma\}$$

такие, что для любого $\alpha \in \mathcal{D}(f)$ при некотором $t \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\Phi^t(\mathrm{FState}\,(S_\sigma\, \iota_S(\alpha))) = (\mathrm{FState}\,(F_\sigma\, \iota_F(f(\alpha)))),$$

причём S_σ встречается только в начальный момент, а F_σ — только в момент времени t. Скажем, что σ распознаёт язык $L \subseteq A^*$, если он вычисляет характеристическую функцию $\chi_L : A^* \to \{0, 1\}$, $\chi_L(\alpha) = 1 \iff \alpha \in L$.

Пусть дана формула

$$\mathcal{F} = Q_n x_n \dots Q_1 x_1\, BF(x_1, \dots, x_n),$$

где $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, а BF — булева формула в 3-КНФ. Множество таких формул обозначим $\mathtt{QCNF}$. КНФ BF можно задать кодом $\mathcal{C}_B(BF)$ над алфавитом $\{\neg, \wedge, \vee, 0, 1\}$: в 3-КНФ скобки опущены, а вместо переменных стоят их номера в двоичной записи. Булеву формулу $\mathcal{F}$ с кванторами можно задать в алфавите $\Sigma_{QB} := \{\exists, \forall, \neg, \wedge, \vee, 0, 1\}$ кодом $\mathcal{C}_{QB}(\mathcal{F}) := Q_n \dots Q_1 \mathcal{C}_B(BF)$.

Обозначим

$$\mathrm{Init}(\mathcal{F}) := \mathrm{FState}\,(S\, \mathcal{C}_{QB}(\mathcal{F}))\,,$$

$$\mathrm{Final}(\mathcal{F}) := \begin{cases} \mathrm{FState}\,(F\,\mathrm{Y})\,, & \text{если } \mathcal{F} \text{ истинна,} \\ \mathrm{FState}\,(F\,\mathrm{N})\,, & \text{если } \mathcal{F} \text{ ложна.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Существуют полином p и одномерный клеточный автомат с локаторами $\sigma = (\mathbb{Z}, Q, V_1, G, +, L, \phi, \psi)$, $Q \supset \Sigma_{QB} \cup \{\perp, S, F, \mathrm{Y}, \mathrm{N}\}$, такие, что для любой формулы $\mathcal{F} \in \mathtt{QCNF}$ существует такое $t \le p(|\mathcal{F}|)$, что*

$$\Phi^t(\mathrm{Init}(\mathcal{F})) = \mathrm{Final}(\mathcal{F}),$$

причём состояние F встречается только в момент t, а состояние S — только в начальный момент.

Теорема 2. *Класс языков, распознаваемых одномерными КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с* PSPACE.

Опишем идею работы алгоритма в теореме 1. Истинность формулы мы будем вычислять непосредственно по определению. Таким образом, нам требуется вычислить булеву формулу BF на всех 2^n наборах значений переменных, а затем собрать результат по кванторам $Q_1, \ldots, Q_n$. Для того, чтобы вычислять значения параллельно, нам необходимо создать копии конфигураций, кодирующих формулу BF (она одна и та же во всех копиях), а также у каждой копии свой двоичный номер, по которому можно восстановить значения переменных и вычислить значение формулы. Эта часть достаточно стандартная: 2^t копий создаётся за время $O(t)$+размер конфигурации с использованием полугруппы $\{0,1\}^2$ с операцией $(\oplus, \max)$. Параллельный запуск вычисления во всех копиях также является стандартным. Самая нетривиальная часть алгоритма — сбор результатов по альтернирующим кванторам. Поскольку автомат у нас одномерный, то все сигналы в эфире, передаваемые разными копиями, будут суммироваться и в общем случае не будут независимыми. При этом на каждом шаге нам требуется вычислять много независимых конъюнкций или дизъюнкций от разных пар копий. Основная идея здесь — использовать групповую операцию $\oplus$, и для каждой пары делать 2 идентичные копии, которые будут функционировать идентично и отправлять в эфир одно и то же, тогда сигналы этих копий взаимно уничтожатся и не будут засорять эфир вне отрезка с этими копиями. Это позволит внутри каждой пары использовать эфир независимо от других пар, объединяемых на данном шаге. Поскольку для n кванторов выполняются n операций объединения, то помимо 2^n наборов получается ещё 2^n дублирований, и таким образом изначально суммарно нам потребуется 4^n копий вместо обычных 2^n. Таким образом, алгоритм существенно использует $O(4^n \cdot (n + |BF|))$ ячеек памяти и работает за время, полиномиальное от длины входа $(n + |BF|)$. По сути, время равно $O(n)$+(время вычисления BF на фиксированном входе машиной Тьюринга). При этом следует отметить, что в некоторые моменты при создании копий активно бесконечное число ячеек памяти, состояния которых образуют периодическую последовательность.

Отметим, что здесь в двух местах существенно используются неидемпотентные операции. Можно показать, что экспоненциальное раздувание начальной конфигурации в таких КАсЛ невозможно, и выполнено следующее утверждение.

Утверждение 1. *Класс языков, распознаваемых одномерными* идемпотентными *КАсЛ за полиномиальное время, совпадает с* P.

Таким образом, как и в [3], здесь проявляются существенные ограничения вычислительных возможностей одномерных идемпотентных КАсЛ.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 119–132.

[2] Г. В. Калачев, "Замечания к определению клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, "О слабости одномерных идемпотентных клеточных автоматов с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 151–169.

Статья поступила 30 октября 2026 г.

On the Computational Capabilities of One-Dimensional Cellular Automata with Locators

G. V. Kalachev

We study the computational power of one-dimensional cellular automata with locators. We formalize function computation in this model and prove that the languages recognizable in polynomial time are exactly those in PSPACE. The key step is the construction of a one-dimensional cellular automaton with locators that solves the quantified Boolean formula problem in polynomial time.

Keywords: cellular automata with locators, computational complexity, polynomial time, PSPACE.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 15–26.

[2] G. V. Kalachev, "Remarks on the definition of cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:5 (2021), 45–53.

[3] E. E. Gasanov, "On the Weakness of One-Dimensional Idempotent Cellular Automata with Locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 151–169.

Received on October 30, 2026

О длине теста переходов конечного автомата

А. А. Куницын*

Рассматриваются замкнутые тесты переходов полного конечного детерминированного инициального автомата. Приведены известная точная общая оценка и семейство автоматов, на котором она достигается. Сформулирован критерий равенства минимальной длины теста числу переходов. Показано, что это равенство выполняется для сильно связных групповых автоматов и линейных автоматов над конечным полем.

Ключевые слова: конечный автомат, тест переходов, линейный автомат, эйлеров цикл.

1. Постановка задачи и общая оценка

Пусть $\mathcal{A} = (Q, X, \delta)$ — полный детерминированный конечный автомат, $N = |Q|$, $k = |X|$. Его граф переходов состоит из дуг вида $q \xrightarrow{x} \delta(q, x)$ для каждой пары $(q, x) \in Q \times X$. Петли и параллельные дуги учитываются с кратностями; всего дуг kN. Автомат называем *сильно связным*, если его граф переходов сильно связен. *Замкнутым тестом переходов* назовём входное слово, которое проходит все дуги и возвращает автомат в фиксированное начальное состояние. *Длина теста* равна числу пройденных дуг с учётом повторений.

Обозначим через $\ell(\mathcal{A})$ минимальную длину замкнутого теста переходов. При сильной связности эта величина не зависит от выбора начального состояния: начало замкнутого обхода можно циклически сдвинуть.

Известна следующая точная общая оценка.

Теорема 1 (Визинг–Гольдберг, [1])**.** *Для сильно связного полного автомата*

$$\ell(\mathcal{A}) \le kN + (k-1)\binom{N}{2}. \tag{1}$$

При любых $N, k \ge 1$ эта оценка достигается.

* *Куницын Александр Александрович* — аспирант кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, e-mail: sashakunitsyn2000@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9994-9894.

Kunitsyn Aleksandr Aleksandrovich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Функция переходов в экстремальном семействе автоматов с множеством состояний $Q = \{0, \ldots, N-1\}$ и входным алфавитом $X = \{0, \ldots, k-1\}$ задана следующим образом:

$$\delta(i, x) = \begin{cases} i + 1 \pmod N, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

На рис. 1 показано семейство, на котором достигается оценка (1).

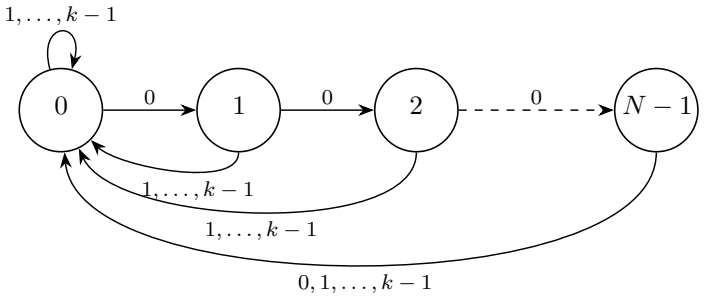


Рис. 1: Экстремальное семейство автоматов. Дуга с несколькими метками обозначает параллельные переходы; пунктир — пропущенную часть цикла.

2. Эйлеровы графы переходов

Ориентированный мультиграф называется *сбалансированным*, если входящая и исходящая степени каждой вершины совпадают.

Теорема 2. *Для полного сильно связного автомата равенство* $\ell(\mathcal{A}) = kN$ *выполняется тогда и только тогда, когда его граф переходов сбалансирован.*

Доказательство. Любой тест должен пройти все kN дуг, поэтому $\ell(\mathcal{A}) \geq kN$. Если граф сбалансирован, то по классическому критерию эйлеровости в силу сильной связности он имеет эйлеров цикл. Его метки образуют замкнутый тест длины kN. Обратно, замкнутый тест длины kN проходит каждую дугу ровно один раз. В таком обходе число входов в каждую вершину равно числу выходов из неё, поэтому граф сбалансирован. □

Автомат называется *групповым*, если для каждого входного символа $x \in X$ отображение $q \mapsto \delta(q, x)$ является перестановкой множества состояний Q.

Следствие 1. *Если полный групповой автомат сильно связен, то* $\ell(\mathcal{A}) = kN$.

Доказательство. Для каждого состояния q' и каждого символа x существует ровно одно состояние q, для которого $\delta(q, x) = q'$. Поэтому входящая степень каждой вершины равна k, как и исходящая. Граф сбалансирован, и применима теорема 2. □

3. Линейный автомат

Рассмотрим стандартную линейную модель [2] над конечным полем $\mathbb{F}_r$ из r элементов. Множество состояний равно $Q = \mathbb{F}_r^n$, входной алфавит — $X = \mathbb{F}_r^m$, а функция переходов имеет вид

$$\delta(q, x) = Aq + Bx, \qquad A \in \mathbb{F}_r^{n\times n}, \quad B \in \mathbb{F}_r^{n\times m}. \tag{2}$$

Здесь $N = |Q| = r^n$ и $k = |X| = r^m$.

Напомним необходимые факты линейной алгебры. Для линейного отображения $T : E \to F$ конечномерных пространств над $\mathbb{F}_r$ его ядро и образ определяются равенствами $\operatorname{Ker} T = \{z \in E : Tz = 0\}$ и $\operatorname{Im} T = \{Tz : z \in E\}$. Теорема о ранге и дефекте даёт равенство

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T. \tag{3}$$

Если $y \in \operatorname{Im} T$ и $Tz_0 = y$, то

$$T^{-1}(y) = z_0 + \operatorname{Ker} T, \qquad |T^{-1}(y)| = r^{\dim \operatorname{Ker} T}. \tag{4}$$

Действительно, равенство $Tz = Tz_0$ равносильно условию $z - z_0 \in \operatorname{Ker} T$. Следовательно, все непустые прообразы имеют одинаковую мощность.

Теорема 3. *Для сильно связного линейного автомата* (2) $\ell(\mathcal{A}) = kN = r^{n+m}$.

Доказательство. Функция переходов является линейным отображением $\delta : Q \oplus X \longrightarrow Q$, $\delta(q, x) = Aq + Bx$. Из сильной связности следует, что для каждого состояния $q' \in Q$ найдётся входящая в него дуга. Поэтому для каждого $q' \in Q$ существуют $q \in Q$ и $x \in X$, для которых выполняется равенство $\delta(q, x) = Aq + Bx = q'$. Следовательно, $\operatorname{Im} \delta = Q$. По теореме о ранге и дефекте (3)

$$\dim \operatorname{Ker} \delta = \dim(Q \oplus X) - \dim \operatorname{Im} \delta = (n + m) - n = m.$$

Число входящих в q' дуг равно числу пар (q, x), для которых $\delta(q, x) = q'$, то есть мощности прообраза $\delta^{-1}(q')$. В силу (4) этот прообраз является смежным классом по ядру $\operatorname{Ker}\delta$ и потому содержит столько же элементов, сколько само ядро:

$$|\delta^{-1}(q')| = |\operatorname{Ker}\delta| = r^{\dim \operatorname{Ker}\delta} = r^m = k.$$

Исходящая степень каждой вершины также равна k, так как $\delta(q, x)$ определена для каждого $x \in X$.

Итак, входящая и исходящая степени каждой вершины совпадают, то есть граф сбалансирован. По теореме 2 получаем $\ell(\mathcal{A}) = kN = r^{n+m}$. □

Список литературы

[1] В. Г. Визинг, М. К. Гольдберг, “О длине обхода сильно связного графа”, Англ. пер.: Cybernetics, 5:1–2 (1972), 95–98. DOI: 10.1007/BF01070669, *Кибернетика*, **5**:1 (1969), 79–82.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits: Analysis, Synthesis, and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1966 .

Статья поступила 5 октября 2026 г.

On the length of a transition tour of a finite automaton

A. A. Kunitsyn

We consider closed transition tours of a complete finite deterministic automaton with a fixed initial state. We state a known sharp general bound and describe a family of automata attaining it. We give a criterion for the minimum tour length to equal the number of transitions and show that this equality holds for strongly connected permutation automata and linear automata over a finite field.

Keywords: finite automaton, transition tour, linear automaton, Eulerian circuit.

References

[1] V. G. Vizing, M. K. Gol’dberg, “The length of a circuit in a strongly connected graph”, English translation: Cybernetics, 5:1–2 (1972), 95–98 (In Russian). DOI: 10.1007/BF01070669, *Kibernetika*, **5**:1 (1969), 79–82.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits: Analysis, Synthesis, and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Received on October 5, 2026

Вычисление числовых функций некоторыми видами автоматов

В. А. Литовский*

В работе исследуются счётнозначные функции, вычисляемые классическими автоматами и автоматами с остановками. Рассмотрены свойства кодировок, преобразующих числа во входные последовательности автомата и обратно. Найдены классы функций, вычислимых указанными видами автоматов в этих кодировках.

Ключевые слова: вычислимость, автомат.

За $\mathbb{N}_0$ обозначим множество натуральных чисел с нулём, за $\mathbb{N}_\lambda$ обозначи $\mathbb{N}_0 \cup \{\lambda\}$, где под λ подразумевается специальный символ, означающий, что отображение в данной точке неопределено.

1. Определения

Конечным автоматом называется упорядоченная пятёрка (A, B, Q, φ, ψ), где

- A, B и Q — непустые конечные алфавиты, называемые соответственно входным, выходным и внутренним алфавитами (Q также часто называется множеством состояний, а его символы — состояниями);
- $\varphi\colon Q \times A \to Q$ и $\psi\colon Q \times A \to B$ — функции, называемые соответственно функциями переходов и выходов.

Для конечного автомата определяются отображения $\overline{\varphi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}$,$\overline{\psi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}$ следующим образом: $\overline{\varphi}(q_1, a) = q, \overline{\psi}(q_1, a) = b$, где $q\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to Q$ и $b\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to B$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} q(0) = q_1 \\ b(t) = \psi(q(t), a(t)) \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a(t)) \end{cases}$$

Литовский Владислав Андреевич — аспирант кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: vlad-litov@mail.ru.

Litovskiy Vladislav Andreevich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Инициальным конечным автоматом называется упорядоченная пара $(\mathcal{V}, q_1)$, где $\mathcal{V}$ — конечный автомат, а $q_1 \in Q$ — одно из его состояний, называемое начальным состоянием. Для инициального автомата определяем унарные отображения $\overline{\varphi}\colon A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}, \overline{\psi}\colon A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}$ как $\overline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(q_1, a), \overline{\psi}(a) = \overline{\psi}(q_1, a)$.

Конечным автоматом с остановками называется упорядоченная шестёрка $(Q, A, B, \varphi, \psi, \psi')$, где

- A, B и Q — непустые конечные алфавиты, называемые соответственно *входным*, *выходным* и *внутренним алфавитами* (Q также часто называется *множеством состояний*, а его символы — *состояниями*);
- $\varphi\colon Q \times A \to Q$, $\psi\colon Q \times A \to B$ и $\psi'\colon Q \times A \to \{0, 1\}$ — функции, называемые соответственно *функциями переходов*, *выходов* и *скорости*[1].

Для такого автомата определим отображения $\overline{\varphi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}, \overline{\psi}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}, \overline{\psi'}\colon Q \times A^{\leq\omega} \to \{0, 1\}^{\leq\omega}$ следующим образом: $\overline{\varphi}(q_1, a) = q, \overline{\psi}(q_1, a) = b, \overline{\psi'}(q_1, a) = b'$, где $q\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to Q$, $b\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to B$, $x\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, а также $a'\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to A$ и $b'\colon \subseteq \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ q(0) = q_1 \\ a'(t) = a(x(t)) \\ b'(t) = \psi'(q(t), a'(t)) \\ b(t) = \psi(q(t), a'(t)) \\ x(t+1) = x(t) + b'(t) \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a'(t)) \end{cases}$$

Инициальным конечным автоматом с остановками называется упорядоченная пара $(\mathcal{V}, q_1)$, где $\mathcal{V}$ — конечный автомат Мили с остановками, а $q_1 \in Q$ — одно из его состояний, называемое *начальным состоянием*. Для инициального автомата с остановками определяем унарные отображения $\overline{\varphi}\colon A^{\leq\omega} \to Q^{\leq\omega}, \overline{\psi}\colon A^{\leq\omega} \to B^{\leq\omega}, \overline{\psi'}\colon A^{\leq\omega} \to \{0, 1\}^{\leq\omega}$, как $\overline{\varphi}(a) = \overline{\varphi}(q_1, a), \overline{\psi}(a) = \overline{\psi}(q_1, a), \overline{\psi'}(a) = \overline{\psi'}(q_1, a)$. Параметр канонических уравнений q_1 для инициального автомата полагаем равным его начальному состоянию. Вновь для удобства последовательности из канонических уравнений для входной последовательности a будем обозначать как x, q, a', b', b, а для $\widehat{a}$ как $\widehat{x}, \widehat{q}, \widehat{a}', \widehat{b}', \widehat{b}$.

Назовём *входной кодировкой* отображение $g\colon X \to A^\omega$, *выходной кодировкой* отображение $h\colon B^\omega \to Y$. Будем говорить, что *инициальный автомат вычисляет функцию* $f\colon X \to Y$ *во входной кодировке* g *и выходной кодировке* h, если для всех $x \in X$

$$f(x) = h(\overline{\psi}(g(x))).$$

Далее мы ограничимся случаем $X = \mathbb{N}_0$, $Y = \mathbb{N}_\lambda$, $A = B = \{0,1\}$, а входную кодировку $E^{-1}\colon \mathbb{N}_0 \to \{0,1\}^\omega$ определим так:

$$E^{-1}(n) = 1^{n+1}0^\omega.$$

Определим выходную кодировку $E\colon \{0,1\}^\omega \to \mathbb{N}_\lambda$ следующим образом:

$$E(\alpha) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } 1^{n+1}0^\omega \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}_0, \\ \lambda, & \text{если } \alpha \text{ не имеет вида } 1^{n+1}0^\omega \text{ ни для какого } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Кодировка D определяется следующим образом: $D\colon \{0,1\}^\omega \to \mathbb{N}_\lambda$:

$$D(\alpha) = \begin{cases} n, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } 0^m1^{n+1}0^\omega \text{ для некоторых } m, n \in \mathbb{N}_0, \\ \lambda, & \text{если } \alpha \text{ не имеет вида } 0^m1^{n+1}0^\omega \text{ ни для каких } m, n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Кодировка C определяется следующим образом: $C\colon \{0,1\}^\omega \to \mathbb{N}_\lambda$,

$$C(\alpha) = |\alpha|_1 - 1$$
$$C(0^\omega) = C(1^\omega) = \lambda$$

Множество функций $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$, периодических с предпериодом как последовательности, обозначим за $\mathscr{A}_0$. Введём также важный класс $\mathscr{P}_\varepsilon$. Будем рассматривать функции $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$, удовлетворяющие следующему условию:

Существует такое число $m \in \mathbb{N}_0$, *что для всех* $n \leq m$ *выполнено* $f(n) \geq n$ *или* $f(n) = \lambda$, *а для всех* $n > m$ *выполнено* $f(n) = m$ *или* $f(n) = \lambda$.

Класс всех функций, удовлетворяющих такому условию, будем обозначать за $\mathscr{P}_\varepsilon$. Класс $\mathscr{A}_\varepsilon$ определим как $\mathscr{P}_\varepsilon \cap \mathscr{A}_0$.

Назовём функцию $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$ периодической с постоянным смещением $N \in \mathbb{N}_{\not\vdash}$, периодом $T \in \mathbb{N}$ и предпериодом $T \in \mathbb{N}_0$, если

$$\forall n \geq T\colon f(n+T) = f(n) + T$$

За $\mathscr{A}_1$ обозначим класс всех функций $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$, являющихся периодическими с постоянным смещением. За $\mathscr{A}_1^{T \leq N}$ обозначим подкласс $\mathscr{A}_1$

функций таких, что для них существует пара «длина периода — постоянное смещение» T, N такая, что $T \leq N$; за $\mathscr{A}_1^{T=N}$ обозначим подкласс $\mathscr{A}_1$ функций таких, что для них существует пара T, N такая, что $T = N$; за $\mathscr{A}_1^{T\geq N}$ обозначим подкласс $\mathscr{A}_1$ функций таких, что для них существует пара T, N такая, что $T \geq N$.

Определим класс $\mathscr{P}_U$ как класс функций $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_\lambda$ таких, что для любого n либо $f(n) \geq n$, либо $f(n) = \lambda$. Определим классы $\mathscr{A}_{1,U}$, $\mathscr{A}_{1,U}^{T\leq N}$, $\mathscr{A}_{1,U}^{T=N}$ и $\mathscr{A}_{1,U}^{T=N=1}$ как:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{1,U} &= \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{P}_U,\\ \mathscr{A}_{1,U}^{T\leq N} &= \mathscr{A}_1^{T\leq N} \cap \mathscr{P}_U,\\ \mathscr{A}_{1,U}^{T=N} &= \mathscr{A}_1^{T=N} \cap \mathscr{P}_U\end{aligned}$$

2. Результаты

Теорема 1.

1. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом в E-кодировке, есть* $\mathscr{A}_\varepsilon \cup \mathscr{A}_{1,U}^{T=N}$;
2. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом в D-кодировке, есть* $\mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1^{T=N}$;
3. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом в C-кодировке, есть* $\mathscr{A}_1^{T\geq N}$.

Теорема 2.

1. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом с остановками в E-кодировке, есть* $\mathscr{A}_\varepsilon \cup \mathscr{A}_{1,U}^{T\leq N}$;
2. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом с остановками в D-кодировке, есть* $\mathscr{A}_0 \cup \mathscr{A}_1^{T\leq N}$;
3. *Множество функций, вычислимых конечным автоматом с остановками в C-кодировке, есть* $\mathscr{A}_1$.

Список литературы

[1] M. O. Rabin, “Two-Way Finite Automata”, *Proceedings of the Summer Institute of Symbolic Logic* (Cornell, 1957), 1957, 366–369 .

Статья поступила 25 октября 2026 г.

Computing Numerical Functions by Certain Types of Automata

V. A. Litovskiy

This paper investigates countably-valued functions computed by classical automata and automata with stops. The properties of encodings that convert numbers into automaton input sequences and vice versa are examined. We identify the classes of functions computable by the specified types of automata under these encodings.

Keywords: computability, automaton.

References

[1] M. O. Rabin, "Two-Way Finite Automata", *Proceedings of the Summer Institute of Symbolic Logic* (Cornell, 1957), 1957, 366–369.

Received on October 25, 2026

Проблема полноты в классе линейных дефинитных автоматов

И. В. Молдованов*

В работе исследуются задачи полноты в классе линейных дефинитных автоматов над полем из двух элементов. Для аппроксимационной полноты и полноты относительно суперпозиции описаны приведенные критериальные системы замкнутых классов. На их основе также устанавливается алгоритмическая разрешимость проверки обоих видов полноты конечных систем.

Ключевые слова: линейные дефинитные автоматы, аппроксимационная полнота, суперпозиция.

В теории функциональных систем задача полноты состоит в описании множеств функций, из которых с помощью заданных операций можно получить все функции рассматриваемого класса.

Полнота линейных автоматов относительно композиции исследовалась в работах А. А. Часовских [1]. Для линейных автоматов над конечными полями была построена критериальная система относительно оператора K-замыкания и установлена алгоритмическая разрешимость проверки K-полноты конечных систем. Для линейных автоматов над двухэлементным полем была построена критериальная система относительно операций суперпозиции и доказано отсутствие конечных S-полных систем [2]. В классе двоичных дефинитных автоматов Д. Н. Жук установил неразрешимые случаи распознавания полноты относительно S-замыкания и A-замыкания [3].

В данной работе исследуется полнота систем линейных дефинитных автоматов над двухэлементным полем E_2. Двоичные последовательности отождествляются с формальными рядами из $R_2 = E_2[[\xi]]$, а автомат с n входами и одним выходом – с отображением $R_2^n \to R_2$. Через $S(M)$ обозначим замыкание множества автоматов M относительно операций суперпозиции, таких как переименование, отождествление входных переменных и подстановка.

* *Молдованов Илья Владимирович* — выпускник аспирантуры каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: jamfr-d@mail.ru, ORCID: 0009-0004-0595-3350.

Moldovanov Ilia Vladimirovich — graduate of the postgraduate program at the Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Класс линейных дефинитных автоматов определяется равенством

$$LD_2 = S(\{x_1 + x_2,\ \xi x,\ \xi x + 1\}).$$

Здесь 1 обозначает ряд, соответствующий последовательности 10^∞. Рассматриваемый класс LD_2 является подмножеством пересечения классов линейных и дефинитных автоматов. Система $M \subseteq LD_2$ называется S-полной, если $S(M) = LD_2$.

Далее отождествляем автоматы, различающиеся наличием фиктивных входов. Канонический представитель данного автомата получаем удалением всех фиктивных входов, а результат применения операций суперпозиций также рассматриваем с точностью до данного соглашения. Канонические представители автоматов класса LD_2 имеют в точности вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\xi) x_i + u_0(\xi), \qquad u_0, \ldots, u_n \in E_2[\xi],$$

где $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — число существенных входов и $u_i \neq 0$ при $1 \leq i \leq n$, а при $n = 0$ имеем $f() = u_0(\xi)$ [4].

Для $M \subseteq LD_2$ через $A(M)$ обозначим множество всех автоматов $f \in LD_2$, для которых при каждом $t \in \mathbb{N}$ найдется автомат $g \in S(M)$, совпадающий с f на первых t тактах при любых входных последовательностях. Система M называется A-полной, если $A(M) = LD_2$.

Для автомата f в указанной канонической форме обозначим через $a_{1,i}$ коэффициент при ξ в многочлене $u_i(\xi)$. Определим пять классов

$$T_0^A = \{f \in LD_2 : u_0(0) = 0\}, \quad T_1^A = \{f \in LD_2 : \textstyle\sum_{i=1}^n u_i(0) + u_0(0) = 1\},$$
$$V_1^A = \left\{f \in LD_2 : \left|\{i \in \{1, \ldots, n\} : u_i(0) \neq 0\}\right| \leq 1\right\},$$
$$V_2^A = \left\{f \in LD_2 : \sum\nolimits_{i=1}^n u_i(0) = 1\right\},$$
$$U_A = \{f \in LD_2 : a_{1,i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)\}.$$

Положим $H_A = \{T_0^A, T_1^A, V_1^A, V_2^A, U_A\}$, все эти классы являются A-замкнутыми.

Теорема 1 ([4]). *Для любого множества $M \subseteq LD_2$ выполнено $A(M) = LD_2 \iff M \nsubseteq \Theta$ для всех $\Theta \in H_A$.*

Система H_A является приведенной: для любых различных $\Theta_1, \Theta_2 \in H_A$ имеем $\Theta_1 \nsubseteq \Theta_2$. Также система H_A конечна, поэтому для конечной системы $M \subseteq LD_2$, заданной каноническими формами ее автоматов, проверка A-полноты алгоритмически разрешима.

Для описания критериальной системы относительно S-полноты введем следующие обозначения. Пусть $p_1 = \xi, p_2 = \xi + 1, p_3, \ldots$ – все неприводимые многочлены из $E_2[\xi]$, $n_j = \deg p_j$, $P_j = E_2[\xi]/(p_j)$ – конечное поле из 2^{n_j} элементов, а $[u]_q$ – класс вычетов многочлена u по модулю q. Через $P_j^1, \ldots, P_j^{l_j}$ обозначим все максимальные собственные подполя P_j. Определим также классы многочленов

$$L_{j,s}^{(1)} = \{u \in E_2[\xi] : [u]_{p_j} \in P_j^s\},$$
$$N_j^{(1)} = \left\{u \in E_2[\xi] : \ \exists v \in E_2[\xi],\ \deg(v) < \deg(p_j),\ u \equiv v^2 \pmod{p_j^2}\right\},$$
$$I_{j,j',\sigma}^{(1)} = \{u \in E_2[\xi] : \sigma([u]_{p_j}) = [u]_{p_{j'}}\}.$$

Здесь $j \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le l_j$, а для $I_{j,j',\sigma}^{(1)}$ имеем $j > j'$, $n_j = n_{j'}$ и $\sigma : P_j \to P_{j'}$ пробегает все изоморфизмы полей.

Положим $C(f) = \{u_i \mid 1 \le i \le n\}$ и определим классы автоматов [5] $L_{j,s} = \{f \in LD_2 : C(f) \subseteq L_{j,s}^{(1)}\}$, $N_j = \{f \in LD_2 : C(f) \subseteq N_j^{(1)}\}$, $I_{j,j',\sigma} = \{f \in LD_2 : C(f) \subseteq I_{j,j',\sigma}^{(1)}\}$.

Положим $D_j(f) = \{i \in \{1, \ldots, n\} : u_i \not\vdots p_j\}$. Для $j \in \mathbb{N}$ и конечного $J \subseteq \mathbb{N}$, $|J| \ge 2$, введем

$$V_j = \{f \in LD_2 : |D_j(f)| \le 1\},$$
$$P_J = \left\{f \in LD_2 : \begin{array}{c}(\exists j_0 \in J :\ D_{j_0}(f) = \varnothing) \text{ или} \\ (\exists r \in \{1, \ldots, n\}\ \forall j \in J :\ D_j(f) \subseteq \{r\})\end{array}\right\},$$
$$\bar{P} = \{f \in LD_2 : n \le 1 \text{ или } \exists j \in \mathbb{N}\ \left(D_j(f) = \varnothing\right)\}.$$

Пусть $r_{j,1}, \ldots, r_{j,2^{n_j}}$ – все элементы поля P_j, $r_{j,1} = 0$. Для $j \in \mathbb{N}$ и $1 \le s \le 2^{n_j}$ положим

$$U_j = \left\{f \in LD_2 : \left[\sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i\right]_{p_j} = 1\right\},$$
$$S_{j,s} = \left\{f \in LD_2 : r_{j,s}\left[\sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i\right]_{p_j} + [u_0]_{p_j} = r_{j,s}\right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ систему всех перечисленных классов $L_{j,s}, N_j, I_{j,j',\sigma}, V_j$, $P_J, \bar{P}, U_j, S_{j,s}$ с указанными диапазонами индексов. Все классы системы $\mathcal{H}$ собственные и замкнуты относительно суперпозиции.

Теорема 2 ([6]). *Для любого множества $M \subseteq LD_2$ выполнено $S(M) = LD_2 \iff M \not\subseteq \Theta$ для всех $\Theta \in \mathcal{H}$.*

Система $\mathcal{H}$ является приведенной: для любых различных $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{H}$ имеем $\Theta_1 \not\subseteq \Theta_2$.

Теорема 3. *Для конечной системы $M \subseteq LD_2$, заданной каноническими формами ее автоматов, проверка равенства $S(M) = LD_2$ алгоритмически разрешима.*

Список литературы

[1] А. А. Часовских, "Приведенные критериальные системы предполных классов в классах линейных автоматов над конечными полями", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:4 (2018), 115–134.

[2] А. А. Часовских, "Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиции", *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, 2013, № 8, 3–13.

[3] Д. Н. Жук, "О неразрешимости проблемы полноты для дефинитных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **12**:1–4 (2008), 211–228.

[4] И. В. Молдованов, "Аппроксимационная полнота линейных дефинитных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:4 (2025), 135–149.

[5] И. В. Молдованов, "Алгоритмическая разрешимость задачи полноты конечных содержащих константу ноль множеств в классе линейных дефинитных автоматов", *Чебышевский сборник*, **26**:5(101) (2025), 137–157.

[6] И. В. Молдованов, "Проблема полноты линейных дефинитных автоматов", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:2 (2026), 120–141.

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

The completeness problem in the class of linear definite automata

I. V. Moldovanov

This work studies completeness problems in the class of linear definite automata over the two-element field. Reduced criterial systems of closed classes are described for approximation completeness and completeness under superposition. These criteria are also used to establish the algorithmic decidability of both completeness problems for finite systems.

Keywords: linear definite automata, approximation completeness, superposition.

References

[1] A. A. Chasovskikh, "Reduced criterial systems of precomplete classes in classes of linear automata over finite fields", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **22**:4 (2018), 115–134.

[2] A. A. Chasovskikh, “Linear automata functions with superposition operations”, *Neurocomputers: development, application*, 2013, № 8, 3–13.

[3] D. N. Zhuk, “On the unsolvability of the completeness problem for definite automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **12**:1–4 (2008), 211–228.

[4] I. V. Moldovanov, “Approximation completeness of linear definite automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **29**:4 (2025), 135–149.

[5] I. V. Moldovanov, “Algorithmic decidability of the completeness problem for finite sets containing the zero constant in the class of definite linear automata”, *Chebyshevskii Sbornik*, **26**:5(101) (2025), 137–157.

[6] I. V. Moldovanov, “The completeness problem for linear definite automata”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:2 (2026), 120–141.

Received on November 8, 2026

Сложение n различных натуральных чисел клеточными автоматами с локаторами

Ч. Надиров*

Требуется сложить n различных натуральных чисел, заданных координатами активных клеток. Показано, что эту задачу можно решить двумерным клеточным автоматом с локаторами за $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ тактов независимо от величин слагаемых.

Ключевые слова: клеточные автоматы, локаторы, сложение.

1. Введение

Клеточные автоматы с локаторами позволяют передавать сигналы между клетками, находящимися на произвольном расстоянии друг от друга. Каждая клетка получает суммарные сигналы с заданных направлений и использует их при выборе следующего состояния. Определение этой модели и её свойства изложены в работах [1–3]. Возможности модели при решении задач, связанных с обработкой точек на плоскости, рассматриваются в работе [4], посвящённой подсчёту числа точек.

В настоящей работе рассматривается задача сложения различных натуральных чисел, представленных координатами активных клеток на положительной полуоси. Результат также задаётся координатой активной клетки. Для решения задачи используется двумерный клеточный автомат с локаторами, время работы которого зависит только от числа слагаемых и не зависит от их величин.

Идея алгоритма состоит в параллельном сложении соседних пар слагаемых. Сумма каждой пары строится с помощью вспомогательных клеток на плоскости за постоянное число тактов. После одной итерации число слагаемых уменьшается примерно вдвое; если оно нечётно, непарное слагаемое сохраняется до следующей итерации. Повторение этой процедуры позволяет получить сумму всех входных чисел за $O(\log n)$ тактов, где n — число слагаемых.

* *Надиров Чингиз* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: chingiz.nadirov@math.msu.ru, ORCID: 0009-0008-6361-417X.

Nadirov Chingiz — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть $0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n \geq 1$. Изначально активны начало координат в состоянии O и клетки $(x_i, 0)$ в состоянии 1; остальные покоятся. Требуется оставить только O и результат в точке $(\sum_i x_i, 0)$.

Теорема. *Существует двумерный клеточный автомат с девятью локаторами, который решает задачу сложения n различных натуральных чисел, заданных координатами активных клеток на положительной полуоси, за время не более $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ тактов.*

3. Алгоритм сложения

Пусть $0 < a_1 < \cdots < a_m$ — текущие слагаемые. Складываем пары $(a_{m-1}, a_m), (a_{m-3}, a_{m-2}), \ldots$; при нечётном m сохраняем a_1. Переходы не используют состояния соседних клеток. Используем алфавит $G = \{0,1\} \times \{0,1,2,3,4,5,6\} \times \{0,1\}$, со сложением по модулю 2 в первой компоненте и максимумом в остальных; $e = (0,0,0)$. Первая компонента определяет чётность числа слагаемых, третья — их наличие, вторая различает вспомогательные сигналы. Ниже s_ν — значение локатора текущей клетки, $*$ — любое значение компоненты; q_0 — состояние покоя. Буквами N, NE, E, SE, S, SW, W, NW обозначены направления лучей-локаторов: север, северо-восток, восток, юго-восток, юг, юго-запад, запад и северо-запад соответственно. Полный локатор обозначается через Ω. Начало координат сохраняет состояние O и сигнал $(0,1,0)$.

На рис. 1 чёрные точки активны, светлые активируются на следующем такте; пунктир обозначает существенные направления сигналов.

1. Разметка. Слагаемые передают $(1,0,1)$. Левый и правый элементы пары получают метки «н», «ч»; непарный элемент — c_1. В случае, когда осталось единственное слагаемое, переводим его в состояние R.

Переход	Условие
$1 \to$ н	$s_E = (1,0,1)$
$1 \to$ ч	$s_W = (*,1,1),\ s_E = (0,0,*)$
$1 \to \mathrm{c}_1$	$s_W = (0,1,0),\ s_E = (0,0,1)$
$1 \to R$	$s_W = (0,1,0),\ s_E = (0,0,0)$

Сигналы состояний «н», «ч» равны $(0,2,0)$, $(0,3,0)$ соответственно; состояния ожидания и R передают e.

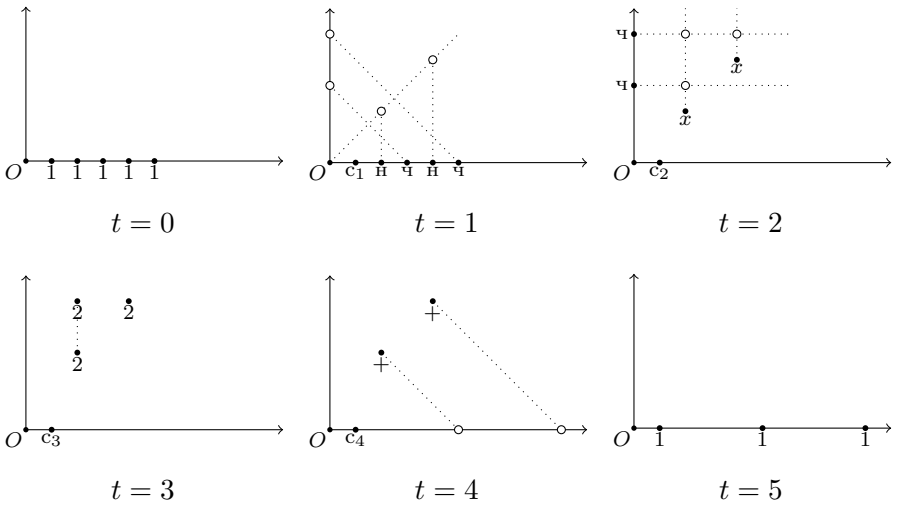


Рис. 1: Одна итерация сложения 5 натуральных чисел

2. Вспомогательные точки. Для правого элемента b создаём активные ячейки в точках $(0, b)$, для левого a — (a, a):

Переход	Условие
$q_0 \to$ ч	$s_S = (0,1,0),\ s_{SE} = (0,3,0)$
$q_0 \to x$	$s_S = (0,2,0),\ s_{SW} = (0,1,0).$

Эти точки передают $(0,3,0)$ и $(0,4,0)$. Прежние «н», «ч» переходят в q_0.

3. Кандидаты. Пересечения лучей от $(0, b)$ на восток и от (a, a) на север дают точки (a, b), $b > a$: $q_0 \to 2$ при $s_W = (0,3,0),\ s_S = (0,4,0)$. Кандидаты передают $(0,5,0)$; прежние точки «ч» и «x» переходят в q_0.

4. Выбор пары. В каждом столбце оставляем нижнего кандидата, соответствующего ближайшему правому слагаемому:

$$2 \to + \text{ при } s_S = e, \qquad 2 \to q_0 \text{ при } s_S = (0,5,0).$$

Выбранная клетка передаёт $(0,6,0)$.

5. Сумма. Диагональ $x + y = a + b$ из выбранной точки пересекает ось в $(a + b, 0)$: $q_0 \to 1$ при $s_W = (0,1,0),\ s_{NW} = (0,6,0)$. Новое слагаемое передаёт $(1,0,1)$, а $+ \to q_0$. Непарный элемент восстанавливается по цепочке $\mathrm{c}_1 \to \mathrm{c}_2 \to \mathrm{c}_3 \to \mathrm{c}_4 \to 1$; промежуточные состояния передают e.

После k итераций остаётся $\lceil n/2^k \rceil$ слагаемых. Каждая итерация занимает пять тактов, поэтому через $5\lceil \log_2 n \rceil$ тактов остаётся единственное слагаемое $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Следующий такт переводит его в состояние R. Та-

ким образом, время работы равно $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и не зависит от величин входных чисел.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 120–133.

[2] Калачев Г. В., "Замечания к определению клеточного автомата с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:4 (2020), 47–56.

[3] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью", *Математические вопросы кибернетики, Вып. 21*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2023, 5–51, DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[4] Э. Э. Гасанов, А. Е. Бобров, "Подсчет числа точек на плоскости клеточными автоматами с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:4 (2026).

Статья поступила 2 ноября 2026 г.

Addition of n distinct natural numbers using cellular automata with locators

C. Nadirov

The task is to add n distinct positive integers represented by the coordinates of active cells. It is shown that a two-dimensional cellular automaton with locators solves this problem in $5\lceil \log_2 n \rceil + 1$ steps, independently of the values of the summands.

Keywords: cellular automata, locators, addition.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators", *Intelligent Systems: Theory and Applications*, **24**:2 (2020), 120–133 (In Russian).

[2] G. V. Kalachev, "Remarks on the definition of cellular automaton with locators", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **24**:4 (2020), 47–56 (In Russian).

[3] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices", *Matematicheskie voprosy kibernetiki, Issue 21*, FIZMATLIT, M., 2023, 5–51 (In Russian), DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[4] E. E. Gasanov, A. E. Bobrov, "Counting the number of points on a plane using cellular automata with locators", *Intelligent systems. Theory and applications*, **30**:4 (2026) (In Russian).

Received on November 2, 2026

Nondeterministic state complexity of square root

S. Onishchenko*

We investigate the nondeterministic state complexity of the square-root operation $\sqrt{L} = \{ w \mid ww \in L \}$ on regular languages represented by nondeterministic finite automata. For an n-state NFA accepting L, it was previously known that $\sqrt{L}$ can be accepted by an NFA with at most n^3 states, while the best lower bound, was only $(n-1)(n-2)(n-3)$. We are going to close this gap completely and prove that n^3 states are sufficient and necessary in the worst case.

Keywords: state complexity, language operations, nondeterministic finite automata.

1. Preliminaries

Let Σ be a finite alphabet. We write Σ^* for the free monoid generated by Σ, and ε for the empty word.

A *nondeterministic finite automaton* (NFA) is a quintuple $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$, where Q is a finite set of states, Σ is the input alphabet, $Q_0 \subset Q$ is the set of initial states, $F \subseteq Q$ is the set of accepting states, and $\delta\colon Q \times \Sigma \to 2^Q$ is the transition function.

The transition function is extended in the standard way to a mapping $\delta\colon Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ by setting $\delta(q, \varepsilon) = \{q\}$ for every $q \in Q$, and $\delta(q, wa) = \bigcup_{p \in \delta(q,w)} \delta(p, a)$ for every $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$, and $a \in \Sigma$.

The language recognized by A is

$$L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q_0 \in Q_0\colon \delta(q_0, w) \cap F \neq \varnothing \}.$$

We shall use the fooling set technique to derive lower bounds on the nondeterministic state complexity.

Definition 1. Let $L \subseteq \Sigma^*$. A set

$$S = \{(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m\} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

is called a *fooling set* for L if the following conditions are satisfied:

1. $x_i y_i \in L$ for every $1 \leq i \leq m$;

* *Onishchenko Sergey* — Saint Petersburg Leonhard Euler International Mathematical Institute, e-mail: dimer03@mail.ru

Published under CC-BY 4.0

2. for every pair of distinct indices i, j, at least one of the words $x_i y_j$ and $x_j y_i$ does not belong to L.

The following theorem was proved by Jean-Camille Birget [1].

Theorem 1. *Let $L \subseteq \Sigma^*$. If L admits a fooling set of cardinality m, then every NFA recognizing L has at least m states.*

2. The upper bound

For the sake of completeness, here we will present that well-known construction. The idea of our lower-bound construction will be based on it.

Theorem 2. *For every NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ with n states, which recognizes language L, there exists an NFA B with n^3 states, which recognizes language $\sqrt{L}$.*

Full proof is represented in [2].

3. The lower bound

Theorem 3. *For every $n \geq 6$ there exists a NFA A_n with n states, which recognizes a language L_n such that $\sqrt{L_n}$ is not recognized by any NFA with fewer than n^3 states.*

References

[1] J.-C. Birget, "Intersection and union of regular languages and state complexity", *Information Processing Letters*, **43**:4 (1992), 185–190. DOI: 10.1016/0020-0190(92)90198-5.

[2] S. Onishchenko, "Nondeterministic state complexity of square root", 2026, arXiv: 2605.02957.

Received on September 11, 2026

Hybrid models with delay in the analysis of biophysical phenomena

A. Y. Perevaryukha*

We are developing a computational modeling method for transient biophysical processes with crisis-like transformation effects under the influence of delay effects. During invasions of aggressive species in ecosystems and COVID-19 epidemics, alternating forms of oscillatory activity regimes emerge and decay. We simulate series of invasive waves using scenario-based equations with delays and redefinable oscillation damping functions. We construct simulation models of invasions from equations for stage transitions based on hybrid automata with events that determine the change in the evolutionary adaptation mode of stages of a decaying oscillatory biophysical process from increasing and decreasing waves of sharp population activity. The hybrid model allows us to describe the conditions for the transition of a crisis situation to a new stage in a series of waves of COVID-19 or aggressive invasion.

Keywords: hybrid automata structures, oscillating invasions.

The research problem addressed is the model-based forecasting of crisis effects accompanying transformations of biodiversity. During aggressive invasion processes — when a new species characterized by a high reproductive parameter r enters a biotic environment — several distinct scenarios of transitional dynamics may emerge. Obtaining biophysically realistic oscillatory dynamics remains problematic for the entire class of known equations. Continuous delay-differential equations $\dot{N} = rF(N(t - f(\tau)))$ exhibit a different biophysical deficiency inherent in their well-known [1] oscillatory solutions $N_*(t; r\tau)$. When large values of $r\tau$ are prescribed in an attempt to generate outbreak-type oscillations for an invasive species, the peaks of the solutions become sharply compressed in time while simultaneously stretched in amplitude; the intervening minima become excessively deep, prolonged and unrealistically low. Real populations cannot persist for long under such model trajectories. Consider Hutchinson cyclic equation key features for biophysics and epidemiological studies as a model of invasions following the results of [2–4] where the only dimensionless parameter:

$$\dot{N}(t) = rN(t)\big(1 - N(t-1)\big), \qquad r > 0. \tag{1}$$

* *Perevaryukha Andrei Yur'evich* — Candidate of technical sciences, Associate professor, ITMO University, e-mail: madelf@rambler.ru

Published under CC-BY 4.0

For every $r > \pi/2$ there exists a unique (up to time shifts) exponentially orbitally stable $T(r)$-periodic solution $N_*(t;r)$. Let $r_{\max} > \pi/2$ be a fixed, ecologically admissible but sufficiently large value of the r. We consider the compact interval $r \in \left[\pi/2+\delta, r_{\max}\right]$ for an arbitrary but fixed $\delta > 0$. Denote by $t^0_{\min}(r)$ the instant of the first minimum of $N_*(t;r)$ on a fundamental period. The complete sequence of minima is $t^k_{\min}(r) = t^0_{\min}(r) + k\,T(r), k \in \mathbb{Z}$. When $r_{\max}$ is sufficiently large the period admits the asymptotic representation $T(r) = \exp\bigl(r\bigl(1+\varphi(r)\bigr)\bigr)$, where φ is a continuous residual function satisfying $\varphi(r) \to 0 \quad$ as $\quad r \to +\infty$ (and therefore remains small on the whole interval up to $r_{\max}$). Because solutions of delay equations are in general asymmetric with respect to their extrema, the fractions of the period spent by the trajectory in a fixed ε-neighbourhood of 0 before and after each minimum are different. We introduce two continuous functions $\alpha_-, \alpha_+ : \left[\pi/2+\delta, r_{\max}\right] \to (0,1)$ and set $\delta_-(r) = \alpha_-(r)\,T(r), \delta_+(r) = \alpha_+(r)\,T(r)$. The set of all instants at which $N_*(t;r)$ remains inside the ε-neighbourhood of 0 is denoted by $\mathcal{I}_\varepsilon(r)$ and admits the representation: $\mathcal{I}_\varepsilon(r) = \bigl\{t \in \mathbb{R} : \ \bigl|N_*(t;r)\bigr| < \varepsilon\bigr\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Bigl(t^k_{\min}(r) - \alpha_-(r)\,T(r),\ t^k_{\min}(r) + \alpha_+(r)\,T(r)\Bigr)$. Substituting the asymptotic expression for the period yields the equivalent form $\mathcal{I}_\varepsilon(r) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Bigl(t^k_{\min}(r) - \alpha_-(r)\exp\bigl(r\bigl(1+\varphi(r)\bigr)\bigr),\ t^k_{\min}(r) + \alpha_+(r)\exp\bigl(r\bigl(1+\varphi(r)\bigr)\bigr)\Bigr)$. As $r \to r_{\max}$ one has $T(r) \to T(r_{\max}) = \exp\bigl(r_{\max}\bigl(1+\varphi(r_{\max})\bigr)\bigr) < \infty, \alpha_\pm(r) \to \alpha_\pm(r_{\max})$, and, in the already well-developed relaxation regime, $\alpha_-(r_{\max}) + \alpha_+(r_{\max}) \approx 1$. Consequently the total length of each connected component of $\mathcal{I}_\varepsilon(r)$ tends to the finite (yet possibly very large) value $\bigl(\alpha_-(r_{\max})+\alpha_+(r_{\max})\bigr)\exp\bigl(r_{\max}\bigl(1+\varphi(r_{\max})\bigr)\bigr)$. Thus, when the $r-$parameter attains its maximal admissible value, the set $\mathcal{I}_\varepsilon(r)$ saturates: the intervals become as long as the ecological constraints permit, while remaining finite.

The aim of the study is to develop method based on hybrid automata for representing transforming oscillatory regimes of extreme biophysical processes, grounded in models of types of real situations (invasions, epidemics, chronic viral infections). We have substantiated in [5] that oscillatory regimes, even within a single invasive process, cannot be described by one generalized model. In situation of active resistance, which is formed against a rapidly multiplying population, has a regulation function $U(N(t-\tau))$ and F with another delay statement $F(N(t-\tau_1))\,\tau_1$ in form of counteraction equation:$\dot{N} = rN(t)U(N(t-\tau)) - F(N(t-\tau_1))$.

Let $N_t(\theta) = N(t+\theta)$, $\theta \in [-\max(\tau,\tau_1), 0]$, [6] denote the history segment of the population density. The following reproductive cycle-generating as

$rN(t)U(N_t)$ functions we will choose from aspects of situational conditions:

$$U_G(N_t) = \ln \frac{K}{N(t-\tau)} \qquad \text{(delayed Gompertz)}, \tag{2}$$

$$U_H(N_t) = \Big(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\Big) \qquad \text{(Hutchinson / delayed logistic)}, \tag{3}$$

$$U_R(N_t) = \exp\big(-\alpha N(t-\tau)\big) \qquad \text{(delayed Ricker)}. \tag{4}$$

The damping (cycle-suppressing) functionals that explicitly involve the critical level J are

$$F_S(N_t) = \frac{\mu N^m(t-\tau_1)}{(J-N(t))^2}, \qquad m \in [2,4], \quad \text{(singular harvesting)}, \tag{5}$$

$$F_M(N_t) = \frac{\mu N^m(t-\tau_1)}{J^2 - N^2(t)} \qquad \text{(mild rational damping)}, \tag{6}$$

$$F_E(N_t) = \mu N^m(t-\tau_1) \exp\Big(\frac{\gamma}{J-N(t)}\Big) \qquad \text{(exponentially damping)}. \tag{7}$$

To simulate the change in stages of invasive processes fading in the refugium, we will choose the change in population regimes as follows:

$$\frac{dN}{dt} = \begin{cases} N(t)\, r \ln \dfrac{K}{N(t-\tau)}, & N < \dfrac{J}{2}, \\ N(t)\, r \ln \dfrac{K}{N(t-\tau)} - \dfrac{\mu N^m(t-\tau_1)}{(J-N(t))^2}, & \dfrac{J}{2} \leqslant N < J, \\ rN(t)\Big(1 - \dfrac{N(t-\tau)}{K}\Big) - \dfrac{\mu N^m(t-\tau_1)}{J^2 - N^2(t)}, & N \geqslant J. \end{cases} \tag{8}$$

The resulting hybrid right-hand side is piecewise continuous on each open regime. Additional regulatory functions may tend to zero at the boundaries of their application ranges. Consequently, the initial-value problem is well-posed in the space of continuous histories, and solutions can cross the switching surfaces transversally under generic parameter conditions. For the model of waves of the local epidemic process of coronavirus in our method, it is necessary to select other combinations of generating and damping functions according to the described principle of constructing a hybrid structure.

Acknowledgements

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Goszadanie (State Assignment) FSER-2025-0013.

Список литературы

[1] G.E. Hutchinson, “Circular causal systems in ecology”, *Ann. New York Acad. Sci.*, **50** (1948), 221–246.

[2] S.A. Kashchenko, “Asymptotics of the solutions of the generalized Hutchinson equation”, *Autom. Control Comput. Sci.*, **47** (2013), 470–494. DOI: 10.3103/S0146411613070079.

[3] E.M. Wright, “A non-linear difference-differential equation”, *J. Reine Angew. Math.*, **194** (1955), 66–87.

[4] G.S. Jones, “The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$”, *J. Math. Anal. Appl.*, **5** (1962), 435–450.

[5] A.Yu. Perevaryukha, “Analysis of the Development of Trends in the Current Epidemic Situation during Spread of the New SARS-CoV-2 Strains and Factors of their Regional Differentiation”, *Biophysics*, **68**:5 (2023), 874–888. DOI: 10.1134/S0006350923050202.

[6] R.E. Baker, G. Rost, “Global dynamics of a novel delayed logistic equation arising from cell biology”, *J. Nonlinear Sci.*, **30** (2020), 397–418. DOI: 10.1007/s00332-019-09577-w.

Received on October 4, 2026

О линейной реализуемости переходных систем по входной переменной

С. Б. Родин*

Данная работа посвящена изучению вопроса «простой»реализации переходной системы посредством кодирования. В общем случае переход от абстрактного автомата к булеву оператору осуществляется с помощью кодирования входного алфавита, алфавита состояний и выходного алфавита. Входные переменные полученного оператора можно разбить на два множества: одно соответствует коду входного символа, второе — коду состояния. Это позволяет рассмотреть свойство линейной реализуемости по каждому множеству отдельно.

В статье исследуется вопрос линейной реализуемости относительно входной переменной. Доказан критерий, согласно которому свойство аддитивного сдвига [1] для порождающих внутренней полугруппы переходной системы является необходимым и достаточным условием линейной реализуемости по входной переменной независимо от длины кода.

Ключевые слова: теория автоматов, переходные системы, подстановка, кодирование, сложность, булев оператор.

1. Введение

На практике часто приходится решать задачу перехода от автоматного описания функционирования на язык схем. Переход к описанию на языке схем осуществляется с помощью кодирования алфавита состояний, входного алфавита и выходного алфавита в алфавите $E_2 = \{0, 1\}$. Возникающий в результате кодирования булев оператор можно рассматривать как набор булевых функций. Сложность такого оператора можно определить как максимальную сложность получающихся булевых функций. Как известно [2], каждой булевой функции единственным образом соответствует полином Жегалкина. В статье [3] было предложено определить сложность как максимальную из сложностей полиномов Жегалкина функций, задающих этот оператор, т. е. как максимальную степень полиномов. Тогда

* *Родин Сергей Борисович* — к.ф.-м.н., старший научный сотрудник каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: `sergei_rodin@mail.ru`.

Rodin Sergei Borisovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior research scientist, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

простейшими с точки зрения такой сложности являются операторы, полиномы Жегалкина которых имеют степень не выше первой, или линейные булевы функции.

В статье [3] был доказан критерий линейной реализуемости переходной системы $V = (E_2, E_n, \varphi)$ посредством неизбыточного кодирования F. Однако переходные системы, которые не являлись линейно реализуемыми для неизбыточных кодирований, при увеличении длины кода могут приводить к линейным булевым операторам. Множество переменных булева оператора можно разбить на два множества, первое соответствует коду входного символа, второе — коду состояния переходной системы. Вопрос линейной реализуемости можно рассмотреть по каждому из этих множеств отдельно. В данной работе изучается вопрос линейной реализуемости по переменным, соответствующим входному символу. При этом ограничений сверху на длину кодирования не накладывается.

2. Основные понятия и определения

Основным объектом изучения являются переходные системы $V = (E_2, E_n, \varphi)$, где $n = 2^k$.

Определение 1. Пусть $\Phi : E_2^m \to E_2^l$ — булев оператор. Его можно рассматривать как набор l булевых функций, зависящих от m переменных, а именно, если $\Phi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}) = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{l-1})$, то $f_j(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}) = \beta_j$, где $0 \leqslant j \leqslant l-1$. Обозначим этот набор через $\mathcal{F}_\Phi = \big(f_0, f_1, \ldots, f_{l-1}\big)$.

Определение 2. Оператор $\widehat{\Phi} : E_2^m \to E_2^l$, $m, l \in \mathbb{N}$ назовем *доопределением оператора* $\Phi : R \to {E_2}^l$, где $R \subseteq E_2^m$, если для каждого $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}) \in R$ верно $\Phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}) = \widehat{\Phi}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})$.

Определение 3. *Кодированием множества* E_n назовем взаимно однозначное отображение (вложение) $F : E_n \to E_2^k$, где $k \geqslant]\log_2 n[$.

Определение 4. Каждое кодирование $F : E_n \to E_2^k$ множества E_n переходной системы (E_2, E_n, φ) порождает булев оператор $\Phi_V^F : E_2 \times R \to R$, где $R = F(E_n) \subseteq E_2^k$, по правилу $\Phi_V^F(x_0, x_1, \ldots, x_k) = F(\varphi(x_0, F^{-1}(x_1, \ldots, x_k)))$, где $x_0 \in E_2, (x_1, \ldots, x_k) \in R$.

Определение 5. Булева функция $f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) : E_2^k \to E_2$ от k переменных называется линейной по переменной x_i, если она представима в виде $f(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = a \cdot x_i \oplus g(x_0, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1})$, где $a \in E_2$, g - булева функция, зависящая от переменных $x_0, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}$.

Определение 6. Назовем переходную систему *линейно реализуемой по входной переменной*, если для заданной переходной системы $V = (E_2, E_n, \varphi)$ существует такое кодирование F, что для оператора Φ_V^F существует доопределение $\widehat{\Phi}_V^F$, у которого все элементы $\mathcal{F}_{\widehat{\Phi}_V^F}$ являются функциями алгебры логики, линейными по входной переменной x_0.

3. Основные результаты

Обозначим через P_n множество отображения E_n в себя. Если $n = 2^k$, то отображения множества E_n в себя могут быть представлены как многочлены над полем Галуа $\mathbb{F}_n$ [2]. Обозначим через $H_+ \subset P_n$ множество подстановок, соответствующих многочленам вида $x + c$ над полем Галуа $\mathbb{F}_n$, где $c \in E_n$ — константа.

Пусть задана переходная система $V = (E_2, E_n, \varphi)$. Обозначим через $X_V = \{s : E_n \to E_n \mid \exists a \in E_2, s(q) = \varphi(a, q) \quad \forall q \in E_n\}$. Заметим, что множество X_V состоит не более чем из двух элементов. Обозначим через p_0 отображение, задаваемое входным символом 0, а через p_1 — отображение, задаваемое входным символом 1.

Множество $S_V = \langle X_V \rangle$ называется *внутренней полугруппой* переходной системы V.

Определение 7. Пусть задана переходная система $V = (E_2, E_n, \varphi)$. Назовем порождающие p_0 и p_1 связанными посредством аддитивного сдвига, если существует взаимно однозначное отображение $s : E_n \to E_n$ такое, что для порождающих верно соотношение $p_1 = p_0 \cdot h$, где $h \in s^{-1} \cdot H_+ \cdot s$

Замечание. Умножение отображений осуществляется «слева направо», т.е. если заданы отображения p_1 и p_2, то значение их произведения на элементе i определяется равенством $(p_1 \cdot p_2)(i) = p_2(p_1(i))$.

Теорема. *Пусть задана переходная система $V = (E_2, E_n, \varphi)$. Переходная система является линейно реализуемой по входной переменной тогда и только тогда, когда порождающие p_0 и p_1 связанны аддитивным сдвигом.*

Список литературы

[1] Родин С.Б., “О свойстве аддитивного сдвига для линейной реализуемости автоматов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **28**:2 (2024), 52–66.

[2] Яблонский С.В., *Введение в дискретную математику*, Наука, Москва, 1979, 272 с.

[3] Родин С.Б., "Линейно реализуемые автоматы", *Дискретная математика*, **29**:1 (2017), 59–79.

Статья поступила 29 октября 2026 г.

Transition systems linearly realizable with respect to the input variable

S. B. Rodin

This paper continues the investigation into the complexity of semiautomata realization via states encoding, namely the property of linear realizability of semiautomaton. Encoding of the semiautomaton alphabets induces a Boolean operator. Arguments of the Boolean operator might be separated into two sets. The first one corresponds to the code of the input alphabet, the second one corresponds to the code of the alphabet of states. The property of the linear realizability with respect to each subset of variables can be studied separately.

This paper studies the property of linear realizability with respect to input variables. It is proven that "additive shift" [1] property for generators of the inner semigroup p_0 and p_1 is a necessary and a sufficient condition for semiautomaton to be linearly realizable by input variable regardless of the code length. This means that code length increasing will not induce linear realizability if "additive shift" property is not fulfilled for generators of the inner semigroup.

Keywords: Automata theory, semiautomata, transition systems, permutation, state encoding, complexity, boolean operator.

References

[1] Rodin S.B., "On the additive shift property for the linear realizability of automata", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **28**:2 (2024), 52–66 (in Russian).

[2] Yablonskij S.V., *Introduction to the discrete math*, Nauka, Moscow, 1979 (in Russian), 272 pp.

[3] Sergey B. Rodin., "Linearly realizable automata", *Discrete Mathematics and Applications*, **27**:6 (2017), 387–402. DOI: 10.1515/dma-2017-0039.

Received on October 29, 2026

О совпадении классов автоматно-реализуемых и префиксно-регулярных ω-языков

В. В. Ушакова*

В данной работе вводятся и изучаются понятия автоматно-реализуемых и префиксно-регулярных ω-языков. Показана эквивалентность данных классов ω-языков. Также показаны: регулярность множества слов и общерегулярность множества сверхслов автоматно-реализуемого ω-языка, единственность автомата приведённого вида для автоматно-реализуемого ω-языка и описаны мощностные комбинации для множества слов и множества сверхслов автоматно-реализуемого ω-языка.

Ключевые слова: конечный автомат, язык, регулярный язык, аппаратно-финальный автомат, ω-язык, префиксно-регулярный ω-язык, автоматно-реализуемый ω-язык.

1. Введение

Приводимые в данной работе результаты основаны на их дальнейшей публикации в виде отдельной большой статьи. Мотивация исследования следующая: рассматривается управляющий автомат в машине Тьюринга и то, на каких входных словах он останавливается и на каких сверхсловах не останавливается. Основным научным результатом данных тезисов и статьи является утверждение 4, а также разработка новой терминологии и самостоятельных доказательств. При этом важно отметить, что возникающий в утверждении 1 класс префиксно-регулярных языков непосредственно связан с известным классом регулярных префиксных кодов, но таковым не является [1]. Утверждение 2 несложно получить, опираясь на результаты [2]. Утверждение 3 является естественным аналогом классического результата [3] и доказывается по той же схеме.

* *Ушакова Валентина Владимировна* — преподаватель каф. прикладной математики и информатики ф-та прикладной математики и информатики Филиала МГУ в г. Ташкенте, e-mail: `valentina.v.ushakova@mail.ru`.

Ushakova Valentina Vladimirovna — lecturer, Tashkent Branch of Lomonosov Moscow State University, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Chair of Applied Mathematics and Computer Science.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Основные определения и понятия

Ввиду ограниченности объёма тезисов, некоторые используемые определения считаются интуитивно понятными и не приводятся (ознакомиться с этими определениями можно в [3, 4]).

Множество $L \subseteq A^* \cup A^\infty$ будем называть *ω-языком* в алфавите A. *Конечной компонентой* ω-языка будем называть множество всех слов в данном ω-языке. *Бесконечной компонентой* ω-языка будем называть множество всех сверхслов в данном ω-языке.

Будем говорить, что слово x - *префикс* слова (сверхслова) y, если $y = xu$ для некоторого слова (сверхслова) u. Будем считать, что сверхслово является своим префиксом. *Префиксным ω-языком* будем называть ω-язык, в котором ни одно слово не является префиксом другого слова или сверхслова. Будем говорить, что для ω-языка в алфавите A выполнено *свойство префиксной полноты*, если для каждого сверхслова в A^∞ в данном ω-языке существует ровно один префикс. *Префиксно-регулярным ω-языком* будем называть ω-язык, множество всех слов которого есть регулярный язык и для которого выполнено свойство префиксной полноты. Класс всех префиксно-регулярных ω-языков в алфавите A будем называть классом префиксно-регулярных ω-языков в алфавите A и обозначать $\text{ПР}(A)$.

Аппаратно-финальным автоматом (далее АФ-автомат) будем называть детерминированный конечный автомат [3] с добавлением множества аппаратно-финальных состояний. Для аппаратно-финальных состояний функция перехода не определена. При достижении аппаратно-финального состояния АФ-автомат завершает свою работу. Слово $\tilde{\alpha} = a(1)a(2)...a(n)$ в алфавите A будем называть *словом, реализуемым автоматом* $\mathcal{A}$, если данное слово $\tilde{\alpha}$ приводит автомат $\mathcal{A}$ в момент времени n в одно из его финальных состояний. Если начальное состояние автомата $\mathcal{A}$ является финальным, то будем считать, что $\mathcal{A}$ реализует пустое слово. Сверхслово $\tilde{\alpha} = a(1)a(2)...a(n)...$ в алфавите A будем называть *сверхсловом, реализуемым автоматом* $\mathcal{A}$, если данное сверхслово $\tilde{\alpha}$ не приводит автомат $\mathcal{A}$ ни в одно из его финальных состояний. *ω-языком, реализуемым автоматом* $\mathcal{A}$ будем называть ω-язык $L_{\mathcal{A}}$, который состоит из всех слов и сверхслов, реализуемых автоматом $\mathcal{A}$. *Автоматно-реализуемым ω-языком* будем называть ω-язык, для которого существует автомат, реализующий данный ω-язык. Класс всех автоматно-реализуемых ω-языков в алфавите A будем называть классом автоматно-реализуемых ω-языков в алфавите A и обозначать $\text{АР}(A)$.

3. Основные результаты

Утверждение 1. *Пусть A - произвольный конечный алфавит. Тогда верно, что AP(A)=ПР(A).*

Утверждение 2. *Пусть $L \in AP(A)$ при $|A| > 1$ и L_*, L_∞ - конечная и бесконечная компоненты L соответственно. Тогда L_* - регулярна, а L_∞ - общерегулярна.*

Утверждение 3. *Для каждого автоматно-реализуемого языка существует единственный (с точностью до изоморфизма) его реализующий АФ-автомат приведённого вида.*

Утверждение 4. *Пусть $L \in AP(A)$ при $|A| > 1$ и L_*, L_∞ - конечная и бесконечная компоненты L соответственно. Пусть L реализуем АФ-автоматом $\mathcal{A} = (A, Q, \varphi, q_0, Q_F)$. Тогда возможны следующие варианты мощностей для L_* и L_∞:*

$\boldsymbol{L_\infty}$	$\varnothing$	непустая конечная	счётная	континуальная		
$\boldsymbol{L_*}$	$1 \leqslant \lvert L_* \rvert \leqslant \lvert A \rvert^{\lvert Q \rvert - 1}$	счётная	счётная	$\varnothing$	непустая конечная	счётная

и данные варианты реализуемы (под реализуемостью для первого столбца имеется в виду реализуемость верхней и нижней оценок).

Заключение

Основную цель исследования можно считать выполненной.

В дальнейшем планируется продолжить данное исследование для произвольной машины Тьюринга.

Список литературы

[1] J. Czyzowicz, W. Fraczak, A. Pelc, W. Rytter, “Prime Decompositions of Regular Prefix Codes”, *Implementation and Application of Automata*, 2003, 85-94.

[2] B. Alpern, F. B. Schneider, “Recognizing safety and liveness”, *Distributed Computing*, **2** (1987), 117–126.

[3] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Теория автоматов: 2-е изд., испр. и доп.*, Юрайт, Москва, 2025, 320 с.

[4] П. С. Дергач., “Об однозначности алфавитного декодирования общерегулярных сверхязыков”, *Дискрет. матем.*, **26**:1 (2014), 32–48. DOI: 10.4213/dm1266.

Статья поступила 18 октября 2026 г.

On equality of classes of automata-implementable and prefix-regular ω-languages

V. V. Ushakova

This paper introduces and explores the concepts of automata-implementable and prefix-regular ω-languages. The equality of these classes is shown. Some other properties are also shown, specifically: regularity of set of words and omni-regularity of set of superwords of automata-implementable ω-language, the uniqueness of reduced automaton for automata-implementable ω-language and some cardinality combinations for set of words and set of superwords of automata-implementable ω-language are described.

Keywords: finite automaton, language, regular language, hardware-final automaton, ω-language, prefix-regular ω-language, automata-implementable ω-language.

References

[1] J.Czyzowicz, W.Fraczak, A.Pelc, W.Rytter, “Prime Decompositions of Regular Prefix Codes”, *Implementation and Application of Automata*, 2003, 85-94.

[2] B.Alpern, F.B.Schneider, “Recognizing safety and liveness”, *Distributed Computing*, **2** (1987), 117–126.

[3] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Automata theory*, Urait, Moscow, 2025, 320 pp.

[4] Dergach P.S., “On uniqueness of alphabetical decoding of -regular languages”, *Discrete Math. Appl.*, **24**:3 (2014), 139–152; П.С. Дергач., “Об однозначности алфавитного декодирования общерегулярных сверхязыков”, *Дискрет. матем.*, **26**:1 (2014), 32–48. DOI: 10.4213/dm1266).

Received on October 18, 2026

Класс линейных автоматов Мура

А. А. Часовских*

Показано, что в классе линейных автоматов Мура с оператором аппроксимационного замыкания отсутствуют предполные классы и базис, но содержится континуум замкнутых классов.

Ключевые слова: линейный автомат, автомат Мура, аппроксимационное замыкание, полнота, выразимость, замкнутый класс, предполный класс.

Мы используем определение конечного инициального автомата и терминологию из [1]. Конечный инициальный автомат называется линейным, если его операторы переходов и выходов являются линейными относительно всех переменных.

Множество всех степенных рядов переменной ξ с коэффициентами из поля $GF(2)$ обозначим R_2, а множество всех таких рядов, коэффициенты которых составляют периодическую (с предпериодом) последовательность, обозначим $E'_2(\xi)$. Как показано в [2], для линейного автомата с n входами и одним выходом над полем $GF(2)$ найдутся такие μ_i, $\mu_i \in E'_2(\xi)$, $i = \overline{0,n}$, что этот линейный автомат реализует следующее отображение f из R_2^n в R_2:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0. \tag{1}$$

Множество линейных автоматов над полем $GF(2)$ обозначим L_2. На L_2 рассматриваем замыкание по операциям композиции, состоящее из операций суперпозиции и обратной связи (K-замыкание), и аппроксимационное замыкание (A-замыкание) [3]. В работе [4] найдены все A-предполные и K-предполные классы в классах линейных автоматов над конечными полями. Оказалось, что для любого конечного поля количество A-предполных классов конечно, а множество K-предполных классов счетно. Таким образом, возникает интерес к исследованию решеток A-замкнутых и K-замкнутых в L_2 классов. Из определений этих замыканий следует, что всякий A-замкнутый класс является K-замкнутым. Поэтому

* *Часовских Анатолий Александрович* — доктор физ.-мат. наук, профессор каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anatoliy.chasovskikh@math.msu.ru, ORCID: 0009-0007-4207-7777.

Chasovskikh Anatoly Alexandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

решетка K-замкнутых классов содержит решетку A-замкнутых классов, и естественно начать с изучения свойств последней.

Согласно определению из [5], конечный автомат называется автоматом Мура, если для любого момента времени его выход не зависит от значений входов в этот момент. Для представления в виде (1) это означает равенство нулю свободных членов всех коэффициентов при переменных: $\mu_i(0) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Такие автоматы, называемые линейными автоматами Мура, образуют замкнутый по обоим рассматриваемым операторам замыкания класс, который мы обозначаем LD_2. В этой работе мы устанавливаем некоторые свойства класса LD_2.

Определение 1. Переменная x_i функции, заданной равенством (1), является существенной, если $\mu_i \neq 0$. Существенную переменную x_i этой функции называем d-переменной, если

$$d = \min\{t \mid \text{коэффициент при } \xi^t \text{ в } \mu_i \text{ равен } 1\}.$$

Количество d-переменных функции f обозначим $r_d(f)$, а через $a(f) = \mu_0(0)$ ее начальный выход. Для множества $M \subseteq LD_2$, числа $d \in \mathbb{N}$ и $a \in \{0,1\}$ положим: $N_a(M,d) = \infty$, если множество $\{r_d(f) \mid f \in M, a(f) = a\}$ не ограничено, и $N_a(M,d) = \max(\{r_d(f) \mid f \in M, a(f) = a\} \cup \{0\})$ в противном случае.

Теорема 1. *В классе LD_2 отсутствуют A-предполные классы. Класс LD_2 не содержит A-базиса.*

Доказательство. Заметим, что для множества $M \subseteq LD_2$ из двух равенств

$$N_a(M,1) = \infty, \quad a \in \{0,1\} \tag{2}$$

следует A-полнота множества M. Из невыполнения хотябы одного из этих равенств следует, что $A(M)$ не совпадает с LD_2 и не является A-предполным классом. Поэтому в LD_2 отсутствуют A-предполные классы.

Если выполнены оба равенства (2), то для любой $f \in M$ и любого $a \in \{0,1\}$ будет выполнено $N_a(M \setminus \{f\}, 1) = \infty$, то есть, удаляя из A-полного множества любую фунцию, получим A-полное множество. Отсюда следует, что класс LD_2 не содержит базиса. □

Лемма 1. *Пусть $M \subseteq LD_2$ и $0 < |M| < \infty$. Тогда для любого $d \in \mathbb{N}$ и любого $a \in \{0,1\}$ выполнено: $N_a(A(M),d) = N_a(K(M),d) < \infty$.*

Определим индуктивно следующую последовательность функций из LD_2.

$$f_1(x_1) = \xi x_1.$$

Пусть $d > 1$ и функции f_1, f_2,…,f_{d-1} построены. Через n_d обозначим число $N_0(A(\{\ f_1, f_2, \dots f_{d-1}\ \}), d)$, которое существует по лемме 1. Положим:

$$f_d(x_1, x_2, \dots, x_{n_d+1}) = \sum_{i=1}^{n_d+1} \xi^d x_i.$$

Теорема 2. *Класс LD_2 содержит подкласс автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, со счетным θ-базисом, $\theta \in \{A, K\}$, который, в свою очередь, содержит континуум θ-замкнутых классов.*

Доказательство. Пусть $\theta \in \{\mathrm{A}, \mathrm{K}\}$. Через Ω обозначим $\{\ f_d\ \mid\ d = 1, 2, \dots\ \}$. Тогда счетное множество Ω является θ-базисом в θ-замкнутом классе $\theta(\Omega)$.

Для любой бесконечной последовательности нулей и единиц α, $\alpha = a_1, a_2, \dots, a_d, \dots$, положим:

$$\Omega(\alpha) = \{f_d \mid a_d = 1\}.$$

Нетрудно видеть, что для двух различных последовательностей α_1 и α_2 выполнено: $\theta(\Omega(\alpha_1)) \neq \theta(\Omega(\alpha_2))$, откуда следует заключительное утверждение теоремы 2. □

Замечание 1. Ограничение о сохранении нулевой последовательности, накладываемое в теореме 2, является существенным, потому что класс LD_2 содержит все константы (функции без существенных переменных), а для любого множества S натуральных чисел множество констант $\{0\} \cup \{\xi^d \mid d \in S\}$ образует θ-замкнутый класс. Таким образом, континуум θ-замкнутых классов строится из констант.

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 позволяют оценить сложность решетки замкнутых классов класса линейных автоматов аналогично тому, как это было сделано Ю. И. Яновым и А. А. Мучником [6] для классов k-значных логик. Заметим, что для линейных автоматов свойства решеток замкнутых классов, представленные в этих теоремах, возникают уже в двузначном случае, тогда как в k-значных логиках они проявляются, начиная с $k = 3$.

Список литературы

[1] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Издательство Московского университета, Москва, 2019, 436 с.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1966, 215 pp.

[3] В. А. Буевич, "Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для о.-д. функций", *Математические заметки*, 1972, № 6, 687–697. DOI: 10.1007/BF01093729.

[4] А. А. Часовских, "Максимальные подклассы в классах линейных автоматов над конечными полями", *Дискретная математика*, **31**:4 (2019), 88–101. DOI: 10.4213/dm1589.

[5] E. F. Moore, "Gedanken-experiments on Sequential Machines", *Automata Studies*, Annals of Mathematical Studies, **34**, 1956, 129–153.

[6] Ю. И. Янов, А. А. Мучник, "О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса", *ДАН СССР*, **127**:1 (1959), 44–46 .

Статья поступила 31 октября 2026 г.

The class of Moore linear automata

A. A. Chasovskikh

It is shown that the class of linear Moore automata equipped with an approximation-closure operator contains no precomplete classes and no basis, but does contain a continuum of closed classes.

Keywords: linear automaton, Moore automaton, approximation closure, completeness, expressibility, closed class, precomplete class.

References

[1] V. B. Kudryavtsev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Vvedenie v teoriyu avtomatov*, Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, M, 2019, 436 (in Russian) pp.

[2] A. Gill, *Linear Sequential Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1966, 215 pp.

[3] V. A. Buevich, "Ob algoritmicheskoj nerazreshimosti raspoznavaniya A-polnoty dlya o.-d. funkcij", *Matematicheskie zametki*, 1972, № 6, 687–697. DOI: 10.1007/BF01093729, (in Russian).

[4] A. A. Chasovskih, "Maksimalnye podklassy v klassah linejnyh avtomatov nad konechnymi polyami", *Diskretnaya matematika*, **31**:4 (2019), 88–101. DOI: 10.4213/dm1589, (in Russian).

[5] E. F. Moore, "Gedanken-experiments on Sequential Machines", *Automata Studies*, Annals of Mathematical Studies, **34**, 1956, 129–153.

[6] Yu. I. Yanov, A. A. Muchnik, "O sushestvovanii k-znachnyh zamknutyh klassov, ne imeyushih konechnogo bazisa", *DAN SSSR*, **127**:1 (1959), 44–46, (in Russian) .

Received on October 31, 2026

О порождающих множествах в классе конечных автоматов с линейной функцией выходов

Ф. Р. Юсупов*

Ранее автором показано, что класс конечных автоматов с одним линейным выходом не является конечно порожденным по операциям ограниченной композиции. Построено его существенно более узкое порождающее множество из сумматора, константы и конъюнкций с задержкой. Для автоматов с не более чем s входами найдено приведенное порождающее множество из трех автоматов, включающее конъюнкцию от $s+1$ переменной с задержкой, и доказано, что меньшей местности конъюнкции недостаточно. Получена верхняя оценка сложности реализации автоматов схемами из этого множества.

Ключевые слова: конечные автоматы, автоматы с линейной функцией выходов, операции композиции, порождающее множество, сложность реализации.

1. Постановка задачи

Мы используем понятия, введенные в [1,2]. Пусть $E_2 = \{0,1\}$. Рассмотрим конечные автоматы $(A, B, Q, \Phi, \Psi, \overline{q}^0)$, где $A = E_2^n$, $B = E_2^m$, $Q = E_2^l$ и $\overline{q}(t+1) = \Phi(\overline{x}(t), \overline{q}(t))$, $\overline{y}(t) = \Psi(\overline{x}(t), \overline{q}(t))$, $\overline{q}(0) = \overline{q}^0$. Автомат имеет *линейную функцию выходов*, если $\Psi(\overline{x}, \overline{q}) = T\overline{x}^* + R\overline{q}^* + \overline{c}$, где T, R — матрицы, $\overline{c}$ — вектор над E_2, а * — транспонирование вектор-строки. Через $P_{F.D.L.}$ обозначим класс таких автоматов, через $P^1_{F.D.L.}$ — его подкласс автоматов с одним выходом, через $P^{s,1}_{F.D.L.}$ — множество автоматов класса $P^1_{F.D.L.}$, имеющих не более s входов.

Операции *ограниченной композиции* K_c — это подстановка переменных, добавление/изъятие фиктивной переменной, подстановка автоматов и обратная связь, допустимая, если каждый замыкаемый контур проходит через задержку. Добавление операции объединения автоматов дает операции *пополненной композиции* K_s. Через $K_c(M)$ обозначается мно-

* *Юсупов Феликс Ренатович* — аспирант каф. МаТИС мех.-мат. факультета МГУ, e-mail: fel.99@list.ru.

Yusupov Feliks Renatovich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

жество автоматов, получаемых из M операциями K_c. Полнота в классе линейных автоматов изучалась в [3].

Через P_2 обозначим множество всех функций алгебры логики. Для $\varphi \in P_2$ и $a \in E_2$ через $q^a(\varphi)$ обозначим автомат с одной задержкой: $q(0) = a$, $q(t+1) = \varphi(\overline{x}(t))$, $y(t) = q(t)$, то есть функцию φ, поданную на задержку с начальным состоянием a. Он принадлежит $P^1_{F.D.L.}$. Через $\mathbf{1}$ обозначим автомат, выдающий 1 во все моменты времени. В [1] доказано, что никакое конечное множество по операциям K_c не порождает класс $P^1_{F.D.L.}$, и что $P^1_{F.D.L.} = K_c(M_0)$, где $M_0 = \{q^a(\varphi) \mid \varphi \in P_2,\ a \in E_2\} \cup \{x_1 + x_2,\ \mathbf{1}\}$. Для $N \subseteq \mathbb{N}$ положим

$$f_n = q^0(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n), \qquad B_n = \{f_n,\ x_1 + x_2,\ \mathbf{1}\},$$
$$M_1(N) = \{f_n \mid n \in N\} \cup \{x_1 + x_2,\ \mathbf{1}\}.$$

При $s > 1$ множество $P^{s,1}_{F.D.L.}$ не замкнуто относительно K_c (подстановка увеличивает число входов), поэтому множество B назовем *порождающим* для $P^{s,1}_{F.D.L.}$, если $P^{s,1}_{F.D.L.} \subseteq K_c(B)$, и *приведенным порождающим*, если к тому же никакой его элемент нельзя удалить без потери этого свойства.

Задачи работы: сократить порождающее множество M_0; показать, что B_{s+1} является приведенным порождающим множеством для $P^{s,1}_{F.D.L.}$.

2. Полученные результаты

Теорема 1. *Для любого бесконечного множества $N \subseteq \mathbb{N}$ выполнено $P^1_{F.D.L.} = K_c\big(M_1(N)\big)$. При конечном N равенство не имеет места.*

Идея доказательства. Подставляя $\mathbf{1}$ на «лишние» входы, из конъюнкции большой местности получаем любую меньшую. Единичное начальное состояние сводится к нулевому прибавлением последовательности $1\,0\,0\ldots$, а функция на задержке есть сумма мономов ее полинома Жегалкина на задержке. Вторая часть следует из конечности $M_1(N)$. □

Тем самым порождающее множество класса $P^1_{F.D.L.}$ удалось сильно сузить по сравнению с M_0. Бесконечным оно остается только из-за роста числа входов, поэтому далее будем ограничивать число входов.

Теорема 2. *Всякий автомат класса $P^1_{F.D.L.}$, имеющий не более s входов, реализуется автоматами множества B_{s+1} операциями ограниченной композиции: $P^{s,1}_{F.D.L.} \subseteq K_c(B_{s+1})$.*

Идея доказательства. Состояния кодируются унитарно: по разряду на состояние. Новое значение разряда есть сумма произведений условий

«на входе данный набор» и «текущее состояние переходит в данное»; каждое произведение реализуется одним элементом f_{s+1}. Обратные связи замыкаются по одной. □

Таким образом, при ограничении на число входов хватает трех автоматов. Далее будем исследовать возможность уменьшения местности конъюнкции.

Теорема 3. $P^{s,1}_{F.D.L.} \not\subseteq K_c(B_s)$.

Идея доказательства. Индукцией по числу элементов в схеме из B_s проверяется, что слагаемые сигнала с произведением всех s входов предыдущего момента не зависят от более ранних входов: на него уходят все входы f_s, и для памяти не остается места. Автомат $y(0) = 1$, $y(t+1) = x_1(t) \cdots x_s(t)\, y(t)$ этому не удовлетворяет: нужна конъюнкция всех входов и предыдущего выхода. □

Итак, для памяти нужна дополнительная переменная конъюнкции.

Следствие 1. *Множество B_{s+1} является приведенным порождающим для $P^{s,1}_{F.D.L.}$, и местность конъюнкции в нем уменьшить нельзя (при $m \leqslant s$ имеем $K_c(B_m) \subseteq K_c(B_s)$). Без f_{s+1}, константы или сумматора получаются лишь автоматы, реализующие в начальный момент аффинные, сохраняющие нуль или монотонные функции соответственно.*

Сложность $L(f)$ — наименьшее число элементов f_{s+1} в схеме из B_{s+1}, реализующей f.

Теорема 4. *Если автомат $f \in P^{s,1}_{F.D.L.}$ имеет r входов и k состояний, то $L(f) \leqslant 2^r k + 1 \leqslant 2^s k + 1$.*

Идея доказательства. Оценка вытекает из схемной реализации, использованной в доказательстве теоремы 2: по элементу f_{s+1} на каждую пару «состояние, входной набор» и еще один на начальное состояние. □

3. Заключение

Порождающее множество класса $P^1_{F.D.L.}$ сведено к сумматору, константе и конъюнкции с задержкой. Для автоматов с не более чем s входами найдено приведенное порождающее множество из трех автоматов и показано, что местность $s+1$ входящей в него конъюнкции наименьшая.

Список литературы

[1] Юсупов Ф. Р., “О мощности порождающих множеств в классе автоматов с линейной функцией выходов”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:4 (2025), 150–162.

[2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*, Наука, Москва, 1985.

[3] Часовских А. А., “О полноте в классе линейных автоматов”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып. 3, Наука, Москва, 1991, 140–166.

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

On generating sets in the class of finite automata with a linear output function

F. R. Yusupov

It was shown earlier that the class of finite automata with one linear output is not finitely generated under bounded composition. A much narrower generating set is built from the adder, the constant and conjunctions with a delay. For automata with at most s inputs a reduced generating set of three automata is found, including a conjunction of $s + 1$ variables with a delay, and it is proved that a smaller arity of the conjunction is insufficient. An upper bound for the complexity of realization of automata by circuits over this set is obtained.

Keywords: finite automata, automata with a linear output function, composition operations, generating set, complexity of realization.

References

[1] Yusupov F. R., “On the cardinality of generating sets in the class of automata with a linear output function”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **29**:4 (2025), 150–162 (In Russian).

[2] Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S., *Introduction to Automata Theory*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian).

[3] Chasovskikh A. A., “On completeness in the class of linear automata”, *Mathematical Problems of Cybernetics*, Iss. 3, Nauka, Moscow, 1991, 140–166 (In Russian).

Received on November 6, 2026

Часть 3
Теория дискретных функций и дискретная оптимизация

О проблеме полноты для полиномиальных и рациональных функций

Н. Ф. Алексиадис*

В докладе представлены результаты исследования задач полноты для ряда функциональных систем, состоящих как из полиномов, так и из рациональных функций при различных ограничениях на коэффициенты.

Ключевые слова: проблема полноты, базис, полином.

1. Постановка задачи

Этот доклад посвящается академику В.Б. Кудрявцеву, моему научному руководителю при учебе в аспирантуре в МГУ им. М.В. Ломоносова, который и поставил мне задачу для диссертационной работы: исследовать проблему полноты для функциональных систем (ф.с.)[1] полиномиальных функций с операциями суперпозиции[2].

В докладе приводится сводка результатов[3] как опубликованных [1–5], так и новых, еще не опубликованных, полученных мною при исследовании проблемы полноты как с алгебраической, так и с алгоритмической точки зрения.

Мы используем стандартные обозначения и общеизвестные понятия теории функциональных систем (следуя книге [6]).

* *Алексиадис Никос Филиппович* — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Национального исследовательского университета «МЭИ», e-mail: aleksiadis@yandex.ru, ORCID: 0009-0006-2863-1148.

Aleksiadis Nikos Philippovich — PhD, associate professor, National Research University «MPEI», Chair of Applied Mathematics and Artificial Intelligence.

[1] Функциональная система – это пара $\mathbf{F} = (F, O)$, где F – множество функций, а O – множество операций суперпозиции, при этом каждая операция замкнута относительно множества F.

[2] Операции суперпозиции включают в себя: переименование (в том числе перестановку и отождествление) переменных, введение/удаление фиктивной переменной, подстановку одной функции в другую.

[3] В связи с ограниченностью объема доклада не все результаты автора вошли в доклад.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Определение функциональных систем полиномиальных и рациональных функций

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{N \times N \times \cdots \times N}_{n} \to N$, которая задается с помощью полинома с натуральными коэффициентами (включая 0), называется *полиномиальной функцией с натуральными коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с натуральными коэффициентами $\mathbf{F}_{PN}$ — это пара $\mathbf{F}_{PN} = (F_{PN}, O)$, где F_{PN} — множество всех полиномиальных функций с натуральными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{Z \times Z \times \cdots \times Z}_{n} \to Z$, которая задается с помощью полинома с целыми коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с целыми коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с целыми коэффициентами $\mathbf{F}_{PZ}$ — это пара $\mathbf{F}_{PZ} = (F_{PZ}, O)$, где F_{PZ} — множество всех полиномиальных функций с целыми коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{n} \to Q$, которая задается с помощью полинома с рациональными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с рациональными коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{PQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{PQ} = (F_{PQ}, O)$, где F_{PQ} — множество всех полиномиальных функций с рациональными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, ..., x_n) : \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n} \to R$, которая задается с помощью полинома с действительными коэффициентами, называется *полиномиальной функцией с действительными коэффициентами.*

Ф.с. полиномиальных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{PR}$ — это пара $\mathbf{F}_{PR} = (F_{PR}, O)$, где F_{PR} — множество всех полиномиальных функций с действительными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)/h(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномиальные функции с рациональными коэффициентами вида $\underbrace{Q \times Q \times \cdots \times Q}_{n} \to Q$, называется *рациональной функцией с рациональными коэффициентами.*

Ф.с. рациональных функций с рациональными коэффициентами $\mathbf{F}_{RQ}$ — это пара $\mathbf{F}_{RQ} = (F_{RQ}, O)$, где F_{RQ} — множество всех рациональных функций с рациональными коэффициентами.

Функция вида $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)/h(x_1, \ldots, x_n)$, где $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномиальные функции с действительны-

ми коэффициентами вида $\underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n} \to R$, называется *рациональной функцией с действительными коэффициентами.*

Ф.с. рациональных функций с действительными коэффициентами $\mathbf{F}_{RR}$ — это пара $\mathbf{F}_{RR} = (F_{RR}, O)$, где F_{RR} — множество всех рациональных функций с действительными коэффициентами.

Отметим, что в ф.с. $\mathbf{F}_{RQ}$ и $\mathbf{F}_{RR}$ мы рассматриваем и частичные функции (включая нигде неопределенную функцию).

3. Основные результаты

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PN}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует всего 4 предполных класса. Все они описаны явно;
3. Базис полной системы состоит из 3 или из 4 функций;
4. Проблема полноты алгоритмически разрешима;
5. Нахождение базиса полной системы алгоритмически разрешимо.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PZ}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует континуум предполных классов;
3. Каждая полная система имеет (конечный) базис;
4. Проблема полноты алгоритмически неразрешима;
5. Нахождение базиса полной системы алгоритмически неразрешимо;
6. Распознавание A-функции алгоритмически неразрешимо.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PQ}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует континуум предполных классов;
3. Каждая полная система имеет (бесконечный) базис.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{PR}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует 2^c предполных классов.

В функциональной системе $\mathbf{F}_{RQ}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует континуум предполных классов;
3. Проблема полноты алгоритмически неразрешима;

В функциональной системе $\mathbf{F}_{RR}$

1. Все предполные классы образуют критериальную систему;
2. Существует 2^c предполных классов;

Список литературы

[1] Алексиадис Н. Ф., “Функциональная система полиномов с натуральными коэффициентами”, *Вестник МЭИ*, 2013, 125–140.

[2] Алексиадис Н. Ф., “Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами”, *Вестник МЭИ*, 2015, 110–117.

[3] Алексиадис Н. Ф., “Алгоритмическая неразрешимость задачи о нахождении базиса конечной полной системы полиномов с целыми коэффициентами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **20** (2016), 19–23.

[4] Алексиадис Н. Ф., “О функциональной системе полиномов с рациональными коэффициентами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23** (2019), 93–114.

[5] Алексиадис Н. Ф., “Базисы полных систем рациональных функций с рациональными коэффициентами”, *Чебышевский сборник*, **24** (2023), 2–11.

[6] Кудрявцев В. Б., *Функциональные системы*, МГУ, Москва, 1982, 157 с.

Статья поступила 23 октября 2026 г.

On the problem of completeness for polynomial and rational functions

N. P. Aleksiadis

The report examines the problem of the completeness of functional systems of polynomial and rational functions.

Keywords: completeness problem, basis, polynomial.

References

[1] N. Ph. Aleksiadis, “Functional system of polynomials with natural coefficients”, *Vestnik MPEI*, 2013, 125–140.

[2] N. Ph. Aleksiadis, “Algorithmic undecidability of the completeness problem for polynomials with integer coefficients”, *Vestnik MPEI*, 2015, 110–117.

[3] N. Ph. Aleksiadis, “Algorithmic undecidability of the problem of finding a basis of a finite complete system of polynomials with integer coefficients”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **20** (2016), 19–23.

[4] N. Ph. Aleksiadis, “On the functional system of polynomials with rational coefficients”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **23** (2019), 93–114.

[5] N. Ph. Aleksiadis, “Bases of complete systems of rational functions with rational coefficients”, *Chebyshevskii sbornik*, **24** (2023), 2–11.

[6] Kudryavtsev V. B., *Functional systems*, MSU, Moscow, 1982, 157 pp.

Received on October 23, 2026

LD-Leiden: локальное параллельное обнаружение сообществ в динамических графах

Г. В. Боков*, А. Ю. Коновалов‡, А. С. Упорова§, С. В. Моисеев¶, И. А. Сафонов‖, А. А. Радионов**

Представлен параллельный алгоритм LD-Leiden обнаружения сообществ в динамических взвешенных графах. Он локально обновляет иерархию Leiden и согласует перемещения вершин. На девяти реальных графах (до 50,9 млн вершин и 117 млн ребер) геометрическое среднее ускорение относительно повторного запуска Leiden равно 25,64 при среднем отношении итоговых модулярностей 0,996. На графах до 214 млн вершин и 3,30 млрд ребер переход от 1 к 64 потокам дает среднее ускорение в 5,22 раза.

Ключевые слова: динамический граф, обнаружение сообществ, модулярность, Leiden.

Постановка задачи. Задача обнаружения сообществ заключается в разбиении вершин графа на группы так, чтобы плотность связей внутри групп была выше, чем между ними. В динамическом графе, где ребра добавляются, удаляются и меняют вес, разбиение необходимо уточнять после каждого пакета изменений. Поскольку изменение малой доли ребер может затронуть многие сообщества, требуется обновлять разбиение с меньшими затратами, чем при полном пересчете сообществ на всем графе, без существенной потери качества.

Пусть $G_t = (V_t, E_t, w_t)$ — граф после t-го пакета изменений, где V_t, E_t — множества вершин и ребер, $w_t : V_t \times V_t \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ — веса ребер. Пакет

* *Боков Г. В.* — МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: bokovgrigoriy@gmail.com.
Bokov Grigoriy — Lomonosov Moscow State University.
‡ *Коновалов А. Ю.* — МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: alexandr.konoval@gmail.com.
Konovalov Aleksandr — Lomonosov Moscow State University.
§ *Упорова А. С.* — МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: annuporova2003@gmail.com.
Uporova Anna — Lomonosov Moscow State University.
¶ *Моисеев С. В.* — МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: stanislav.moiseev@gmail.com.
Moiseev Stanislav — Lomonosov Moscow State University.
‖ *Сафонов И. А.* — НИУ ВШЭ, e-mail: isafonov27@gmail.com.
Safonov Ivan — HSE University.
** *Радионов А. А.* — Московская лаборатория инфокоммуникационных технологий, e-mail: alex.radionov89@gmail.com.
Radionov Alexander — Moscow Infocommunication Technology Laboratory.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

обновлений $\Delta_t = \{(i, j, \delta_{ij}) : \delta_{ij} \neq 0\}$ задает суммарные приращения весов $|\Delta_t|$ пар вершин. Приращения δ_{ij} могут быть отрицательными, но уменьшение веса ребра $w_t(i, j) = w_{t-1}(i, j) + \delta_{ij}$ допускается лишь до нуля, что означает его удаление из графа.

Качество разбиения оценивается модулярностью [1], которую алгоритм стремится увеличить. Пусть $\mathcal{P}$ — разбиение V_t на сообщества, $c_i \in \mathcal{P}$ — сообщество вершины i. Модулярность задается формулой:

$$Q(\mathcal{P}) = \frac{1}{m} \sum_{i,j} \left(w_{ij} - \gamma \frac{k_i^{\text{out}} k_j^{\text{in}}}{m} \right) \mathbf{1}\{c_i = c_j\}, \tag{1}$$

где $w_{ij} = w_t(i, j)$, $m = \sum_{i,j} w_{ij} > 0$, $k_i^{\text{out}} = \sum_j w_{ij}$, $k_j^{\text{in}} = \sum_i w_{ij}$ — исходящие и входящие взвешенные степени, $\gamma > 0$ — параметр резолюции. При $\gamma = 1$ модулярность показывает нормированное на m превышение веса ребер внутри сообществ над ожидаемым в случайной модели с ожидаемыми весами $k_i^{\text{out}} k_j^{\text{in}}/m$ и ожидаемыми степенями, равными исходным.

Алгоритм LD-Leiden и его свойства. LD-Leiden между пакетами сохраняет и локально обновляет все уровни иерархии Leiden [2], тогда как GVE-Leiden [3] строит ее заново, а DF-Leiden [4] локализует поиск на исходном графе.

В LD-Leiden поиск начинается с концов измененных ребер, затронутых сообществ и соответствующих вершин следующих уровней. Для них и их соседей параллельно выбираются лучшие перемещения, увеличивающие модулярность. Этап согласования отбирает набор, в котором сообщество только отдает либо только принимает вершины. После пробного применения вычисляется точный прирост модулярности набора $\Delta Q = Q_{\text{after}} - Q_{\text{before}}$ по обновленным весам и степеням сообществ. При $\Delta Q \leq \delta \alpha Q_0$ набор отменяется, при $\Delta Q < \alpha Q_0$ перемещения прекращаются. Здесь Q_0 — модулярность перед обработкой текущего уровня, $\alpha, \delta \in (0, 1)$. При $Q_0 \geq 0$ принятый набор увеличивает модулярность.

Принятые перемещения расширяют поиск на соседей и затронутые сообщества. После уточнения внутри сообществ и обновления агрегированных весов и межуровневых связей поиск продолжается на следующем уровне. Перемещения и уточнение прекращаются после M итераций или при доле перемещенных среди просмотренных вершин меньше $\beta \in (0, 1)$. При исчерпании областей поиска или достижении N проходов разбиение переносится на исходный граф.

Веса следующего уровня вычисляются по формуле $W^{r+1}(x, y) = \sum_{u \in C_x, v \in C_y} W^r(u, v)$, где C_x, C_y — сообщества уточненного разбиения уровня r, представленные вершинами x, y, а W^r — веса уровня r. Пересчет вкладов затронутых ребер дает те же веса, что и полная агрегация.

При фиксированных N, L, M время обработки пакета на одном потоке составляет $O\big(|\Delta_t| + \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=0}^{L}(e_{ri} + n_{ri}\log n_{ri})\big)$, где L — верхний уровень, n_{ri}, e_{ri} — числа различных просмотренных вершин и инцидентных им ребер на уровне r за проход i. Линейная часть учитывает просмотр инцидентных ребер и обновление агрегированных весов, а логарифмическая — сортировку не более одного перемещения на вершину за итерацию.

Иерархия и рабочие данные занимают $O((n+e)\ell + n + p)$ памяти, где $n = |V_t|$, $e = |E_t|$, $\ell = L + 1$ — число уровней, p — число потоков.

Экспериментальные результаты. Использованы графы KONECT и SNAP[1]: ca-cit-HepPh, youtube, com-lj, com-orkut, asia_osm, europe_osm, wikipedia, flickr, stackoverflow. Замеры проводились на одном потоке со 100 пакетами и $\gamma = 1$ на двухпроцессорном сервере (96 ядер, 512 ГиБ ОЗУ). Ребра временных графов сортировались по времени и перемешивались внутри пакетов; ребра статических графов перемешивались до разбиения на пакеты.

Leiden запускался на всем графе с предыдущим разбиением. GVE-Leiden и DF-Leiden вычислялись на первых шести неориентированных графах списка. В таблице приведены геометрические средние $T_{\text{base}}/T_{\text{LD}}$ и арифметические средние $Q_{\text{LD}}/Q_{\text{base}}$ по графам. Время T_{LD} включает все этапы обработки 100 пакетов, в том числе обновление иерархии; модулярность Q измерялась после обработки последнего пакета обновлений[2].

Базовый метод	Leiden	GVE-Leiden	DF-Leiden
$T_{\text{base}}/T_{\text{LD}}$	25,64	6,21	4,31
$Q_{\text{LD}}/Q_{\text{base}}$	0,996	1,061	1,027

На шести неориентированных графах из списка и крупных графах friendster, dimacs10-uk и kmer_V1r (68,4–214 млн вершин, 465 млн–3,3 млрд ребер) среднее арифметическое T_1/T_{64} составляет 5,22, где T_p — время обработки 100 пакетов LD-Leiden на p потоках.

Благодарности. Работа поддержана Минэкономразвития России (соглашение № 139-15-2025-012, идентификатор 000000C313925P4H0002).

Список литературы

[1] M. E. J. Newman, M. Girvan, “Finding and evaluating community structure in networks”, *Physical Review E*, **69**:2 (2004), 026113. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.026113.

[1] https://konect.cc/, https://snap.stanford.edu/data/

[2] Код и конфигурации запусков: https://github.com/mpailab/ldleiden. Параметры запусков LD-Leiden: $N = 2$, $L = 4$, $M = 5$, $\alpha = 0{,}001$, $\beta = 0{,}01$, $\delta = 0{,}5$.

[2] V. A. Traag, L. Waltman, N. J. van Eck, “From Louvain to Leiden: guaranteeing well-connected communities”, *Scientific Reports*, **9** (2019), 5233. DOI: 10.1038/s41598-019-41695-z.

[3] S. Sahu, K. Kothapalli, D. S. Banerjee, “Fast Leiden Algorithm for Community Detection in Shared Memory Setting”, *Proceedings of the 53rd International Conference on Parallel Processing*, ACM, 2024, 11–20. DOI: 10.1145/3673038.3673146.

[4] S. Sahu, “Heuristic-based Dynamic Leiden Algorithm for Efficient Tracking of Communities on Evolving Graphs”, 2024, arXiv: 2410.15451. DOI: 10.48550/arXiv.2410.15451 .

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

LD-Leiden: Local Parallel Community Detection in Dynamic Graphs

G. Bokov, A. Konovalov, A. Uporova, S. Moiseev, I. Safonov, A. Radionov

LD-Leiden locally updates the Leiden hierarchy and coordinates parallel vertex moves in dynamic weighted graphs. On nine real-world graphs (up to 50.9M vertices and 117M edges), geometric-mean speedup over repeated Leiden is 25.64, with a mean final modularity ratio of 0.996. On graphs up to 214M vertices and 3.30B edges, scaling from 1 to 64 threads gives a mean speedup of 5.22.

Keywords: dynamic graph, community detection, modularity, Leiden.

References

[1] M. E. J. Newman, M. Girvan, “Finding and evaluating community structure in networks”, *Physical Review E*, **69**:2 (2004), 026113. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.026113.

[2] V. A. Traag, L. Waltman, N. J. van Eck, “From Louvain to Leiden: guaranteeing well-connected communities”, *Scientific Reports*, **9** (2019), 5233. DOI: 10.1038/s41598-019-41695-z.

[3] S. Sahu, K. Kothapalli, D. S. Banerjee, “Fast Leiden Algorithm for Community Detection in Shared Memory Setting”, *Proceedings of the 53rd International Conference on Parallel Processing*, ACM, 2024, 11–20. DOI: 10.1145/3673038.3673146.

[4] S. Sahu, “Heuristic-based Dynamic Leiden Algorithm for Efficient Tracking of Communities on Evolving Graphs”, 2024, arXiv: 2410.15451. DOI: 10.48550/arXiv.2410.15451.

Received on November 8, 2026

Обобщение одного класса полиномиальных форм и его свойства

А. В. Бухман*

В работе предлагается обобщение CRMP полиномиальных форм — обобщённых полиномиальных форм, в которых любые два монома различаются набором входящих в них переменных. Вводится понятие CRMP полиномиальной формы, поляризованной по вектору $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$. Описаны некоторые свойства таких форм.

Ключевые слова: булевы функции, полиномиальные формы, CRMP формы.

Определение. Обобщённой полиномиальной формой назовём сумму по модулю два мономов. Моном — это произведение различных переменных или их отрицаний (либо константа 1).

Определение. Длиной обобщённой полиномиальной формы будем называть количество слагаемых в ней. Под сложностью обобщённой полиномиальной формы будем понимать её длину.

Сложность булевых функций в классе обобщённых полиномиальных форм изучалась, например, в работах [1, 2]: в работе [1] получена верхняя оценка функции Шеннона длины обобщённых полиномиальных форм булевых функций, а в работе [2] аналогичные вопросы рассмотрены для функций k-значной логики и найден порядок роста соответствующей функции Шеннона. Тем не менее построение минимальных обобщённых полиномиальных форм для конкретных функций в общем случае — сложная задача, поэтому рассматривают обобщённые полиномиальные формы с ограничениями на слагаемые; например, в работе [3] рассматриваются поляризованные полиномиальные формы.

В данной работе рассмотрим один вид полиномиальных форм, введённый в статье [4], который обладает хорошими свойствами с точки зрения синтеза.

Определение. CRMP полиномиальная форма — это такая обобщённая полиномиальная форма, что любые два монома различаются набором входящих в них переменных.

* *Бухман Антон Владимирович* — н.с. каф. мат. киб. ВМК МГУ, e-mail: antvbx@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5242-3908.

Bukhman Anton Vladimirovich — Researcher, Department of Mathematical Cybernetics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Такие полиномиальные формы обладают рядом полезных свойств с точки зрения приложений, например, задача выполнимости на них разрешима за полиномиальное время, также в работе [4] приведены эффективные алгоритмы для их минимизации.

В данной заметке предлагается обобщение CRMP полиномиальных форм.

Пусть $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$, введём оператор Pr^α, который действует на мономы от n переменных, результатом его воздействия будет множество переменных, причём если $\alpha_i = 0$, то x_i входит в это множество тогда и только тогда, когда x_i входит в моном с отрицанием или без отрицания; если $\alpha_i = 1$, то x_i входит в это множество тогда и только тогда, когда x_i входит в моном с отрицанием или не входит в моном; если $\alpha_i = -1$, то x_i входит в это множество тогда и только тогда, когда x_i входит в моном без отрицания или не входит в моном.

Определение. Пусть $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$. CRMP полиномиальной формой, поляризованной по вектору α, назовём такую обобщённую полиномиальную форму, что для любых двух её мономов K_1, K_2 справедливо $Pr^\alpha(K_1) \neq Pr^\alpha(K_2)$.

При $\alpha = (0, \ldots, 0)$ получаем определение обычной CRMP полиномиальной формы.

Научная новизна работы состоит во введении нового класса полиномиальных форм — CRMP полиномиальных форм, поляризованных по вектору $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$, обобщающего класс CRMP полиномиальных форм. Актуальность и практическая ценность предложенного обобщения обусловлены тем, что для некоторых булевых функций оно позволяет получать представления существенно меньшей длины, чем представления в классе обычных CRMP полиномиальных форм, что продемонстрировано в следующем примере.

Пример. Пусть $n \geq 2$ и $f = x_1 x_2 \cdots x_n \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n$. Длина любой CRMP формы функции f не меньше n, в то время как минимальная длина CRMP формы функции f, поляризованной по вектору $\alpha = (1, \ldots, 1)$, равна 2.

Некоторые свойства CRMP форм можно обобщить на CRMP формы, поляризованные по вектору α. Для этого рассмотрим преобразование Φ_α, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, а n равно числу переменных обобщённой полиномиальной формы, к которой применяется преобразование. Преобразование Φ_α переводит обобщённые полиномиальные формы в обобщённые полиномиальные формы, причём

$\Phi_\alpha(K_1 \oplus \cdots \oplus K_l) = \Phi_\alpha(K_1) \oplus \cdots \oplus \Phi_\alpha(K_l)$, где $K_1, \ldots, K_l$ — мономы. Поэтому достаточно определить действие преобразования Φ_α на мономы. Заметим, что любой моном K можно представить в виде $K = h_1(x_1) \cdots h_n(x_n)$, где каждая из функций h_i — либо тождественная функция (x), либо отрицание $(\bar{x})$, либо константа 1. Определим преобразования ϕ_0, ϕ_1, ϕ_{-1} таких функций: ϕ_0 — тождественное преобразование, $\phi_1(x) = \bar{x}$, $\phi_1(\bar{x}) = 1$, $\phi_1(1) = x$, а ϕ_{-1} — преобразование, обратное к ϕ_1. Тогда $\Phi_\alpha(K)$ будет равен моному, соответствующему $\phi_{\alpha_1}(h_1)(x_1) \cdots \phi_{\alpha_n}(h_n)(x_n)$.

Преобразование Φ_α обладает следующими свойствами: оно сохраняет длину обобщённой полиномиальной формы; любую CRMP форму оно переводит в CRMP форму, поляризованную по вектору α; если две обобщённые полиномиальные формы задают одну и ту же булеву функцию, то их образы при преобразовании Φ_α также задают одну и ту же булеву функцию.

Преобразование Φ_α можно применить для получения приведённых ниже свойств CRMP форм, поляризованных по α. Идея доказательств состоит в применении преобразования Φ_α и переходе к обычным CRMP формам.

Теорема 1. *Для любого фиксированного $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ константа 0 представима единственным образом CRMP формой, поляризованной по вектору α.*

Теорема 2. *Пусть $n \geq 3$. Для любого фиксированного $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ каждая булева функция от n переменных может быть представлена CRMP формой, поляризованной по вектору α, длины не более чем $\frac{3}{8}2^n$.*

Теорема 3. *Для любого вектора $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ существует булева функция от n переменных, минимальная CRMP полиномиальная форма которой, поляризованная по вектору α, содержит не менее $C_n^{n/2}$ слагаемых при чётном n и не менее $C_n^{(n-1)/2}$ слагаемых при нечётном n.*

Список литературы

[1] К. Д. Кириченко, “Верхняя оценка сложности полиномиальных нормальных форм булевых функций”, *Дискретная математика*, **17**:3 (2005), 80–88. DOI: 10.4213/dm117.

[2] М. А. Башов, С. Н. Селезнева, “О длине функций k-значной логики в классе полиномиальных нормальных форм по модулю k”, *Дискретная математика*, **26**:3 (2014), 3–9. DOI: 10.4213/dm1286.

[3] Н. А. Перязев, “Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм”, *Алгебра и логика*, **34**:3 (1995), 323–326. DOI: 10.1007/BF02341875.

[4] L. Csanky, M. A. Perkowski, I. Schaefer, "Canonical restricted mixed-polarity exclusive-OR sums of products and the efficient algorithm for their minimisation", *IEE Proceedings E (Computers and Digital Techniques)*, **140**:1 (1993), 69–77. DOI: 10.1049/ip-e.1993.0009.

Статья поступила 25 октября 2026 г.

A generalization of one class of polynomial forms and its properties

A. V. Bukhman

The paper proposes a generalization of CRMP polynomial forms, i.e., generalized polynomial forms in which any two monomials differ in the set of variables they contain. The notion of a CRMP polynomial form polarized by a vector $\alpha \in \{-1, 0, 1\}^n$ is introduced. Some properties of such forms are described.

Keywords: Boolean functions, polynomial forms, CRMP forms.

References

[1] K. D. Kirichenko, "An upper bound for the complexity of polynomial normal forms of Boolean functions", *Diskretnaya Matematika*, **17**:3 (2005), 80–88. DOI: 10.4213/dm117 (in Russian).

[2] M. A. Bashov, S. N. Selezneva, "On the length of functions of k-valued logic in the class of polynomial normal forms modulo k", *Diskretnaya Matematika*, **26**:3 (2014), 3–9. DOI: 10.1515/dma-2015-0013 (in Russian).

[3] N. A. Peryazev, "Complexity of Boolean functions in the class of polarized polynomial forms", *Algebra i Logika*, **34**:3 (1995), 323–326. DOI: 10.1007/BF02341875 (in Russian).

[4] L. Csanky, M. A. Perkowski, I. Schaefer, "Canonical restricted mixed-polarity exclusive-OR sums of products and the efficient algorithm for their minimisation", *IEE Proceedings E (Computers and Digital Techniques)*, **140**:1 (1993), 69–77. DOI: 10.1049/ip-e.1993.0009.

Received on October 25, 2026

Алгоритм стягивания путей для задачи поиска простого пути заданной длины

М. И. Ващенко*, А. А. Мастихина‡

В работе рассматривается задача поиска простого пути заданной длины между заданными вершинами в связном неориентированном взвешенном графе без кратных ребер и петель, все веса ребер которого являются положительными числами. Данная задача возникает при планировании транспортных маршрутов с гарантированной задержкой или при анализе графов, возникающих в микробиологии. Авторами предложен новый алгоритм для решения задачи поиска простого пути заданной длины в графе. Разработанный алгоритм основан на постепенном преобразовании графа и отсечении простых путей, которые не могут являться частью искомого простого пути. В работе представлены оценки временной и пространственной сложности нового алгоритма в среднем и худшем случаях, а также представлены результаты численных экспериментов по сравнению данного алгоритма с модифицированным алгоритмом Йена.

Ключевые слова: алгоритм Йена, поиск простых путей, случайный граф Эрдеша-Реньи.

1. Введение

В работе рассматривается задача поиска простого пути заданной длины между заданными вершинами в неориентированном связном взвешенном графе $G = (V, E)$ без кратных ребер и петель, все веса ребер которого являются положительными числами. Данная задача имеет ряд приложений, например, она может быть использована для планирования транспортных маршрутов с гарантированной задержкой или при анализе графов, возникающих в микробиологии [1].

Ващенко Максим Игоревич — студент магистратуры, МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: maksim.vashchenko.5669@mail.ru, ORCID: 0009-0005-4328-4431.

Vaschenko Maksim Igorevich — Master's student, Bauman Moscow State Technical University.

‡*Мастихина Анна Антоновна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ФН1 "Высшая математика", МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: anmast@bmstu.ru, ORCID: 0009-0008-5025-5518.

Mastikhina Anna Antonovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of FS1, "Higher mathematics", Bauman Moscow State Technical University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Для решения рассматриваемой задачи можно использовать некоторые существующие алгоритмы, а именно небольшую модификацию классического алгоритма Йена [2] и алгоритма Йена, основанного на двунаправленном алгоритме Дейкстры. Главным недостатком этих алгоритмов является то, что они полностью переборные, то есть в худшем случае им потребуется перебрать все простые пути между заданными вершинами, которых может оказаться очень много. Для устранения этого недостатка был разработан алгоритм стягивания путей.

2. Основная идея алгоритма

Предположим, что мы ищем простой путь длины w_{find} между вершинами v_{start} и v_{end} и на некотором шаге алгоритма стягивания путей мы обнаружили простой путь длины $w_1 > w_{find}$ между вершинами, отличными от заданных. Очевидно, что найденный простой путь не может быть частью искомого простого пути, поскольку все веса ребер в графе являются положительными числами и $w_1 > w_{find}$, поэтому данный простой путь должен быть "удален"из графа.

В ходе работы алгоритма на каждой итерации выбирается вершина с наименьшей степенью среди вершин, смежных с v_{start} или v_{end} и отличных от них. Затем рассматриваются все простые пути между вершинами, смежными с рассматриваемой. Из графа удаляется рассматриваемая вершина и инцидентные ей ребра, на основе которых в графе проводятся новые, но только те, которые могут быть частью искомого простого пути, с сохранением информации об изначальной структуре графа. Алгоритм прекратит работу в тот момент, когда будет проведено новое ребро между v_{start} и v_{end}, на основе которого будет восстановлен простой путь в исходном графе.

В случае, когда искомого простого пути нет в графе, граф на одной из итераций потеряет связность, а именно либо v_{start}, либо v_{end} окажется в другой компоненте связности, и алгоритм прекратит свою работу.

3. Оценки сложности разработанного алгоритма

Оценки для временной и пространственной сложности [3] алгоритма стягивания путей в худшем и среднем случае представлены в Таблице 1. Средний случай рассматривался для случайного графа Эрдеша-Реньи [4].

Таблица 1: Сложности рассматриваемых алгоритмов.

Алгоритм Йена	**Новый алгоритм**
Худший случай:	Худший случай:
$T = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^3\big)$;	$T = O\big(\lvert V\rvert^3(\lvert V\rvert!)^2\big)$;
$S = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^2\big)$.	$S = O\big(\lvert V\rvert\,\lvert V\rvert!\big)$.
Средний (разреженный):	Средний (разреженный):
$T = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert(\log\lvert V\rvert)^2\big)$;	$T = O\big(\lvert V\rvert^2\big)$;
$S = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert\log\lvert V\rvert\big)$.	$S = O\big(\lvert V\rvert^2\big)$.
Средний (плотный):	Средний (плотный):
$T = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^2\big)$;	$T = O\big(\lvert V\rvert^2\lvert V\rvert!\big)$;
$S = O\big(2^{\lvert E\rvert-\lvert V\rvert+2}\lvert V\rvert^2\big)$.	$S = O\big(\lvert V\rvert\,\lvert V\rvert!\big)$.

4. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты были проведены на языке Python на наборах случайных графов Эрдеша-Реньи и подграфах графов из прикладных задач. Также были проведены численные эксперименты для случая, когда в графе нет простого пути заданной длины между заданными вершинами. В Таблице 2 представлены результаты для подграфов графа дорог Нью-Йорка. $|E|_{cp}$ - среднее число ребер в подграфе, Δ - отношение числа случаев, в которых алгоритм Йена оказался быстрее нового алгоритма, к общему количеству случаев (всего проводилось 50 экспериментов).

Таблица 2: Среднее время работы на подграфах графа дорог Нью-Йорка.

$\lvert V\rvert$	$\lvert E\rvert_{cp}$	Алгоритм Йена, с	Новый алгоритм, с	Δ, %
2500	3127	1139,76	142,39	28

5. Заключение

Таким образом, был разработан новый алгоритм для задачи поиска простого пути заданной длины между заданными вершинами, который в некоторых случаях оказался эффективнее модифицированных вариаций алгоритма Йена.

Список литературы

[1] Scott J., Ideker T., Karp R. M., Sharan R., “Efficient Algorithms for Detecting Signaling Pathways in Protein Interaction Networks”, *Research in Computational Molecular Biology*, Berlin, Heidelberg, 2005, 1–13. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/11415770_1.

[2] Yen J. Y., "Finding the k-Shortest Loopless Paths in a Network", *Management Science*, **17**:11 (1971), 712–716. DOI: http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.17.11.712.

[3] Абрамов С. А., *Лекции о сложности алгоритмов*, МЦНМО, М., 2009, 256 с.

[4] Райгородский А. М., *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011, 136 с.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

The path contraction algorithm for the problem of finding a simple path of a given length

M. I. Vaschenko, A. A. Mastikhina

The paper considers the problem of finding a simple path of a given length between specified vertices in a connected undirected weighted graph without multiple edges and loops, all edge weights of which are positive numbers. This problem arises when planning transport routes with guaranteed delay or when analyzing graphs that arise in microbiology. The authors propose a new algorithm for solving the problem of finding a simple path of a given length in a graph. The developed algorithm is based on the gradual transformation of the graph and the elimination of simple paths that cannot be part of the sought-after simple path. The paper presents estimates of the time and space complexity of the new algorithm in the average and worst cases, and also presents the results of numerical experiments comparing this algorithm with the modified Yen's algorithm.

Keywords: Yen's algorithm, simple path search, Erdős–Rényi random graph.

References

[1] Scott J., Ideker T., Karp R. M., Sharan R., "Efficient Algorithms for Detecting Signaling Pathways in Protein Interaction Networks", *Research in Computational Molecular Biology*, Berlin, Heidelberg, 2005, 1–13. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/11415770_1.

[2] Yen J. Y., "Finding the k-Shortest Loopless Paths in a Network", *Management Science*, **17**:11 (1971), 712–716. DOI: http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.17.11.712.

[3] Abramov S. A., *Lectures on the Complexity of Algorithms*, MCCME, Moscow, 2009 (In Russian), 256 pp.

[4] Raigorodsky A. M., *Models of Random Graphs*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian), 136 pp.

Received on November 9, 2026

Гибридные генетические алгоритмы для решения задач условной оптимизации

А. Е. Заварухин*, М. С. Семишкин‡, Е. В. Хворостухина§

Описан гибридный генетический алгоритм для одномерной и многомерной задач о рюкзаке. Реализация на Rust сочетает параллельную островную модель, жадный ремонт хромосом и локальный поиск. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: задача о рюкзаке, многомерная задача о рюкзаке, генетический алгоритм, параллельные вычисления.

1. Введение и постановка задачи

Задачи условной оптимизации в общем случае характеризуются высокой вычислительной сложностью. Наличие жестких ограничений существенно сужает область допустимых решений и затрудняет поиск глобального экстремума классическими детерминированными методами. В данных условиях эффективным подходом становится применение метаэвристических гибридных алгоритмов, сочетающих в себе глобальный эволюционный поиск со специализированными локальными эвристиками и операторами. В данной работе предлагается архитектура гибридного параллельного генетического алгоритма (далее ГПГА), предназначенного для решения задачи об одномерном и многомерном рюкзаке. Применение точных методов для ее сложных экземпляров оказывается чрезмерно ресурсоёмким [1, 2].

Рассмотрим задачу выбора n предметов с ценностями $p_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Требуется найти бинарный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, максимизирующий ценность при ресурсных ограничениях: $\max_{x \in \{0,1\}^n} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$,

* *Заварухин Андрей Евгеньевич* — магистрант МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: zavaruhin.andrew@yandex.ru.

Zavarukhin Andrej Evgenevich — Master's student, BMSTU.

‡ *Семишкин Максим Сергеевич* — аспирант каф. ИКСП ИнПИТ СГТУ им. Гагарина Ю. А., e-mail: semishkin@bk.ru.

Semishkin Maxim Sergeevich — PhD student, SSTU, Dep. of Inform. and Commun. Systems and Software Engineering.

§ *Хворостухина Екатерина Владимировна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ИКСП ИнПИТ СГТУ им. Гагарина Ю. А., e-mail: katyanew2007@rambler.ru, ORCID: 0000-0002-2775-5732.

Khvorostukhina Ekaterina Vladimirovna — PhD, Associate professor, SSTU, Dep. of Inform. and Commun. Systems and Software Engineering.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

$\sum_{i=1}^{n} w_{ji}x_i \le c_j$, $j = 1, \ldots, m$. Здесь $w_{ji} \ge 0$ — расход ресурса j предметом i, c_j — доступный объём. При $m = 1$ задача одномерная (КР), при $m > 1$ — многомерная (МКР).

2. Алгоритм и программная реализация

Генетический алгоритм (ГА) — эволюционный метод поиска, в котором особи (возможные решения) последовательно изменяются с помощью операторов отбора, скрещивания и мутации. Каждая особь моделируется одной хромосомой. В нашем случае хромосома представляет собой бинарный вектор x. Функция приспособленности определяется следующим образом: $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Оператор отбора выбирает родителей. В предлагаемом алгоритме реализовано два типа отбора: рулеточный, отбирающий особи с вероятностью, зависящей от F, и турнирный, когда выбирают лучшую из k случайных особей (в экспериментах $k = 3$). Использовался одноточечный оператор скрещивания: новые потомки образуются с помощью обмена фрагментами хромосом в одной точке разрыва. Оператор мутации случайно инвертирует отдельные биты. В предлагаемой реализации вероятности скрещивания и мутации были подобраны на основе предварительного параметрического анализа и равны соответственно 0,8 и 0,05. Новое поколение формируется по схеме $(\mu + \lambda)$. Это означает, что из μ родителей создаются λ потомков, а потом выбираются μ лучших из объединения родителей и потомков, образуя новое поколение. В нашем случае $\mu = \lambda$. Данная схема селекции по сути реализует принцип элитизма, гарантируя сохранение наиболее приспособленных хромосом на каждой итерации алгоритма.

Дополнительно применяются два специализированных оператора — жадный ремонт и локальный поиск. Первый в одномерной задаче удаляет предметы по возрастанию отношения ценности к весу до выполнения ограничения (DROP), а затем заполняет свободное место предметами с наибольшим отношением (ADD). Для МКР применяется псевдоэффективность — отношение ценности предмета к нормализованному потреблению им ресурсов. Локальный поиск дорабатывает лучшие хромосомы заменами типов один на один, один на два или два на один, добавляя наиболее ценные невыбранные и удаляя наименее ценные выбранные предметы. Замена принимается только при улучшении значения F без нарушения ограничений. Число итераций локального поиска ограничено. С вероятностью 0,2 поиск применяется к двум лучшим особям каждого поколения. Такое сочетание эволюции и локального улучшения соответствует меметическому подходу [3].

Программная реализация на Rust использует паттерн Builder и трейты для взаимозаменяемости операторов. Единое эволюционное ядро поддерживает обе постановки задачи (КР и МКР). Для МКР веса задаются векторами, а допустимость проверяется по всей системе ограничений. Интерфейс на базе `eframe` позволяет настраивать ГПГА и визуализировать графики лучшего значения F по поколениям для оценки скорости сходимости и выявления стагнации. Параллелизм реализован на базе островной модели [3]: субпопуляции эволюционируют в независимых потоках Rust с периодическим обменом особями. В экспериментах задействованы 4 острова (субпопуляция — 500 особей) с полносвязной топологией, миграция — 10% особей каждые 100 поколений с заменой худших хромосом на мигрантов, общее число поколений — 500.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Для КР тестирование проводилось на бенчмарках Д. Писинжера, для МКР — на наборах Чу и Бизли [2] (по 20 запусков). Часть полученных данных сведена в общую табл. 1, где F^* — известный оптимум, $\overline{F}$ — среднее значение F, $F_{\max}$ — наибольшее F, $\delta = 100(F^* - \overline{F})/F^*$ (%) — среднее отклонение, $\bar{t}$ — среднее время одного запуска в секундах.

Таблица 1: Результаты экспериментов для ГПГА КР и МКР

Одномерная задача (КР)					Многомерная задача (МКР, $n = 500$)					
n	F^*	$\overline{F}$	$F_{\max}$	$\bar{t}$, с	m	F^*	$\overline{F}$	$F_{\max}$	δ, %	$\bar{t}$, с
1000	54 503	54 503	54 503	1,45	5	120 148	120 011	120 080	0,11	1,09
5000	276 457	276 456	276 457	7,94	10	117 726	117 281	117 498	0,38	2,52
10000	90 204	90 203	90 204	14,89	30	300 536	299 702	300 322	0,28	7,32

В одномерном случае во всех трех задачах $\delta < 0{,}0012\%$, поэтому в табл. 1 δ отсутствует, в остальных тестах для КР $\delta \leq 0{,}042\%$. При $n = 1000$ все 10 запусков достигли F^*. Для сравнения: ГА без специализированных операторов на тех же экземплярах имел отклонение 1,7–36,9%. Снижение ошибки сопровождалось ожидаемым ростом времени вычислений (при $n = 5000$ — с 4,01 до 7,94 с). Точные методы MinKnap и Combo справлялись с этими задачами быстрее, однако, в отличие от разработанного ГПГА, не смогли найти допустимые решения на экземплярах с большим диапазоном значений весов и стоимостей (10^7). На семи конфигурациях МКР ($n = 100$–500, $m = 5, 10, 30$) отклонения составили 0,11–0,71%. Характерно, что для сложного экземпляра $(n, m) = (500, 30)$ солвер IBM ILOG CPLEX (на платформе NEOS [4]) исчерпал лимит памяти через 10 203 с работы, так и не доказав оптимальность решения

300 536. ГППГА нашел сопоставимое по точности решение ($F_{\max} = 300\,322$) всего за 7,32 секунды. Таким образом, предложенный метод обеспечивает нахождение квазиоптимальных решений на рассмотренных инстансах (отклонение до 0,042% для КР и 0,71% для МКР) за приемлемое время.

Список литературы

[1] D. Pisinger, "Where are the hard knapsack problems?", *Computers & Operations Research*, **32**:9 (2005), 2271–2284. DOI: 10.1016/j.cor.2004.03.002.

[2] P. C. Chu, J. E. Beasley, "A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem", *Journal of Heuristics*, **4**:1 (1998), 63–86. DOI: 10.1023/A:1009642405419.

[3] *Parallel Metaheuristics: A New Class of Algorithms*, eds. E. Alba, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2005. DOI: 10.1002/0471739383.

[4] NEOS Server, *CPLEX solver*, https://neos-server.org/neos/solvers/lp:CPLEX/LP.html .

Статья поступила 23 октября 2026 г.

Hybrid Genetic Algorithms for Constrained Optimization Problems

A. E. Zavarukhin, M. S. Semishkin, E. V. Khvorostukhina

We present a hybrid genetic algorithm for one- and multidimensional knapsack problems. Its Rust implementation combines parallel island evolution, greedy chromosome repair, and local search.

Keywords: knapsack problem, multidimensional knapsack problem, genetic algorithm, parallel computing.

References

[1] D. Pisinger, "Where are the hard knapsack problems?", *Computers & Operations Research*, **32**:9 (2005), 2271–2284. DOI: 10.1016/j.cor.2004.03.002.

[2] P. C. Chu, J. E. Beasley, "A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem", *Journal of Heuristics*, **4** (1998), 63–86. DOI: 10.1023/A:1009642405419.

[3] *Parallel Metaheuristics: A New Class of Algorithms*, eds. E. Alba, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2005. DOI: 10.1002/0471739383.

[4] NEOS Server, *CPLEX solver*, https://neos-server.org/neos/solvers/lp:CPLEX/LP.html.

Received on October 23, 2026

Оценки активности схем из функциональных элементов, реализующих булевы операторы

Г. В. Калачев*

Для схем из функциональных элементов в стандартном базисе рассматриваются две меры активности: мощность — число элементов с единицей на выходе и P-активность — число элементов с единицей на входе или выходе. Для первой меры найден порядок функции Шеннона $\Theta(n + m \log n)$ для операторов с n входами и m выходами, $1 \leq m \leq 2^n$. Для второй получена нижняя оценка $\Omega(n \log n)$ для почти всех булевых функций. Оба результата справедливы для средней и максимальной мер.

Ключевые слова: булевы функции, схемы из функциональных элементов, мощность схем, активность схем, функция Шеннона.

1. Введение и определения

Мощность схем из функциональных элементов (СФЭ) исследуется начиная с работы М. Н. Вайнцвайга [1]. Для схемы Σ обозначим через $V(\Sigma)$ множество её функциональных элементов, а через $\varphi_v(x)$ — значение на выходе элемента $v \in V(\Sigma)$ при входном наборе $x \in \{0,1\}^n$. *Мощность* схемы Σ *на наборе* x определяется равенством

$$E(\Sigma, x) = \sum_{v \in V(\Sigma)} \varphi_v(x).$$

Заметим, что входные вершины в сумму для E не входят. Эти обозначения используются, в частности, в [3].

Другую меру — *P-активность* — исследовал О. М. Касим-Заде [2]. Пусть $\mathrm{In}(v)$ — список источников сигналов на входах элемента v, включая входы схемы. Тогда

$$P(\Sigma, x) = \sum_{v \in V(\Sigma)} \mathbf{1}\{\varphi_v(x) = 1 \text{ или } \exists u \in \mathrm{In}(v) : \varphi_u(x) = 1\},$$

* *Калачев Глеб Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

где для входной вершины $u = x_i$ полагаем $\varphi_u(x) = x_i$. Для $M \in \{E, P\}$ определим максимальную и среднюю меры схемы:

$$\widehat{M}(\Sigma) = \max_{x\in\{0,1\}^n} M(\Sigma, x), \qquad M(\Sigma) = 2^{-n} \sum_{x\in\{0,1\}^n} M(\Sigma, x).$$

Далее все схемы мы рассматриваем в стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Для булева оператора $F\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ положим, при $M \in \{\widehat{P}, P, \widehat{E}, E\}$,

$$M(F) = \min\bigl\{M(\Sigma) \;\big|\; \Sigma \text{ реализует } F\bigr\}, \quad M(n,m) = \max_{F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}^m} M(F).$$

При $m = 1$ в [3] получена оценка $\widehat{E}(\Sigma_f) \le (3 + o(1))n$ одновременно с асимптотически оптимальной сложностью $L(\Sigma_f) \le (1 + o(1))2^n/n$. Квадратичная верхняя оценка активности восходит к А. П. Горяшко [4], её применимость к P-активности обоснована в [2].

2. Результаты

Все логарифмы далее двоичные. Первый результат определяет порядок мощности реализации булевых операторов.

Теорема 1. *Равномерно по* $1 \le m \le 2^{2^n}$ *при* $n \to \infty$ *выполнено*

$$E(n,m) = \Theta\bigl(n + m\log n'\bigr), \qquad \widehat{E}(n,m) = \Theta\bigl(n + m\log n'\bigr),$$

где $n' := \max(2, n - \log\log(m+1))$.

В частности, при $1 \le m \le n/\log n$ мера E растёт линейно по n, а при $n/\log n \le m \le 2^{2^{o(n)}}$ — как $\Theta(m\log n)$.

Второй результат относится к P-активности.

Теорема 2. *Равномерно по* $1 \le m \le 2^{2^n}$ *при* $n \to \infty$ *выполнено*

$$\Omega(n\log n + m\log n') \le P(n,m) \le \widehat{P}(n,m) \le O(n^2 + m\log n'),$$

где $n' := \max(2, n - \log\log(m+1))$.

Дополнительная технически сложная часть, не сводящаяся к теореме 1, здесь заключается в нижней оценке $\Omega(n\log n)$ для булевых функций, всё остальное следует из теоремы 1 и квадратичной конструкции [2, 4]. В обеих теоремах нижняя оценка выполнена для почти всех операторов, то есть доля операторов, где она не выполнена, стремится к 0 при $n \to \infty$.

В частности, при $n^2/\log n \le m \le 2^{2^{o(n)}}$ имеем

$$P(n,m) = \Theta(m \log n), \qquad \widehat{P}(n,m) = \Theta(m \log n).$$

При этом при $m = 1$ теорема 2 даёт лишь

$$\Omega(n \log n) \le P(n,1) \le \widehat{P}(n,1) \le O(n^2).$$

Таким образом, теорема 2 даёт улучшение нижней оценки по сравнению с [2], однако порядок функции Шеннона для P-активности булевых функций остаётся открытым вопросом.

Для получения нижних оценок использовался метод расслоения, который в [5, разд. 4.2] применялся к мощности плоских схем: оценивается среднее число единиц на разрезах и суммируются вклады непересекающихся границ. Для обеих мер активности для булевых операторов используются разрезы по расстоянию до выходов, а для P-активности дополнительно — по расстоянию от входов для преобразованной схемы.

Заметим, что оценки из теоремы 2 переносятся также и на другие эквивалентные по порядку меры активности, например можно считать активность выходов элементов с учётом ветвления, число активных проводов или число элементов с активным входом — функция Шеннона таких мер активности будет равна по порядку P-активности.

Код доказательства теорем 1 и 2 в системе Lean 4 доступен по ссылке: `https://github.com/KalachevGleb/circuit-activity-lean/tree/v1.0`.

Об использовании инструментов ИИ

При работе над техническими деталями доказательств использовались модели GPT-6 Astra и GPT-6.1 Sol. Также использовалась модель Claude Opus 5.5 в составе инструмента Claude Code для написания кода на Lean для формальной верификации доказательств. Автор несёт полную ответственность за содержание статьи.

Список литературы

[1] М. Н. Вайнцвайг, “О мощности схем из функциональных элементов”, *Докл. АН СССР*, **139**:2 (1961), 320–323.

[2] О. М. Касим-Заде, “Об одной мере активности схем из функциональных элементов”, *Математические вопросы кибернетики*, Вып. 4, Наука, М., 1992, 218–228.

[3] С. А. Ложкин, М. С. Шуплецов, “О динамической активности схем из функциональных элементов и построении асимптотически оптимальных по сложности схем с линейной динамической активностью”, *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, **156**:3 (2014), 84–97.

[4] А. П. Горяшко, "Энергетические оценки сложности функционирования логических сетей", *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*, 1969, № 2, 86–95.

[5] Г. В. Калачев, "Нижние оценки мощности плоских схем, реализующих частичные булевы операторы", *Интеллектуальные системы*, **18**:2 (2014), 279–322.

Статья поступила 26 октября 2026 г.

Bounds on the Activity of Boolean Circuits Implementing Boolean Operators

G. V. Kalachev

We consider two activity measures for Boolean circuits over the standard basis: the power (the number of gates whose output is one) and the P-activity (the number of gates having one on an input or on the output). For the first measure, the Shannon function for operators with n inputs and m outputs is shown to have order $\Theta(n + m \log n)$ for $1 \leq m \leq 2^n$. For the second measure, we obtain an $\Omega(n \log n)$ lower bound for almost all Boolean functions. Both results hold for the average and the maximum measures.

Keywords: Boolean functions, Boolean circuits, circuit power, circuit activity, Shannon function.

References

[1] M. N. Vaintsvaig, "On the power of networks of functional elements", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **139**:2 (1961), 320–323 (In Russian).

[2] O. M. Kasim-Zade, "On a measure of the activeness of circuits made of functional elements", *Mathematical Problems of Cybernetics*, Issue 4, Nauka, Moscow, 1992, 218–228 (In Russian).

[3] S. A. Lozhkin, M. S. Shupletsov, "On the dynamic activity of Boolean circuits and synthesis of circuits with asymptotically optimal complexity and linear dynamic activity", *Uchen. Zap. Kazan. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **156**:3 (2014), 84–97 (In Russian).

[4] A. P. Goryashko, "Energy estimates of the complexity of functioning of logical networks", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Tekhn. Kibernet.*, 1969, № 2, 86–95 (In Russian).

[5] G. V. Kalachev, "Lower bounds for the power of planar circuits implementing partial Boolean operators", *Intellektual'nye Sistemy*, **18**:2 (2014), 279–322 (In Russian).

Received on October 26, 2026

О числе вершин выпуклого многоугольника, попадающих на прямую Брезенхема

А. А. Касай*

В статье исследуется вопрос о максимальном числе вершин выпуклого целочисленного многоугольника, которые могут одновременно оказаться на прямой Брезенхема при её параллельном переносе вдоль рационального вектора. В отличие от классической задачи линейного программирования с непостоянной линейной целевой функцией, где экстремум достигается не более чем в двух вершинах, в дискретном случае число вершин, одновременно лежащих на прямой Брезенхема, может быть сколь угодно большим.

Ключевые слова: прямая Брезенхема, выпуклая оболочка, целочисленная решётка, рациональный тангенс.

1. Введение и формулировка результата

Известно, что в задаче линейного программирования выпуклый многоугольник задаёт область, в которой ищется экстремум целевой функции. Если линейная целевая функция непостоянна на этом многоугольнике, экстремум достигается в вершинах выпуклого многоугольника, причём, как известно, не более чем в двух вершинах.

Если перенести целевую прямую на целочисленную решётку, заменяя её прямым дискретным аналогом, возникает естественный вопрос: сколько вершин выпуклого целочисленного многоугольника может одновременно лежать на прямой Брезенхема при её параллельном переносе? В настоящей работе показано, что таких точек может быть неограниченное количество, что демонстрирует принципиальное отличие дискретной постановки от классической.

Прямой Брезенхема назовём дискретное приближение евклидовой прямой $y = kx + b$ (где $k = p/q$ — несократимая дробь, $p \geq q$) в целочисленной решётке $\mathbb{Z}^2$, построенное по принципу алгоритма Брезенхема [1]: прямая разбивается на циклы, состоящие из q вертикальных ступеней,

* *Касай Анна Алексеевна* — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anna.kasai@math.msu.ru, ORCID: 0009-0002-2715-5267.

Kasai Anna Alekseevna — Student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

каждая из которых имеет высоту $m = \lfloor p/q \rfloor$ или $m + 1$, причём ровно $p \bmod q$ ступеней имеют высоту $m + 1$, а их расположение определяется условием $x_i = \lceil \frac{1}{k} y_i - \frac{b}{k} \rceil$, $i \in \mathbb{Z}$. Здесь $[\cdot]$ обозначает округление до ближайшего целого, при котором полуцелое значение округляется вверх: $[x] = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Случай $p < q$ сводится к рассмотренному переобозначением осей.

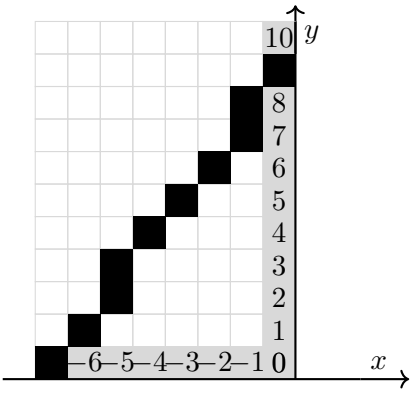


Рис. 1: Пример прямой Брезенхема, где $p = 9$, $q = 7$ (прямая $y = \frac{9}{7}x + 9$)

Определим *функцию* ν, заданную на множестве наклонов прямых: для невертикальной прямой с тангенсом $k = p/q$ (несократимая дробь) значение $\nu(k)$ есть наибольшее число вершин выпуклого многоугольника $G \subset \mathbb{R}^2$ с вершинами в $\mathbb{Z}^2$, способных одновременно попасть на прямую Брезенхема с тангенсом k при её параллельном переносе; для вертикального направления (тангенс не определён) полагаем $\nu(\infty) = 2$, где символ ∞ обозначает вертикальный наклон.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$.

1. *Если тангенс прямой равен* m, *то* $\nu(m) = |2m|$;
2. *Для* m *существует такая последовательность тангенсов* $\{k_i\}$, *где* $k_i \in (m, m + 1]$, *что* $\lim\limits_{k_i \to m} \nu(k_i) = \infty$;
3. *Если прямая вертикальная или горизонтальная (тангенс* k *прямой не определён или* $k = 0$ *соответственно), то* $\nu(k) = 2$.

Замечание 1. Так как все симметрично, другие тангенсы получаются с помощью поворотов и отражений.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и научное руководство, внимание к работе и всестороннюю поддержку.

2. Идея доказательства теоремы

1)Будем называть точки выпуклого многоугольника, отмеченные на прямой, *цепочкой*. Рассматриваем самую длинную «цепочку». В ней обязательно найдутся две подряд идущие точки, соединённые прямой с тангенсом m; эти две точки считаем «началом цепочки». Из выпуклости оболочки следует монотонность наклонов: при движении вверх от начала цепочки тангенсы должны уменьшаться, а при движении вниз — увеличиваться. Нумеруем клетки в каждом блоке числами $1, \ldots, m$. Тогда в нижней половине цепочки каждый номер может встретиться не более одного раза: если сейчас стоит номер n, то следующим можно взять только номер больше n, иначе тангенс не увеличится. Аналогично, в верхней половине. Значит, всего точек не больше $2m$, то есть $\nu(m) \leq 2m$.

Оценка достигается: нужно выбирать номера клеток по порядку, но пропускать блоки так, чтобы тангенс отдалялся от m. При движении вверх пропускаем $m-2, m-3, \ldots, 0$ блоков, аналогично вниз. Так отмечаются $m-1$ точек сверху, $m-1$ снизу и ещё 2 в «начале», итого $2m$.

2)Пусть $m > 0$, приведем последовательность тангенсов $\{k_i\}$, где $k_i \in (m, m+1]$ и для каждого k_i покажем пример построения точек на прямой («цепочки») (не обязательно максимальной по длине) так, что количество точек будет стремиться к бесконечности. Тогда и $\nu \to \infty$.

Возьмем $k_i = m + 1/(i+1)$, то есть i блоков длины m и один блок длины $m+1$. Очевидно, $k_i \to m$.

Будем изображать прямые схематично и пронумеруем короткие блоки парой чисел (a, b), указывающей на номер цикла и номер блока в нем:

$$\underset{(0,1)}{m}\ \underset{(0,2)}{m}\ \ldots\ \underset{(0,i)}{m}\ (m+1)\ \underset{(1,1)}{m}\ \underset{(1,2)}{m}\ \ldots\ \underset{(1,i)}{m}\ (m+1)\ \underset{(2,1)}{m}\ \ldots\ \underset{(2,i)}{m}\ (m+1)\ldots$$

При построении примеров достаточно будет отмечать лишь самые нижние точки, поэтому далее словосочетание «отмеченный блок» подразумевает отмеченную в этом блоке точку с номером m. Будем отмечать блоки $(0,1), (1,1), (2,2), (3,4), (4,7)...(l, (l^2-l+2)/2)$, пока вторая координата не превосходит i. Тогда тангенсы между отмеченными точками будут соответственно равны $k_i = m+1/(i+1) > m+1/(i+2) > m+\frac{1}{i+3} > \cdots > m+\frac{1}{i+l}$. Очевидно, что при стремлении $i \to \infty$ получим также и $l \to \infty$, а значит, и количество отмеченных точек для тангенса k_i будет стремиться к бесконечности.

3) Очевидно.

Список литературы

[1] Д. Роджерс, *Алгоритмические основы машинной графики*, Мир, М., 1989 .

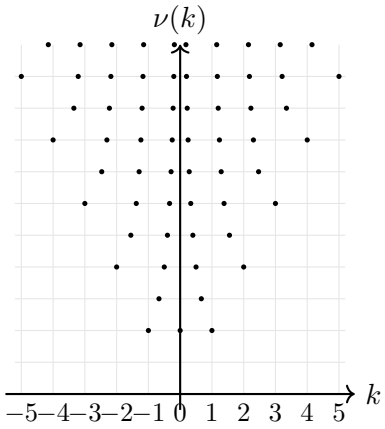


Рис. 2: Схематичное изображение поведения нижней оценки $\nu(k)$

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

On the number of vertices of a convex polygon that lie on the Bresenham line.

A. A. Kasai

The article examines the question of the maximum number of vertices of a convex integer polygon that can simultaneously lie on a Bresenham line when it is translated parallel to a rational vector. Unlike the classical linear programming problem with a non-constant linear objective function, where the extremum is achieved in no more than two vertices, in the discrete case the number of vertices simultaneously lying on a Bresenham line can be arbitrarily large.

Keywords: Bresenham's line algorithm, convex hull, integer lattice, rational tangent .

References

[1] D. Rogers, *Algorithmic foundations of computer graphics*, Mir, Moscow, 1989 (in Russian).

Received on November 6, 2026

О λ-сложности системы из четырех одночленов от трех переменных

В. В. Кочергин*, О. В. Ярыгин‡

Исследуется минимальное число операций умножения и возведения в рациональные степени из интервала $(0; 2)$, достаточное для вычисления произвольной системы из четырех одночленов от трех переменных. Установлено, что эта величина равна $\log_2 D(A) + O(1)$, где A — целочисленная неотрицательная матрица показателей степеней без нулевых строк, а $D(A)$ — максимум модулей всех миноров матрицы A.

Ключевые слова: схемная сложность, задача Пиппенджера, сложность вычислений, системы одночленов, λ-схемы.

В работе исследуется задача Пиппенджера [1], которая заключается в нахождении для системы одночленов

$$f_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_q^{a_{1q}}, \quad f_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_q^{a_{2q}}, \quad \dots, \quad f_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_q^{a_{pq}}$$

сложности $l(f_1, f_2, \dots, f_p)$ их совместного вычисления, под которой понимается минимально возможное число операций умножения, достаточное для вычисления по переменным $x_1, x_2, \dots, x_q$ одночленов $f_1, f_2, \dots f_p$. Набор одночленов $f_1, f_2, \dots f_p$ однозначно задается целочисленной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$ с неотрицательными коэффициентами без нулевых строк, и поэтому вместо сложности реализации системы одночленов $f_1, f_2, \dots f_p$ можно говорить о *сложности* $l(A)$ *матрицы* A.

Как следует из [2], нахождение точного значения величины $l(A)$ в общем случае — NP-трудная задача. Однако оказалось, что установить даже асимптотику роста сложности $l(A)$ при условии $\max\{a_{ij}\} \to \infty$ в общем случае также чрезвычайно трудно. К настоящему времени асимптотика последовательно установлена [3–5] только для последовательностей матриц размеров 2×2, $p \times 2$, $2 \times q$ и 3×3. Во всех указанных случаях асимптотика имеет вид

$$l(A) \sim \log_2 D(A),$$

* *Кочергин Вадим Васильевич* — зав. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vvkoch@yandex.ru.

Kochergin Vadim Vasil'evich — Head of Chair of Discrete Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics.

‡ *Ярыгин Олег Витальевич* — старший менеджер продукта, АО «Райффайзенбанк», e-mail: oyarygin.oleg@yandex.ru.

Yarygin Oleg Vital'evich — Senior Product Manager, Raiffeisenbank JSC.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

где $D(A)$ — максимум абсолютных величин всех миноров матрицы A, от элементов матрицы до миноров порядка $\min(p,q) \times \min(p,q)$. При этом известен [5] пример последовательности матриц A_n размера 4×4, для которой верно асимптотическое равенство $l(A_n) \sim \frac{4}{3} \log_2 D(A_n)$.

К сожалению, за последние почти 20 лет существенных продвижений в исследовании задачи Пиппенджера практически не было. До сих пор даже не выдвинуто правдоподобной гипотезы об асимптотике роста сложности квадратных матриц порядка 4.

В настоящей работе изучается случай матриц размера 4×3. В качестве вычислительной модели рассматриваются λ-схемы (см., например, [3, 5]), которые наряду с операцией умножения допускают использование операции возведения в любые рациональные степени из интервала $(0; 2)$. Соответственно, наименьшее число операций этих двух типов, достаточное для вычисления системы одночленов, задаваемых матрицей A, обозначается через $\lambda(A)$.

Ключевым свойством вычислений посредством λ-схем является полная определенность со сложностью возведения в степень: в то время как в классической модели при возведении в степень n (в аддитивной постановке — при построении аддитивной цепочки для n) минимально возможное число операций оценивается величиной

$$\log_2 n + \frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}(1 + o(1)),$$

причем для почти всех значений n эта оценка неулучшаема — см., например, [6–8], — для вычисления λ-схемами справедливо простое равенство $\lambda(x^n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Учитывая, что, как показано в [3, 5], при слабых ограничениях λ-схему можно преобразовать в схему из умножений без асимптотического увеличения сложности, модель λ-схем позволяет при исследовании сложности реализации систем одночленов выделить «содержательную» составляющую вычислений, не отвлекаясь на «техническую».

Теорема. *Существует абсолютная константа C, такая, что для любой целочисленной неотрицательной матрицы A размера 4×3 без нулевых строк справедливы неравенства*

$$\log_2 D(A) \le \lambda(A) \le \log_2 D(A) + C.$$

Нижняя оценка доказывается аналогично универсальной нижней оценке из [5] и в отличие от верхней не представляет особого интереса. Доказательство верхней оценки базируется на существенном развитии методов из [4] и включает в себя ряд технических утверждений, в частности, леммы с оценкой сложности через произведение элементов, находящихся

в разных строках и столбцах, и с оценками сложности реализации матриц с нулем в каждой строке, леммы, основанные на масштабировании опорного одночлена, использовании соображений двойственности, а также на возможности сведения задачи для произвольной матрицы к задаче для разреженной матрицы.

Список литературы

[1] Pippenger N., "On evaluation of powers and monomials", *SIAM Journal on Computing*, **9**:2 (1980), 230–250. DOI: 10.1137/0209022.

[2] Downey P., Leong B., Sethi R., "Computing sequences with addition chains", *SIAM Journal on Computing*, **10** (1981), 638–646. DOI: 10.1137/0210047.

[3] Кочергин В. В., "О сложности вычисления системы из трех одночленов от трех переменных", *Математические вопросы кибернетики*, **15**, Физматлит, Москва, 2006, 79–155.

[4] Кочергин В. В., "Простое доказательство верхней оценки сложности вычисления трех одночленов трех переменных", *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*, 2019, № 2, 3–8.

[5] Кочергин В. В., "Задачи Беллмана, Кнута, Лупанова, Пиппенджера и их вариации как обобщения задачи об аддитивных цепочках", *Математические вопросы кибернетики*, **20**, Физматлит, Москва, 2022, 119–256. DOI: 10.20948/mvk-2022-119.

[6] Brauer A., "On addition chains", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45** (1939), 736–739. DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07068-7.

[7] Erdős P., "Remarks on number theory, III: On addition chains", *Acta Arithmetica*, **6** (1960), 77–81. DOI: 10.4064/aa-6-1-77-81.

[8] Кнут Д. Е., *Искусство программирования*, 3-е изд., **2**, Издательский дом «Вильямс», Москва, 2000 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

On the λ-complexity of a system of four monomials in three variables

V. V. Kochergin, O. V. Yarygin

We study the minimum number of multiplications and exponentiations to rational powers in the interval $(0, 2)$ sufficient to compute an arbitrary system of four monomials in three variables. This number is shown to be $\log_2 D(A) + O(1)$, where A is the nonnegative integer matrix of exponents with no zero rows, and $D(A)$ is the maximum absolute value of all minors of A.

Keywords: circuit complexity, Pippenger's problem, computational complexity, systems of monomials, λ-circuits.

References

[1] Pippenger N., "On evaluation of powers and monomials", *SIAM Journal on Computing*, **9**:2 (1980), 230–250. DOI: 10.1137/0209022.

[2] Downey P., Leong B., Sethi R., "Computing sequences with addition chains", *SIAM Journal on Computing*, **10** (1981), 638–646. DOI: 10.1137/0210047.

[3] Kochergin V. V., "On the complexity of computing a system of three monomials in three variables", *Mathematical Problems of Cybernetics*, **15**, Fizmatlit, Moscow, 2006, 79–155, (In Russian).

[4] Kochergin V. V., "A simple proof for the upper bound of the computational complexity of three monomials in three variables", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:2 (2019), 43–48. DOI: 10.3103/S0027132219020013.

[5] Kochergin V. V., "Problems of Bellman, Knuth, Lupanov, Pippenger and their variations as generalizations of the addition chain problem", *Mathematical Problems of Cybernetics*, **20**, Fizmatlit, Moscow, 2022, 119–256. DOI: 10.20948/mvk-2022-119, (In Russian).

[6] Brauer A., "On addition chains", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **45** (1939), 736–739. DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07068-7.

[7] Erdős P., "Remarks on number theory, III: On addition chains", *Acta Arithmetica*, **6** (1960), 77–81. DOI: 10.4064/aa-6-1-77-81.

[8] Knuth D. E., *The Art of Computer Programming*, 3rd ed., **2**, Vil'yams, Moscow, 2000, (In Russian).

Received on October 24, 2026

Применение различных способов задания аддитивных характеров конечного поля к изучению свойств дискретных функций

В. Г. Рябов*

Наряду с каноническим способом задания аддитивных характеров конечного поля составного порядка предложен альтернативный способ - на основе векторного представления поля. Для обоих способов найдены множества групп характеров с различной параметризацией и установлены отношения между ними. Получены формулы, связывающие разностные и нелинейные свойства отображений над конечными полями со спектрами Фурье их характеров.

Ключевые слова: конечное поле, характер, векторная функция, разностный спектр, нелинейность, коэффициенты Фурье.

Решается *задача*: определить еще один способ задания аддитивных характеров конечного поля составного порядка, показать его связь с широко применяемым каноническим способом задания, а также продемонстрировать преимущества каждого из способов при исследовании важных с точки зрения приложений на базе ИИ свойств векторных функций над конечными полями с использованием аппарата гармонического анализа.

Пусть $\mathbb{F}_q$ – поле из q элементов, где $q = p^r$, а $(\mathbb{F}_q, +)$ – его аддитивная группа. Простое поле $\mathbb{F}_p$ изоморфно кольцу вычетов $\mathbb{Z}_p$. Характер группы $(\mathbb{F}_p q, +)$ с индексом a задается соотношением $\chi_a(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}ax}$. Для полей составного порядка ($r \geqslant 2$) аналогом $\mathbb{Z}_p$ выступает факторкольцо многочленов $\mathbb{F}_p[x]/(g(x))$, где $g(x)$ – неприводимый унитарный многочлен над $\mathbb{F}_p$ степени r, от выбора которого зависит умножение в полях составного порядка $q > 4$. *Канонический характер* определяется как $\chi_1(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}Tr(x)}$, где $Tr(x)$ – функция абсолютного следа. Остальные аддитивные характеры имеют вид $\chi_a(x) = \chi_1(ax) = e^{\frac{2\pi i}{p}Tr(ax)}$. В поле составного порядка индексация одних и тех же аддитивных характеров в группе зависит от задания умножения и, соответственно, выбора многочлена $g(x)$. Обозначим через $\mathbf{G}\chi(r, p)$ множество групп канонически заданных характеров с различной параметризацией.

Как и в [2], определим альтернативные аддитивные характеры. Обозначим $\mathbb{F}_q^n$ пространство размерности n над полем $\mathbb{F}_q$. Всякое поле $\mathbb{F}_q$ можно

* *Рябов Владимир Геннадьевич* — канд. физ.-мат. наук, независимый исследователь, e-mail: 4vryabov@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6981-4238.

Ryabov Vladimir Gennadievich — cand. phys.-math. scien., independent researcher.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

представить пространством $\mathbb{F}_p^r$. Пусть базис Θ пространства $\mathbb{F}_p^r$ состоит из векторов $\theta_1, \dots \theta_r$. Тогда каждый элемент $a \in \mathbb{F}_q$ однозначно представляется комбинацией $\tilde{a}_1\theta_1 + \dots + \tilde{a}_r\theta_r$, где $\tilde{a}_1, \dots \tilde{a}_r \in \mathbb{F}_p$. Вектор $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r) \in \mathbb{F}_p^r$ будем называть *проекцией элемента a в базисе Θ*. Для элементов a и b поля $\mathbb{F}_q$ через $\langle a, b\rangle_\Theta$ будем обозначать скалярное произведение их проекций в базисе Θ. Тогда *альтернативный аддитивный характер* поля имеет вид $\psi_a^\Theta(x) = \prod_{j=1}^r \chi_{\tilde{a}_j}(\tilde{x}_j) = e^{\frac{2\pi i}{p}\sum_{j=1}^r \tilde{a}_j\tilde{x}_j} = e^{\frac{2\pi i}{p}\langle a,x\rangle_\Theta}$. В отличие от канонического задания индексация альтернативных характеров не связана с умножением, но зависит от выбора базиса Θ. Невырожденные линейные преобразования пространства $\mathbb{F}_p^r$, сохраняющие скалярное произведение, задают базисы с одинаковой индексацией и образуют ортогональную группу с известным порядком. Тогда мощность множества групп альтернативных характеров с различной параметризацией $\mathbf{G}\psi(r,p)$ определяется как частное от деления числа базисов на порядок ортогональной группы. Определим отношение между множествами групп характеров при каноническом и альтернативном задании.

Теорема 1. *Для полей порядка q, где $q = p^r$ и $r \geqslant 2$, в случаях четного q или нечетных q и r имеем включение $\boldsymbol{G}\chi(r,p) \subset \boldsymbol{G}\psi(r,p)$, а в случае нечетного q и четного r – соотношение $\boldsymbol{G}\chi(r,p) \cap \boldsymbol{G}\psi(r,p) = \varnothing$.*

При доказательстве Теоремы 1 использовались результаты [4] о существовании *самодуального базиса* относительно абсолютного следа. Теорема 1 позволяет для большинства составных полей найти канонически заданные характеры через альтернативные в самодуальном базисе.

На основе заданных канонически характеров поля $\mathbb{F}_q$ можно определить характеры векторного пространства $\mathbb{F}_q^n$ следующим образом: $\chi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = e^{\frac{2\pi i}{p}Tr\left(\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle\right)}$, где $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots a_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$, а $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{F}_q^n$. В случае альтернативных характеров имеем $\psi_{\boldsymbol{a}}^\Theta(\boldsymbol{x}) = e^{\frac{2\pi i}{p}\sum_{t=1}^n \langle a_t,x_t\rangle_\Theta}$. Каждое из множеств $\{\chi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{a} \in \mathbf{F}_q^n\}$ и $\{\psi_{\boldsymbol{a}}^\Theta(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{a} \in \mathbf{F}_q^n\}$ образует мультипликативную группу характеров пространства $\mathbf{F}_q^n$, изоморфную $(\mathbf{F}_q^n, +)$, и является ортонормированным базисом пространства комплекснозначных отображений пространства $\mathbf{F}_q^n$.

Обозначим через $P_q^{n,m}$ множество отображений $\mathbf{F}_q^n$ в $\mathbf{F}_q^m$. Будем также называть их *векторными функциями*. Пусть $\phi_{\boldsymbol{b}}$ – аддитивный характер пространства $\mathbb{F}_q^m$, заданный любым из двух способов. Тогда по аналогии с [2, 3] назовем *характером векторной функции* $F \in P_q^{n,m}$ комплекснозначную композицию характера $\phi_{\boldsymbol{b}}$ и самого отображения F вида $\phi_{\boldsymbol{b}}(F(\boldsymbol{x}))$. Разложение $\phi_{\boldsymbol{b}}(F(\boldsymbol{x}))$ в ряд Фурье по базису $\{\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{a} \in \mathbf{F}_q^n\}$ имеет вид $\phi_{\boldsymbol{b}}(F(\boldsymbol{x})) = \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}_q^n} c_{\boldsymbol{b}}^F(\boldsymbol{a})\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$, где $c_{\boldsymbol{b}}^F(\boldsymbol{a}) =$

$\frac{1}{q^n}\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{F}_q^n}\phi_{\boldsymbol{b}}(F(\boldsymbol{x}))\overline{\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}$. В случае канонического и альтернативного задания коэффициенты имеют вид $c_{\boldsymbol{b}}^F(\boldsymbol{a})=\frac{1}{q^n}\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{F}_q^n}e^{\frac{2\pi i}{p}Tr\left(\langle\boldsymbol{b},F(\boldsymbol{x})\rangle-\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\rangle\right)}$ и $c_{\boldsymbol{b}}^{F,\Theta}(\boldsymbol{a})=\frac{1}{q^n}\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{F}_q^n}e^{\frac{2\pi i}{p}\left(\sum_{s=1}^m\langle b_s,f_s(\boldsymbol{x})\rangle_\Theta-\sum_{t=1}^n\langle a_t,x_t\rangle_\Theta\right)}$, где $(f_1,\ldots,f_m)$ – набор координатных функций отображения F.

Разностным спектром векторной функции $F\in P_q^{n,m}$ называется множество значений $\delta_{\boldsymbol{v}}^F(\boldsymbol{u})=|\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{F}_q^n\mid F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})-F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}\}|$ для всевозможных $\boldsymbol{u}\in\mathbf{F}_q^n$ и $\boldsymbol{v}\in\mathbf{F}_q^m$. Поскольку этот спектр не зависит от операции умножения, воспользуемся альтернативными характерами.

Теорема 2. *Пусть $F\in P_q^{n,m}$, Θ – базис $\mathbb{F}_p^r$. Тогда для $\forall\boldsymbol{u}\in\mathbf{F}_q^n$ и $\forall\boldsymbol{v}\in\mathbf{F}_q^m$*

$$\delta_{\boldsymbol{v}}^F(\boldsymbol{u})=q^{n-m}\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbf{F}_q^m}\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbf{F}_q^n}|c_{\boldsymbol{b}}^{F,\Theta}(\boldsymbol{a})|^2\;e^{\frac{2\pi i}{p}\left(\sum_{s=1}^m\langle b_s,v_s\rangle_\Theta-\sum_{t=1}^n\langle a_t,u_t\rangle_\Theta\right)},$$

а для $\forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{F}_q^n$ и $\forall\boldsymbol{b}\in\mathbf{F}_q^m$ имеем[1]

$$|c_{\boldsymbol{b}}^{F,\Theta}(\boldsymbol{a})|^2=\frac{1}{q^{2n}}\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbf{F}_q^m}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{F}_q^n}\delta_{\boldsymbol{v}}^F(\boldsymbol{u})\;e^{-\frac{2\pi i}{p}\left(\sum_{s=1}^m\langle b_s,v_s\rangle_\Theta-\sum_{t=1}^n\langle a_t,u_t\rangle_\Theta\right)}.$$

Обозначим через $\mathbf{M}_q^{m,n}$ множество матриц $m\times n$ над $\mathbf{F}_q$. Всякое аффинное отображение $A\in P_q^{n,m}$ может быть представлено в виде $\boldsymbol{a}_0+\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{a}_0=(a_{1,0},\ldots,a_{m,0})^T\in\mathbf{F}_q^m$, $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_q^{m,n}$, а $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbf{F}_q^n$. Пусть A соответствует матрица $[\boldsymbol{a}_0,\mathbf{A}]\in\mathbf{M}_q^{m,n+1}$, полученная добавлением $\boldsymbol{a}_0$ левым столбцом к $\mathbf{A}$. Для отображений F и G из $P_q^{n,m}$ обозначим через $C(F,G)$ число аргументов с одинаковыми значениями. Тогда под *спектром нелинейности* векторной функции $F\in P_q^{n,m}$ будем понимать множество значений вида $\mathfrak{d}_{[\boldsymbol{a}_0,\mathbf{A}]}^F=\frac{C(F,A)}{q^n}-\frac{1}{q^m}$ для всех аффинных отображений $A\in P_q^{n,m}$, где матрица $[\boldsymbol{a}_0,\mathbf{A}]$ отвечает A. Он зависит от умножения, и здесь используем канонически заданные характеры.

Теорема 3. *Пусть $F\in P_q^{n,m}$. Тогда для $\forall[\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{A}]\in\boldsymbol{M}_q^{m,n+1}$ имеем*

$$\mathfrak{d}_{[\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{A}]}^F=\frac{1}{q^m}\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbf{F}_q^m\setminus\{\boldsymbol{0}\}}c_{\boldsymbol{b}}^F(\boldsymbol{b}\boldsymbol{A})\;e^{-\frac{2\pi i}{p}Tr(\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_0\rangle)},$$

а для $\forall\boldsymbol{b}\in\mathbf{F}_q^m\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ и $\forall\boldsymbol{a}\in\mathbf{F}_q^n$ справедливо равенство

$$c_{\boldsymbol{b}}^F(\boldsymbol{a})=\sum_{\boldsymbol{a}_0\in\mathbf{F}_q^m}\mathfrak{d}_{[\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}]}^F\;e^{\frac{2\pi i}{p}Tr(\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_0\rangle)},$$

где матрица $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{M}_q^{m,n}$ выбирается так, что $\boldsymbol{b}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}$.

[1] Для скалярной функции аналогичное равенство было представлено в [1].

Список литературы

[1] А. С. Амбросимов, "Свойства бент-функций q-значной логики над конечными полями", *Дискретная математика*, **6**:3 (1994), 50–60.

[2] В. Г. Рябов, "Нелинейность векторных функций над конечными полями", *Дискретная математика*, **36**:2 (2024), 50–70. DOI: 10.4213/dm1822.

[3] В. И. Солодовников, "Бент-функции из конечной абелевой группы в конечную абелеву группу", *Дискретная математика*, **14**:1 (2002), 99–113. DOI: 10.4213/dm234.

[4] G. Seroussi, A. Lempel, "Factorization of symmetric matrices and trace-orthogonal bases in finite fields", *SIAM Jour. on Comp.*, **9**:4 (1980), 758–767. DOI: 10.1137/0209059.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Application of various methods for defining additive characters of a finite field to the study of the properties of discrete functions

V. G. Ryabov

In addition to the canonical method of defining additive characters of a finite field of composite order via the absolute trace function, an alternative approach is proposed, based on the vector-space representation of the field. For both methods, sets of character groups with distinct parameterizations are identified, and the relationships between them are established. Formulas are derived that link the differential and nonlinear properties of mappings over finite fields to the Fourier spectra of their characters.

Keywords: finite field, character, vectorial function, difference spectrum, nonlinearity, Fourier coefficients.

References

[1] A. S. Ambrosimov, "Properties of bent functions of q-valued logic over finite fields", *Diskretnaya Matematika*, **6**:3 (1994), 50–60 (in Russian).

[2] V. G. Ryabov, "Nonlinearity of vectorial functions over finite fields", *Diskretnaya Matematika*, **36**:2 (2024), 50–70 (in Russian).

[3] V. I. Solodovnikov, "Bent functions from a finite abelian group into a finite abelian group", *Diskretnaya Matematika*, **14**:1 (2002), 99–113 (in Russian).

[4] G. Seroussi, A. Lempel, "Factorization of symmetric matrices and trace-orthogonal bases in finite fields", *SIAM Jour. on Comp.*, **9**:4 (1980), 758–767.

Received on November 9, 2026

Машинный базис по суперпозиции в классе обратимых элементарных функций

И. В. Савицкий*

Приводится новый базис по суперпозиции в классе инъективных функций, принадлежащих вместе со своими обратными обобщению класса $\mathcal{E}^3$ на частичные функции. Базис получен с помощью арифметизации обратимых счётчико-сумматорных машин.

Ключевые слова: обратимые вычисления, базис по суперпозиции, счётчико-сумматорные машины.

1. Введение

Исследования теоретических оснований обратимых вычислений ведутся в двух направлениях. Первое направление предполагает задание функций с помощью абстрактных вычислительных устройств: например, в [5] введена модель обратимой машины Тьюринга и продемонстрирована возможность производить с её помощью вычисления произвольной сложности. В работе автора [4] введён другой тип обратимого абстрактного устройства — счётчико-сумматорные машины, хранящие данные в виде чисел в сумматорах и имеющие автоматически меняющиеся счётчики.

В рамках второго направления изучается возможность построения сложных обратимых функций из простых при помощи суперпозиции и других операций над функциями. Так, в статье [1] строятся базисы по суперпозиции для перестановок из некоторых сложностных классов, включая класс $\mathcal{E}^3$ иерархии Гжегорчика. Этот класс также называют классом функций, элементарных по Кальмару, и он характеризует вычисления, сложность которых выражается степенной башней конечной высоты от длины входа.

В этой работе вводится новый базис по суперпозиции в классе обратимых функций, принадлежащих вместе со своими обратными классу $\mathcal{E}^3$ (точнее, его обобщению на частичные функции). Существование базиса

* *Савицкий Игорь Владимирович* — к.ф.-м.н., асс. каф. математической кибернетики ф-та ВМК МГУ, e-mail: savvvig@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3433-8096.

Savitskii Igor Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

в этом классе легко вывести из результатов [1], но приводимый здесь базис имеет другой вид: он получен с помощью арифметизации счётчико-сумматорных машин из [4] после ряда их модификаций. Используемый подход следует работам [2, 3], в которых арифметизируются машины для вычисления произвольных (необязательно обратимых) функций. Результат демонстрирует применимость этого подхода к обратимым вычислениям.

2. Базис по суперпозиции

Символом $\mathbb{N}_0$ будем обозначать множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Там, где это не вызывает недоразумения, будем записывать $\bar{x}$ вместо $x_1, \ldots, x_n$.

Рассматриваем функции $f\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, вообще говоря, частичные. Функцию $x - y$ считаем не определённой при $x < y$. Через $\mathrm{rm}(x, y)$ обозначаем остаток от деления x на y (0 при $y = 0$).

Пусть $\mathrm{c}(x, y) = (x + y)^2 + x$. Эта функция инъективным образом нумерует пары чисел. Обобщим нумерацию на наборы из $n \geqslant 2$ элементов:

$$\mathrm{c}^n(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{c}(\mathrm{c}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}),\, x_n).$$

Будем использовать обозначение

$$(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})) \to (g_1(\bar{x}), \ldots, g_l(\bar{x}))$$

для функции h одной переменной такой, что

$$h(\mathrm{c}^m(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))) = \mathrm{c}^l(g_1(\bar{x}), \ldots, g_l(\bar{x})).$$

Значения h, не заданные этим равенством, считаем не определёнными.

Операция *суперпозиции* включает в себя подстановку функций вместо переменных, перестановку и отождествление переменных.

Функция $f(\bar{x}, y)$ получается из функций $g(\bar{x})$, $h(\bar{x}, y, z)$, $j(\bar{x}, y)$ с помощью операции *ограниченной примитивной рекурсии*, если области определения f и j совпадают и для любых $\bar{x} \in \mathbb{N}_0^n,\ y \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$\begin{cases} f(\bar{x},\, 0) = g(\bar{x}), \\ f(\bar{x},\, y+1) = h(\bar{x},\, y,\, f(\bar{x}, y)), \\ f(\bar{x},\, y) \leqslant j(\bar{x},\, y). \end{cases}$$

В качестве класса элементарных функций будем рассматривать естественное обобщение класса $\mathcal{E}^3$ иерархии Гжегорчика на случай частичных функций. Обозначим $\mathcal{E}^3_{\mathrm{part}}$ замыкание системы $\{0,\ x+1,\ x^y,\ x-y\}$ относительно операций суперпозиции и ограниченной примитивной рекурсии.

У любой инъективной частичной функции $F\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0^m$ существует единственная обратная ей частичная функция $F^{-1}\colon \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0^n$, область определения которой совпадает с областью значений F.

Будем говорить, что инъективная функция $f\colon \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ принадлежит классу $\mathcal{E}^3_{\text{part}}$ вместе со своей обратной, если $f(\bar{x})$, $\mathrm{c}^n(f^{-1}(y)) \in \mathcal{E}^3_{\text{part}}$.

Через $x[y]_T$ обозначим y-ю по старшинству цифру (0 соответствует младшей цифре) числа x в позиционной системе счисления с основанием T; при $T = 0, 1$ функция выдаёт 0. Далее $x\{y\}_T = x[\mathrm{rm}(y,\, \mathrm{len}_T(x))]_T$, где $\mathrm{len}_T(x)$ — число цифр в числе x в системе счисления с основанием T при $x > 0$ и $\mathrm{len}_T(0) = 0$. Обозначим

$$x \oplus_{[i]_T} y = (x - x[i]_T \cdot T^i) + \mathrm{rm}(x[i]_T + y,\, T) \cdot T^i.$$

Эта функция осуществляет прибавление (по модулю T) числа y к i-й цифре числа x в системе счисления с основанием T.

Введём функцию $Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t)$ при помощи рекурсивной схемы:

$$\begin{cases} Q(x, p_1, p_2, p_3, T,\, 0) = x, \\ Q(x, p_1, p_2, p_3, T,\, t+1) = Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t) \oplus_{[p_2\{t\}_T]_T} p_3\{t\}_T, \\ \qquad\qquad \text{если } p_1\{t\}_T \neq p_2\{t\}_T \text{ и } Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t)[p_1\{t\}_T]_T = 0, \\ Q(x, p_1, p_2, p_3, T,\, t+1) = Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1. *Класс всех инъективных частичных функций, принадлежащих $\mathcal{E}^3_{\text{part}}$ вместе со своими обратными, совпадает с замыканием относительно суперпозиции системы функций*

$$\begin{gathered} (x, A, p_1, p_2, p_3, T, t) \to (Q(x, p_1, p_2, p_3, T, t), A, p_1, p_2, p_3, T, t), \\ \mathrm{c}(x, y), \quad (A,\, x, x) \to (A,\, x), \quad (x, x) \to x, \\ (A,\, x, y) \to (A,\, y, x), \quad (x, y) \to (y, x), \\ (A,\, x) \to (A,\, x+1), \quad (A,\, x,\, y) \to (A,\, x,\, (x+1)y), \\ (A,\, x+1) \to (A,\, x), \quad (A,\, x,\, (x+1)y) \to (A,\, x,\, y), \\ 2^x, \quad (A,\, 2^x) \to (A,\, x). \end{gathered}$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Список литературы

[1] С. А. Волков, “Конечная порождаемость некоторых групп рекурсивных перестановок”, *Дискретная математика*, **20**:4 (2008), 61–78. DOI: 10.4213/dm1026.

[2] С. А. Волков, “Пример простой квазиуниверсальной функции в классе $\mathcal{E}^2$ иерархии Гжегорчика”, *Дискретная математика*, **18**:4 (2006), 31–44. DOI: 10.4213/dm71.

[3] И. В. Савицкий, “Арифметизация регистровых машин со счетчиками”, *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 2020, № 3, 30–42.

[4] И. В. Савицкий, “Обратимые счетчико-сумматорные машины”, *Дискретная математика*, **38**:2 (2026), 67–83. DOI: 10.4213/dm1917.

[5] C. H. Bennett, “Logical reversibility of computation”, *IBM Journal of Research and Development*, **17**:6 (1973), 525–532. DOI: 10.1147/rd.176.0525 .

Статья поступила 23 октября 2026 г.

A machine-based substitution basis in the class of reversible elementary functions

I. V. Savitskii

A new substitution basis is given for the class of injective functions belonging together with their inverses to the generalization of the class $\mathcal{E}^3$ to the case of partial functions. The basis is obtained by arithmetization of reversible counter-summator machines.

Keywords: reversible computation, substitution basis, counter-summator machines.

References

[1] S. A. Volkov, “Finite generability of some groups of recursive permutations”, *Discrete Mathematics and Applications*, **18**:6 (2008), 607–624. DOI: 10.1515/DMA.2008.046.

[2] S. A. Volkov, “An example of a simple quasi-universal function in the class $\mathcal{E}^2$ of the Grzegorczyk hierarchy”, *Discrete Mathematics and Applications*, **16**:5 (2006), 513–526. DOI: 10.1515/156939206779238436.

[3] I. V. Savitskii, “Arithmetization of Register Machines with Counters”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **44**:3 (2020), 133–145. DOI: 10.3103/S0278641920030048.

[4] I. V. Savitskii, “Reversible counter-summator machines”, *Discrete Mathematics*, **38**:2 (2026), 67–83 (in Russian. DOI: 10.4213/dm1917).

[5] C. H. Bennett, “Logical reversibility of computation”, *IBM Journal of Research and Development*, **17**:6 (1973), 525–532. DOI: 10.1147/rd.176.0525.

Received on October 23, 2026

О функциях, выразимых полиномами по модулю квадрата простого числа

С. Н. Селезнева*

Получены свойства функций, выразимых полиномами по модулю квадрата простого числа, а также свойства замкнутого класса полиномов по модулю квадрата простого числа.

Ключевые слова: функция на конечном множестве, конечное кольцо, кольцо вычетов, полином, замкнутый класс.

Пусть $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $P_k^{(n)} = \{f \mid f : E_k^n \to E_k\}$ — множество всех n-местных функций на E_k, $n \geqslant 1$, и $P_k = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} P_k^{(n)}$. Пусть $Z_k = (E_k; +, -, \cdot)$ — кольцо вычетов по модулю k, где знаки $+$, $-$ и $\cdot$ обозначают сложение, вычитание и умножение по модулю k. Говорят, что полином $s \in Z_k[x_1, \ldots, x_n]$, $n \geqslant 1$, выражает функцию $f \in P_k^{(n)}$, если для любых $a_1, \ldots, a_n \in E_k$ верно $s(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) (\mathrm{mod}\ k)$. Функция $f \in P_k^{(n)}$, $n \geqslant 1$, называется полиномиальной (по модулю k), если найдется полином $s \in Z_k[x_1, \ldots, x_n]$, который выражает функцию f. Пусть $Pol_k^{(n)}$ обозначает множество всех полиномиальных функций из $P_k^{(n)}$, $n \geqslant 1$, и $Pol_k = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} Pol_k^{(n)}$. Множество Pol_k является замкнутым классом (клоном) относительно суперпозиции при любом числе k, $k \geqslant 2$ (см. [1,2]). При этом если k — простое число, то $Pol_k = P_k$; если k — составное число, то замкнутый класс Pol_k не является даже предполным [1]. В ряде работ найдены свойства функций из Pol_k и критерии полиномиальности функций из P_k, в частности, если k равно квадрату простого числа, см. [3–6] и др. В настоящей работе получены уточнения свойств функций, являющихся полиномиальными по модулю квадрата простого числа.

Пусть $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$. Если $a \in E_k^n$, то считаем, что $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Если $a, b \in E_k^n$, $c, d \in E_k$, то $a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \in E_k^n$, $c + da = (c + da_1, \ldots, c + da_n) \in E_k^n$. Положим $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}) \in E_k^n$,

* *Селезнева Светлана Николаевна* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, e-mail: selezn@cs.msu.ru.

Selezneva Svetlana Nikolaevna — Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

$i = 1, \ldots, n$. Пусть p — простое число, $m \geqslant 1$. Если $a \in E_p$, то положим $j_a(x) \in P^{(1)}_{p^m}$, где $j_a(b) = 1$ при $b = a(\mathrm{mod}\ p)$, иначе $j_a(b) = 0$, $b \in E_{p^m}$. Известно, что $j_a(x) = 1 - (x-a)^{\varphi(p^m)} \in Pol^{(1)}_{p^m}$, где $\varphi(p^m)$ — функция Эйлера. Если $n \geqslant 1$ и $a \in E^n_p$, то положим $j_a(x) = j_a(x_1, \ldots, x_n) = j_{a_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{a_n}(x_n) \in Pol^{(n)}_{p^m}$. Если z — переменная, принимающая значения из E_{p^2}, то $z = \delta_0(z) + p\delta_1(z)$, где $\delta_0, \delta_1 : E_{p^2} \to E_p$ — координатные функции переменной z (см. [3]). Если $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $n \geqslant 1$, то положим $\delta_i(z) = (\delta_i(z_1), \ldots, \delta_i(z_n))$, $i = 0, 1$. Тогда $z = \delta_0(z) + p\delta_1(z)$. В следующих теоремах для упрощения записи для функций $f \in P^{(n)}_{p^2}$, $n \geqslant 1$, $f = f(z)$, вместо $\delta_0(z) + p\delta_1(z)$ пишем $x + py$, подразумевая $x = \delta_0(z)$, $y = \delta_1(z)$.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, $n \geqslant 1$, $f \in P^{(n)}_{p^2}$ и для любого $a \in E^n_p$ верно $f(a + e_i p) - f(a) = 0(\mathrm{mod}\ p)$, где $e_i \in E^n_p$, $i = 1, \ldots, n$. Функция f — полиномиальна по модулю p^2 тогда и только тогда, когда для нее верно представление:*

$$f(x + py) \quad = \quad \sum_{a \in E^n_p} j_a(x)(f(a) + \sum_{i=1}^{n} (f(a + e_i p) - f(a))y_i).$$

Теорема 2. *Пусть p — простое число, $n \geqslant 1$, $f \in P^{(n)}_{p^2}$ и для любого $a \in E^n_p$ верно $f(a + e_i p) - f(a) = 0(\mathrm{mod}\ p)$, где $e_i \in E^n_p$, $i = 1, \ldots, n$. Функция f — полиномиальна по модулю p^2 тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in E^n_p$ верно равенство:*

$$f(a + bp) \quad = \quad f(a) + \sum_{i=1}^{n} b_i (f(a + e_i p) - f(a)).$$

Теорема 3. *Пусть p — простое число, $n \geqslant 1$,*

$$N_{p^2}(n) = \{a, a + e_i p \mid a, e_i \in E^n_p, i = 1, \ldots, n\} \subseteq E^n_{p^2}.$$

Пусть $h \in P^{(n)}_{p^2}$ и функция h определена на множестве $N_{p^2}(n)$. Тогда найдется функция $f \in Pol^{(n)}_{p^2}$, совпадающая с функцией h на множестве $N_{p^2}(n)$, в том и только в том случае, когда для всех $a \in E^n_p$ и всех $i = 1, \ldots, n$ верны равенства $h(a + e_i p) - h(a) = 0(\mathrm{mod}\ p)$. При этом в том случае, когда функция f найдется, она однозначна.

Теорема 4. *Пусть p — простое число, $n \geqslant 1$, $f \in P^{(n)}_{p^2}$. Функция f — полиномиальна по модулю p^2 тогда и только тогда, когда для каждого $a \in E^n_p$ найдутся такие $d_a, c_{a,0}, c_{a,1}, \ldots, c_{a,n} \in E_p$, что для f верно представление:*

$$f(x + py) \quad = \quad \sum_{a \in E^n_p} j_a(x)(d_a + p(c_{a,0} + c_{a,1}y_1 + \ldots + c_{a,n}y_n)).$$

Полином $s \in Z_k[x_1, \ldots, x_n]$, $n \geqslant 1$, называется линейным, если $s(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_k$. Функция $f \in P_k^{(n)}$, $n \geqslant 1$, называется линейной (по модулю k), если найдется линейный полином $s \in Z_k[x_1, \ldots, x_n]$, который выражает функцию f. Пусть $L_k^{(n)}$ обозначает множество всех линейных функций из $P_k^{(n)}$, $n \geqslant 1$, и $L_k = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} L_k^{(n)}$. При любом числе k, $k \geqslant 2$, множество L_k является замкнутым классом (клоном) относительно суперпозиции, причем $L_k \neq P_k$. Кроме того, замкнутый класс L_k является предполным тогда и только тогда, когда k — простое число (см. [1, 2]).

Теорема 5. *Пусть p — простое число, $n \geqslant 1$. Тогда найдется взаимно однозначное отображение между множествами $Pol_{p^2}^{(n)}$ и $(L_p^{(n)} \times E_p)^{p^n}$, в частности, эти множества равномощны, т. е.*

$$|Pol_{p^2}^{(n)}| = p^{(n+2)p^n}.$$

Если $\rho \subseteq E_k^r$, $r \geqslant 0$, то ρ — отношение на E_k. Пусть R_k обозначает множество всех отношений на E_k. Если $S \subseteq R_k$, то, как обычно, $\mathrm{Pol}_k(S)$ обозначает множество всех функций из P_k, сохраняющих любое отношение из S (см. [2]). Пусть p — простое число. Положим $\rho_p \in R_{p^2}$, где $(a, b) \in \rho_p$ только при $a = b (\mathrm{mod}\ p)$, $a, b \in E_{p^2}$. Если $\sigma \in R_p$, $\sigma \subseteq E_p^r$, $r \geqslant 1$, то положим $\varphi(\sigma) = \tau \in R_{p^2}$, где $\tau = \bigcup\limits_{a \in E_p} (a + p\sigma) \subseteq E_{p^2}^r$, где $a + p\sigma = \{a + pc \mid c \in \sigma\} \subseteq E_{p^2}^r$, $a \in E_p$.

Теорема 6. *Пусть p — простое число, $S \subseteq R_p$ и $T = \bigcup\limits_{\sigma \in S} \varphi(\sigma) \subseteq R_{p^2}$. Если $\mathrm{Pol}_p(S) = L_p$, то $\mathrm{Pol}_{p^2}(T \cup \{\rho_p\}) = Pol_{p^2}$. Если $\mathrm{Pol}_{p^2}(T) = Pol_{p^2}$, то $\mathrm{Pol}_p(S) = L_p$.*

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Список литературы

[1] Яблонский С. В., “Функциональные построения в k-значной логике”, *Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР*, **51** (1958), 5–142.

[2] Lau D., *Function Algebras on Finite Sets*, Springer, Berlin, 2006, 671 pp.

[3] Ремизов А. Б., “О надструктуре замкнутого класса полиномов по модулю k”, *Дискретная математика*, **1**:1 (1989), 3–15.

[4] Мещанинов Д. Г., “Метод построения полиномов для функций k-значной логики”, *Дискретная математика*, **7**:3 (1995), 48–60.

[5] Селезнева С. Н., "О числе полиномиальных функций k-значной логики по составному модулю k", *Дискретная математика*, **28**:2 (2016), 81–91. DOI: 10.4213/dm1371.

[6] Селезнева С. Н., "Описание замкнутого класса полиномиальных функций по модулю квадрата простого числа посредством отношения", *Математические заметки*, **118**:4 (2025), 594–606. DOI: 10.4213/mzm14424.

Статья поступила 25 октября 2026 г.

On Functions Represented by Polynomials Modulo the Square of a Prime Number

S. N. Selezneva

Properties are obtained for functions represented by polynomials modulo the square of a prime number and for the closed class of polynomials modulo the square of a prime number.

Keywords: function on a finite set, finite ring, residue ring, polynomial, closed class.

References

[1] Yablonskiy S. V., "Functional constructions in a k-valued logic", *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **51** (1958), 5–142.

[2] Lau D., *Function Algebras on Finite Sets*, Springer, Berlin, 2006, 671 pp.

[3] Remizov A. B., "Superstructure of the closed class of polynomials modulo k", *Discrete Mathematics and Applications*, **1**:1 (1991), 9–22. DOI: 10.1515/dma.1991.1.1.9.

[4] Meshchaninov D. G., "A method for constructing polynomials of k-valued logic functions", *Discrete Mathematics and Applications*, **5**:4 (1995), 333–346. DOI: 10.1515/dma.1995.5.4.333.

[5] Selezneva S. N., "On the number of functions of k-valued logic which are polynomials modulo composite k", *Discrete Mathematics and Applications*, **27**:1 (2017), 7–14. DOI: 10.1515/dma-2017-0002.

[6] Selezneva S. N., "Relational description of a closed class of polynomial functions modulo a squared prime", *Mathematical Notes*, **118**:3–4 (2025), 836–847. DOI: 10.1134/S0001434625605131.

Received on October 25, 2026

Предобработка СЦЛП с использованием почти параллельных строк

М. А. Симаков*

Работа посвящена новому методу предобработки задач СЦЛП, который уменьшает количество ненулевых элементов с помощью сокращения почти параллельных строк в матрице. Используется эвристика для эффективного поиска подходящих пар строк. Метод уменьшил количество ненулевых элементов в 30% задач MIPLIB 2017 Benchmark Set после предобработки HiGHS.

Ключевые слова: предобработка СЦЛП, дискретная оптимизация.

1. Введение

Предобработка является важным этапом решения задач СЦЛП.

$$z^\star = \min\{c^\top x \ : \ Ax = b,\ x \geqslant 0,\ x \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{d-p}\}, \quad p \in \{0, \ldots, d\} \ \text{(СЦЛП)}$$

Важным аспектом предобработки является уменьшение количества ненулевых элементов в матрице задачи ($\operatorname{nnz}(A)$) [2]. Одна из формулировок этой задачи представлена в [3]:

$$\operatorname*{argmin}_{\substack{T \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \det T \neq 0}} \operatorname{nnz}(TA) \tag{SP}$$

Задача SP является NP-сложной [4]. На практике применяются эвристические подходы. Например, можно выполнять последовательность сокращений $A_j \ \to \ A_j - \alpha A_i$. При хорошем выборе пары строк много ненулевых элементов сократится, и $\operatorname{nnz}(A)$ уменьшится. В работе [5] используются значения из пар столбцов для поиска хороших сокращений. Такой алгоритм генерирует большое количество кандидатов, и приходится искусственно ограничивать их список. Наш алгоритм использует большое подмножество столбцов для поиска хороших кандидатов.

* *Симаков Михаил Алексеевич* — студент ФПМИ МФТИ, e-mail: msimakov661@gmail.com, ORCID: 0009-0007-9412-343X.

Simakov Mikhail Alekseyevich — undergraduate student, Moscow Institute of Physics and Technology.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Алгоритм

Далее $[k] = \{1, \ldots, k\}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $\operatorname{nnz}(A) = |\{(i,j) \,:\, A_{ij} \neq 0\}|$.

Выберем подмножество столбцов $C \subset [d]$, $\overline{C} = [d] \setminus C$. Назовём строки A_i, A_j почти параллельными относительно C, если $\exists\, \alpha \neq 0 \;:\; A_{iC} - \alpha A_{jC} = 0$. При замене $A_i x = b_i \;\to\; (A_i - \alpha A_j)x = b_i - \alpha b_j$, где $i \neq j$, решение задачи СЦЛП не изменится, а все ненулевые элементы в столбцах из C сократятся. Такие строки являются естественными кандидатами для сокращения.

Алгоритм 1 Поиск пар строк для сокращения

Вход: $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, разбиение столбцов на группы $C_1, \ldots, C_m$, $r \in [m]$
Выход: Кандидаты для сокращения

$a_i \leftarrow ()$, $\forall i \in [n]$
for all $\{k_1, \ldots, k_r\} \subset [m]$ **do**
  $C = \bigsqcup_{t=1}^{r} C_{k_t}$
  $\forall i$ α_i — первый ненулевой элемент в A_{iC} или 1, если $A_{iC} = 0$
  $A'_i \leftarrow A_i / \alpha_i$, $\forall i \in [n]$ ▷ нормируем элементы в столбцах C
  $G_0, \ldots, G_s$ — разбиение $\{i : a_i = ()\}$ по значениям A'_{iC}
  Пусть G_0 — группа строк таких, что $A_{iC} = 0$ $\forall i \in G_0$
  for all $g \in \{1, \ldots, s\}$ **do**
    $i^* \leftarrow \operatorname{argmin}\{\operatorname{nnz}(A_{i\overline{C}}) \,:\, i \in G_g\}$ ▷ эвристика
    for all $j \in G_g \setminus \{i^*\}$ **do**
      $a_j \leftarrow (i^*, \alpha_j / \alpha_{i^*})$ ▷ A_j и A_{i^*} – кандидаты для сокращения
    end for
  end for
end for
return a

При сокращении $A_j \;\to\; A_j - \alpha A_i$ изменение $\operatorname{nnz}(A)$ оценивается сверху: $\Delta = \operatorname{nnz}(A_j - \alpha A_i) - \operatorname{nnz}(A_j) \leqslant \operatorname{nnz}(A_{i\overline{C}}) - \operatorname{nnz}(A_{jC})$.

В каждой группе почти параллельных строк G_g алгоритм 1 выбирает одну строку $i^\star$, минимизирующую оценку на Δ, и формирует кандидатов на сокращение с ней. В итоге для каждой строки j алгоритм возвращает не более одного кандидата для сокращения. После этого предложенные сокращения, уменьшающие $\operatorname{nnz}(A)$, применяются одновременно. Алгоритм 1 имеет асимптотику $O(\binom{m}{r}(\operatorname{nnz}(A) + n \log n + mn))$ при использовании хеширования для разбиения на G_g.

Наша формулировка СЦЛП содержит только равенства в ограничениях. На практике задачи СЦЛП часто содержат неравенства. В таком случае кандидат для сокращения $i^\star$ выбирается среди равенств.

3. Результаты

В экспериментах использован вариант алгоритма 1 с независимой нормировкой строк в каждой группе столбцов C_i, без согласования масштабов между группами. Реализация на C++ была применена к 240 задачам MIPLIB 2017 Benchmark Set [1] после предобработки HiGHS v1.7.2 со стандартными параметрами [6]. Использовался 8 ядерный процессор Apple M1 с 8ГБ RAM, $m = 4$, $r = 2$ и разбиение столбцов $C_k = \{i : i \equiv k \mod m\}$, $k \in [m]$.

Даже после предобработки HiGHS, включающей уменьшение $\operatorname{nnz}(A)$, предложенный алгоритм дополнительно уменьшил $\operatorname{nnz}(A)$ в 30% задач. На этих задачах $\operatorname{nnz}(A)$ в среднем упал на 2%. На 4 задачах уменьшение составило больше 10%. На задаче `neos-5093327-huahum` число ненулевых элементов уменьшилось на 31.75% за 8 мс дополнительной предобработки.

Время работы на всех задачах не превышало $10^{-6} \operatorname{nnz}(A)$ секунд.

Список литературы

[1] A. Gleixner, G. Hendel, G. Gamrath, T. Achterberg, M. Bastubbe, T. Berthold, P. M. Christophel, K. Jarck, T. Koch, J. Linderoth, M. Lübbecke, H. D. Mittelmann, D. Ozyurt, T. K. Ralphs, D. Salvagnin, Y. Shinano, "MIPLIB 2017: Data-Driven Compilation of the 6th Mixed-Integer Programming Library", *Mathematical Programming Computation*, **13** (2021), 443–490. DOI: 10.1007/s12532-020-00194-3.

[2] T. Achterberg, R. E. Bixby, Z. Gu, E. Rothberg, D. Weninger, "Presolve Reductions in Mixed Integer Programming", *INFORMS Journal on Computing*, **32**:2 (2020), 473–506. DOI: 10.1287/ijoc.2018.0857.

[3] S. F. Chang, S. T. McCormick, "A hierarchical algorithm for making sparse matrices sparser", *Mathematical Programming*, **56** (1992), 1–30. DOI: 10.1007/BF01580890.

[4] Alan J. Hoffman, S. T. McCormick, "A Fast Algorithm that makes Matrices Optimally Sparse", *Progress in Combinatorial Optimization*, eds. WILLIAM R. PULLEYBLANK, Academic Press, 1984, 185–196. DOI: 10.1016/B978-0-12-566780-7.50017-9.

[5] P. Gemander, W.-K. Chen, D. Weninger, L. Gottwald, A. Gleixner, A. Martin, "Two-row and two-column mixed-integer presolve using hashing-based pairing methods", *EURO Journal on Computational Optimization*, **8**:3–4 (2020), 205–240. DOI: 10.1007/s13675-020-00129-6.

[6] Q. Huangfu, J. A. J. Hall, "Parallelizing the dual revised simplex method", *Mathematical Programming Computation*, **10**:1 (2018), 119–142. DOI: 10.1007/s12532-017-0130-5 .

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

MILP presolve using near-parallel rows

M. A. Simakov

We propose a new MILP presolve method that reduces nonzeros using near-parallel rows in the constraint matrix. A heuristic efficiently identifies promising row pairs. The method reduced nonzeros in 30% of instances in the MIPLIB 2017 Benchmark Set after HiGHS presolve.

Keywords: MILP presolve, discrete optimization.

References

[1] A. Gleixner, G. Hendel, G. Gamrath, T. Achterberg, M. Bastubbe, T. Berthold, P. M. Christophel, K. Jarck, T. Koch, J. Linderoth, M. Lübbecke, H. D. Mittelmann, D. Ozyurt, T. K. Ralphs, D. Salvagnin, Y. Shinano, "MIPLIB 2017: Data-Driven Compilation of the 6th Mixed-Integer Programming Library", *Mathematical Programming Computation*, **13** (2021), 443–490. DOI: 10.1007/s12532-020-00194-3.

[2] T. Achterberg, R. E. Bixby, Z. Gu, E. Rothberg, D. Weninger, "Presolve Reductions in Mixed Integer Programming", *INFORMS Journal on Computing*, **32**:2 (2020), 473–506. DOI: 10.1287/ijoc.2018.0857.

[3] S. F. Chang, S. T. McCormick, "A hierarchical algorithm for making sparse matrices sparser", *Mathematical Programming*, **56** (1992), 1–30. DOI: 10.1007/BF01580890.

[4] Alan J. Hoffman, S. T. McCormick, "A Fast Algorithm that makes Matrices Optimally Sparse", *Progress in Combinatorial Optimization*, eds. WILLIAM R. PULLEYBLANK, Academic Press, 1984, 185–196. DOI: 10.1016/B978-0-12-566780-7.50017-9.

[5] P. Gemander, W.-K. Chen, D. Weninger, L. Gottwald, A. Gleixner, A. Martin, "Two-row and two-column mixed-integer presolve using hashing-based pairing methods", *EURO Journal on Computational Optimization*, **8**:3–4 (2020), 205–240. DOI: 10.1007/s13675-020-00129-6.

[6] Q. Huangfu, J. A. J. Hall, "Parallelizing the dual revised simplex method", *Mathematical Programming Computation*, **10**:1 (2018), 119–142. DOI: 10.1007/s12532-017-0130-5.

Received on November 9, 2026

Гибридные метаэвристические алгоритмы для решения задачи коммивояжёра

А. И. Соболев*, Е. В. Хворостухина‡

Разработан комплекс метаэвристических алгоритмов для решения задачи коммивояжёра на полных взвешенных графах: классический имитационный отжиг (SA), параллельный SA с обменом решениями и симулированный квантовый отжиг (SQA). Проведены вычислительные эксперименты на эталонных графах разной размерности и сравнительный анализ с алгоритмом LKH.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, метаэвристики, имитационный отжиг, симулированный квантовый отжиг, LKH.

1. Введение

Задача коммивояжёра (Traveling Salesman Problem, TSP) — одна из классических NP-трудных задач комбинаторной оптимизации. Несмотря на существование точных методов (например, метода ветвей и границ, динамического программирования), для графов с большим числом вершин время работы и требования к памяти становятся критическими. Кроме того, во многих практических задачах допустимо быстрое, но приближённое решение. В таких случаях применяют метаэвристики (например, [1]). Цель данной работы — сравнительный анализ эффективности разработанных алгоритмов имитационного отжига (SA), параллельного имитационного отжига (PSA) и симулированного квантового отжига (SQA), а также алгоритма LKH применительно к задаче коммивояжёра. LKH выбран для сравнения, так как это один из самых эффективных эвристических и метаэвристических алгоритмов для решения TSP.

* *Соболев Алексей Иванович* — магистрант каф. ИКСП ИнПИТ СГТУ им. Гагарина Ю. А., e-mail: sobalex03@mail.ru.

Sobolev Alexey Ivanovich — Master's student, SSTU, Dep. of Information and Communication Systems and Software Engineering.

‡ *Хворостухина Екатерина Владимировна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ИКСП ИнПИТ СГТУ им. Гагарина Ю. А.; доцент каф. геометрии мех.-мат. ф-та СГУ, e-mail: katyanew2007@rambler.ru, ORCID: 0000-0002-2775-5732.

Khvorostukhina Ekaterina Vladimirovna — PHD, Associate professor, SSTU, Dep. of Inform. and Commun. Systems and Software Engineering; SSU, Dep. of Geometry.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Алгоритмы SA, PSA и SQA для TSP

В рамках предыдущего исследования [2] были разработаны гибридные алгоритмы SA, PSA, SQA для решения задачи нахождения кратчайшего пути, проведены эксперименты и сравнительный анализ. Однако эта задача и задача коммивояжёра имеют принципиальные различия, что делает прямое перенесение полученных ранее результатов нетривиальным. В TSP решение — это путь в графе, то есть циклическая перестановка всех n вершин графа. Будем кодировать путь списком $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, где π_i — номер вершины, посещаемой на i-м шаге, при этом подразумевается, что после π_n коммивояжёр возвращается в π_1. Такое представление гарантирует, что каждая вершина посещена ровно один раз. Для генерации соседних решений (окрестности) используются различные операторы модификации маршрута (в скобках указано, в каких алгоритмах применяется соответствующий оператор):

– 2-opt (SA, PSA, SQA) – классический оператор для TSP, заменяющий два ребра (a, b) и (c, d) на (a, c) и (b, d) с инверсией промежуточного участка. Устраняет самопересечения ребер при сложности оценки изменения длины $O(1)$, благодаря чему может применяться массово.

– Or-opt (SA, PSA, SQA) – оператор, перемещающий цепочку из l последовательных вершин ($l \in \{1, 2, 3\}$) в другую позицию без изменения порядка, позволяя выходить из локальных минимумов.

– Swap (PSA) – обмен двух произвольных вершин пути местами, способствующий диверсификации поиска.

– Insertion (PSA) – извлечение вершины из пути и её вставка в новую позицию; относительный порядок остальных вершин сохраняется.

– Reversal (PSA) – инверсия случайной подпоследовательности вершин для внесения крупных структурных изменений в текущее решение.

– Order Crossover (OX) (SQA) – эволюционный оператор скрещивания. Потомок наследует подстроку от первого родителя, а оставшиеся вершины заполняются в порядке их следования во втором родителе.

В алгоритмах операторы применяются на двух уровнях. На основном цикле отжига: в SA и SQA преимущественно используется 2-opt, обеспечивающий лучшую сходимость за итерацию, а в PSA происходит случайный выбор между Swap, Insertion, Reversal и 2-opt для поддержания разнообразия. В SQA OX применяется каждые 50 итераций для обмена информацией между лучшими репликами. На этапе финальной локальной оптимизации: после завершения основного цикла в SA, PSA, SQA последовательно применяются операторы 2-opt и Or-opt до достижения локального оптимума. В LKH данные процедуры встроены внутрь цикла и вызываются после каждого возмущения маршрута.

3. Результаты экспериментов и выводы

Для оценки эффективности разработанных алгоритмов было проведено сравнительное тестирование на задачах из TSPLIB. Все алгоритмы запускались 30 раз для каждой задачи. В качестве начальных решений использовалась эвристика ближайшего соседа с выбором лучшего из 5 стартов или случайная валидная перестановка (при невозможности построения жадного пути). Алгоритмы были настроены следующим образом. SA: 200 000 итераций, начальная температура T_0 вычислялась адаптивно как $0.3 \cdot \bar{w}$, где $\bar{w}$ — средний вес ребра; геометрическое охлаждение. PSA: 4 независимых потока по 80 000 итераций, обмен лучшими решениями между цепями. SQA: 8 квантовых реплик, 25 000 итераций, начальная поперечная намагниченность – 5.0. LKH: использовалась каноническая реализация алгоритма LKH-3, доступная через Python-обертку `elkai`. Замеряемое время работы включало полный цикл алгоритма. Эксперименты проводились на оборудовании: AMD Ryzen 5 6600H (3.30 GHz), 16 ГБ ОЗУ, ОС Windows 10, Python 3.12.3. Результаты тестирования на примере задачи a280 (с эталонным решением 2579) и задачи rat575 (с эталонным решением 6773) представлены в таблице 1. На рисунке 1 изображены типичные кривые сходимости для алгоритмов: 1 — SA, 2 — PSA, 3 — SQA, 4 — LKH для задачи a280.

Таблица 1: Сравнение алгоритмов на графах a280 и rat575

Показатель	SA		PSA - 4 потока		SQA - 8 реплик		LKH	
	a280	rat575	a280	rat575	a280	rat575	a280	rat575
Лучшая длина пути	2603	6969	2603	6955	2603	6991	2594	6884
Средняя длина пути	2670,3	7047,8	2620,7	7005,43	2643,6	7038,53	2613,57	7013,4
Отклонение от оптимума, %	3,54013	4,05729	1,61691	3,43171	2,50484	3,92042	1,34044	3,54939
Среднее время работы, с	0,5264	3,40353	2,7622	10,0674	1,8703	5,9813	55,50343	112,35

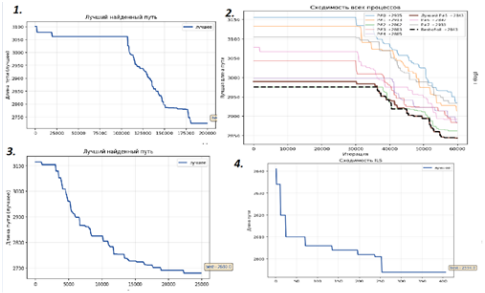


Рис. 1: Кривые сходимости алгоритмов

Из данных таблицы 1 следует, что PSA дает более качественные решения, чем SA и SQA, однако проигрывает им по скорости. SA показал лучшую скорость, но худшее в среднем качество решений. SQA занимает промежуточное положение между быстрым SA и более медленным PSA. LKH вычислил лучшую длину пути (однако точное решение также не нашел), но значительно проиграл по времени всем трем методам. Следовательно, вопрос о применении того или иного метода должен решаться исходя из требований конкретной задачи.

Список литературы

[1] Martoňák R., Santoro G. E., Tosatti E., "Quantum annealing of the traveling-salesman problem", *Phys. Rev. E*, **70** (2004), 057701.

[2] Соболев А. И., "Разработка алгоритма имитации отжига с использованием многопоточных вычислений для решения задачи нахождения кратчайшего пути", *Проблемы управления в социально-экономических и технических системах*, Материалы XXI Международной научно-практической конференции, ИЦ Наука, Саратов, 2026, 159–162.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

Hybrid metaheuristic algorithms for solving TSP

A. I. Sobolev, E. V. Khvorostukhina

A suite of metaheuristic algorithms has been developed to solve the traveling salesperson problem on complete weighted graphs: classical simulated annealing (SA), parallel SA with solution exchange, and simulated quantum annealing (SQA). Computational experiments were conducted using benchmark graphs of varying sizes, alongside a comparative analysis with the LKH algorithm.

Keywords: Traveling Salesman Problem, TSP, metaheuristic algorithms, simulated annealing, simulated quantum annealing, LKH.

References

[1] Martoňák R., Santoro G. E., Tosatti E., "Quantum annealing of the traveling-salesman problem", *Phys. Rev. E*, **70** (2004), 057701.

[2] Sobolev A. I., "Development of a simulated annealing algorithm using multithreaded computations for solving the shortest path problem", *Problems of management in socio-economic and technical systems*, Proceedings of the XXI Intern. Conf. In 2 volumes, "Nauka", Saratov, 2026, 159–162 (In Russian).

Received on October 10, 2026

Алгоритм проверки минимальности веса биюнктивной функции, не имеющей аффинных имплицент

Ю. В. Таранников*, Н. М. Трубицин‡

В работе рассматривается задача проверки минимальности веса биюнктивной функции, существенно зависящей от всех своих переменных и не имеющей аффинных имплицент. Приведён алгоритм её решения для минимальной 2-КНФ за полиномиальное время.

Ключевые слова: биюнктивная функция, существенная переменная, аффинная имплицента, минимальная 2-КНФ.

1. Постановка задачи

В работе [1] для биюнктивной функции (т. е. представимой в виде 2-КНФ), существенно зависящей от всех своих переменных и не имеющей аффинных имплицент, определена глубина — характеристика, не зависящая от вида её 2-КНФ. В ней также приведены достижимые верхняя оценка веса произвольной биюнктивной функции и нижняя оценка веса одновременно слабо положительной и слабо отрицательной функции через их глубину.

Идеи статьи [1] получили развитие в работе [2]: в ней указаны все биюнктивные функции заданной глубины максимального веса, вычислен минимальный вес биюнктивной функции, не имеющей аффинных имплицент, и доказана его инвариантность относительно глубины.

Однако в статье [2] не описаны все биюнктивные функции, не имеющие аффинных имплицент и обладающие наименьшим весом. Поэтому на данный момент актуальна задача проверки минимальности веса биюнктивной функции, не имеющей аффинных имплицент, за полиномиальное время. Её решение и предложено в данной работе.

* *Таранников Юрий Валерьевич* — д.ф.-м.н., каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yutarann@gmail.com.

Tarannikov Yuri Valeryevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Department of Discrete Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

‡ *Трубицин Никита Михайлович* — Московский центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: trubitsin.nik@mail.ru.

Trubitsin Nikita Mikhailovich — Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Используемые понятия и обозначения

Всюду далее в работе будем использовать систему понятий и обозначений, введённую в статье [2]. В частности, аффинными имплицентами биюнктивной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть имплиценты вида x_k, $\overline{x}_k$ и $x_i \oplus x_j \oplus a$, $a \in \{0, 1\}$, $k \in \overline{1, n}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, а множество биюнктивных функций от n переменных, существенно зависящих от всех своих переменных и не имеющих аффинных имплицент, обозначим через Bi''_n.

Определение 1. Литералы x и $\overline{x}$ называются *комплементарными*. Множество литералов называется *противоречивым*, если в нём есть комплементарные литералы, и *непротиворечивым* — в противном случае.

Для произвольного литерала $x \in \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ и некоторой 2-КНФ F функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in Bi''_n$ обозначим через $T(x)$ множество литералов, достижимых в ориентированном графе (графе импликаций) 2-КНФ F из литерала x. Тогда имеет место следующее определение.

Определение 2. *Полным распространением вынужденных литералов* для заданной 2-КНФ F и множества литералов s, считающихся истинными, называется множество $S = \bigcup\limits_{x \in s} T(x)$. Результатом полного распространения вынужденных литералов называется *редуцированная 2-КНФ* F', полученная из 2-КНФ F удалением элементарных дизъюнкций, содержащих литералы из множества S, и вычёркиванием литералов, комплементарных к литералам из множества S. Переменные, входящие в множество S, называются *зафиксированными*, а остальные переменные формулы F' называются *незафиксированными*. Незафиксированные переменные называются *активными*, если они входят в 2-КНФ F'.

Замечание 1. Полное распространение вынужденных литералов противоречиво тогда и только тогда, когда полученная редуцированная 2-КНФ невыполнима. Для класса Bi''_n такая ситуация невозможна.

Обозначим количество активных переменных через a. Если множество S непротиворечиво, то $0 \leqslant a \leqslant n - |S|$.

Замечание 2. Полное распространение вынужденных литералов является полиномиальной процедурой (лежит в основе алгоритма Крома проверки выполнимости 2-КНФ [3]) и гарантирует, что в редуцированной формуле нет литералов, значение которых однозначно определено текущим присваиванием.

Определение 3. КНФ называется *пустой*, если она не содержит ни одной элементарной дизъюнкции.

3. Основной результат

Поскольку ориентированный граф (граф импликаций) минимальной 2-КНФ биюнктивной функции, не имеющей аффинных имплицент, не содержит ориентированных циклов (см. [2]), в нём найдётся хотя бы одна начальная вершина (то есть вершина с нулевой полустепенью захода). Это значит, что в минимальной 2-КНФ рассматриваемой функции хотя бы одна переменная входит только в одной степени. В силу данного свойства корректна работа следующего алгоритма.

Алгоритм 1.

Вход: минимальная 2-КНФ F, задающая функцию $f \in Bi''_n$.

Выход: ответ «да», если вес функции f минимален среди функций из класса Bi''_n, и «нет» — в противном случае.

Этап 1. Полагаем $G := F$ и создаём счётчик a количества активных переменных формулы G. Инициализируем его значением $a := n$.

Этап 2. Пока формула G непуста, выполняем следующие действия:

1. Выбираем любую переменную, входящую в 2-КНФ G только в одной степени. Пусть, без ограничения общности, это переменная x, и она входит в 2-КНФ G только в отрицательной степени. В противном случае меняем ролями литералы x и $\overline{x}$.
2. Строим подформулы G_1 и G_0, полученные из 2-КНФ G в результате присваиваний $x = 1$ и $x = 0$ соответственно и последующих полных распространений вынужденных литералов.
3. Проверяем подформулу G_1: если она непуста или имеет незафиксированные переменные, алгоритм завершается с ответом «нет».
4. Анализируем подформулу G_0. Для этого обозначим через a_0 число переменных, не зафиксированных после её построения.
   - Если формула G_0 непуста, в неё входят все a_0 незафиксированных переменных и при этом $a_0 = a - 1$, полагаем $G := G_0$, $a := a_0$ и переходим к следующей итерации шага 1.
   - Если формула G_0 пуста и $a_0 = 1$, то она имеет в точности $2^{a_0} = 2$ решения, и в этом случае алгоритм завершается с ответом «да».
   - В остальных случаях алгоритм завершается с ответом «нет».

Некоторые характеристики алгоритма 1. Алгоритм 1 не нуждается в хранении очереди подзадач: на каждом шаге достаточно хранить единственную текущую 2-КНФ G и счётчик a количества её активных переменных. Требуемая память ограничена $O(n^2)$ бит, а общее время работы полиномиально зависит от n.

Список литературы

[1] Тарасов А. В., "Булевы биюнктивные функции, графы 2-КНФ и их порядковые функции. Оценки веса биюнктивной функции с заданным числом слоев", *Математические вопросы криптографии*, **12**:1 (2021), 83–95. DOI: 10.4213/mvk349.

[2] Трубицин Н. М., "Биюнктивные функции заданной глубины экстремального веса", *Дискретная математика*, **38**:2 (2026), 96–131. DOI: 10.4213/dm1854.

[3] Krom M. R., "The Decision Problem for a Class of First-Order Formulas in Which all Disjunctions are Binary", *Mathematical Logic Quarterly*, **13**:1–2 (1967), 15–20. DOI: 10.1002/malq.19670130104.

Статья поступила 27 сентября 2026 г.

An algorithm for checking the minimality of the weight of a bijunctive function that does not have affine implicits

Y. V. Tarannikov, N. M. Trubitsin

This paper addresses the problem of verifying the weight minimality of a bijunctive function that depends essentially on all its variables and has no affine implicits. A polynomial-time algorithm is presented for solving this problem in the case of a minimal 2-CNF.

Keywords: bijunctive function, essential variable, affine implicant, minimal 2-CNF.

References

[1] Tarasov A. V., "Bijunctive Boolean functions, 2-CNF graphs and their order functions. Weight estimates of a bijunctive function with a given number of layers", *Mathematical Issues of Cryptography*, **12**:1 (2021), 83–95.

[2] Trubitsin N. M., "Bijunctive functions of given depth of extreme weight", *Discrete Mathematics*, **38**:2 (2026), 96–131.

[3] Krom M. R., "The Decision Problem for a Class of First-Order Formulas in Which all Disjunctions are Binary", *Mathematical Logic Quarterly*, **13**:1–2 (1967), 15–20.

Received on September 27, 2026

Часть 4
Теория управляющих систем и теория баз данных

Моделирование схем из функциональных элементов клеточными автоматами с локаторами

Э. Э. Гасанов*, Г. В. Калачев†, Д. А. Бухарина§

В статье предлагается метод моделирования схем из функциональных элементов (СФЭ) клеточными автоматами с локаторами (КАсЛ). Если дана СФЭ с числом элементов k и глубиной d, то моделирующая ее КАсЛ будет иметь задержку $4d + 1$ и площадь порядка k^2.

Ключевые слова: схемы из функциональных элементов, клеточные автоматы с локаторами.

1. Введение и формулировка результата

Определение клеточных автоматов с локаторами можно найти в работе [1]. Особенность клеточных автоматов с локаторами заключается в том, что каждый элементарный автомат (называемый ячейкой) может посылать в эфир сигналы, и у каждого ячейки имеются локаторы, направленные в разные стороны. Каждый из локаторов позволяет получать на него суммарный сигнал всех автоматов с того направления, куда направлен локатор. Соответственно новое состояние автомата и посылаемый автоматом сигнал определяются значениями локаторов и состояниями соседей автомата.

Гасанов Эльяр Эльдарович — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

†*Калачев Глеб Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

§*Бухарина Дарья Анатольевна* — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: daria.bukharina@math.msu.ru, ORCID: 0009-0000-6203-9080.

Bukharina Daria Anatolevna — Student of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Схемы из функциональных элементов (СФЭ) представляют собой ациклический ориентированный граф с тремя видами вершин: входами, которым приписаны переменные и через которые передаются входные воздействия, выходами, через которые наружу передаются результаты вычислений и функциональные элементы из некоторого выбранного базиса.

Сложностью СФЭ назовём число функциональных элементов в ней.

СФЭ назовём *сбалансированной*, если на любом пути от входа к выходу в схеме встречается одно и то же количество функциональных элементов, это количество будем называть *глубиной схемы*. Понятно, что любую схему можно сделать сбалансированной, если включить в базис функциональный элемент, реализующий тождественную функцию (такой элемент называется буфером).

Для моделирования СФЭ мы введём в клеточный автомат с локаторами (КАсЛ) специальные ячейки, называемые *входами*, которые будут подавать в эфир сигналы, задаваемые извне, а также специальные ячейки, называемые *выходами*, состояния которых будут интерпретироваться как результаты вычислений.

Будем говорить, что *КАсЛ моделирует СФЭ*, если в результате функционирования при подаче на входы СФЭ и КАсЛ одинаковых значений на выходах СФЭ и КАсЛ появляется одинаковый результат. Скажем, что КАсЛ является *конвейерным* вычислителем булевой функции *с задержкой* d, если на входы каждый такт можно подавать входные значения, и при этом с задержкой в d тактов на выходе каждый такт будем получать значение функции на входных значениях.

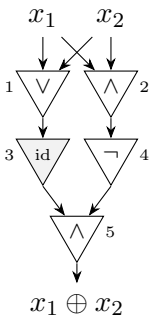
Ячейку КАсЛ назовём *активной*, если в процессе функционирования КАсЛ эта ячейка хоть в какой-то момент находится не в состоянии покоя.

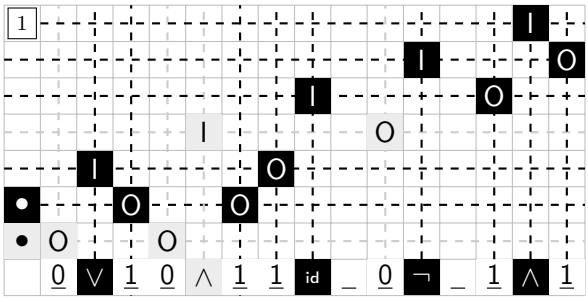
Площадью КАсЛ назовём площадь минимального прямоугольника, охватывающего все активные ячейки.

Теорема 1. *Для любой сбалансированной СФЭ в стандартном базисе со сложностью k, с n входами, m выходами и глубиной d существует конвейерный двумерный клеточный автомат с 2 локаторами (горизонтальной и вертикальной), который моделирует эту СФЭ с задержкой $4d + 1$ и имеет площадь $(1 + 3k)(1 + k + n + m)$.*

В случае, когда сложность СФЭ больше $2^{n/2}$, где n — число переменных функции, то выгоднее применять другой метод моделирования, описанный в работе [2], который для функций от n переменных даёт площадь порядка 2^n, причём для почти всех булевых функций этот порядок не улучшаем.

2. Идея доказательства теоремы





На рисунке приведена СФЭ в стандартном базисе, реализующая сложение по модулю 2, и КАсЛ, моделирующий эту схему.

Если сложность СФЭ равна k, число входов равно n, а число выходов равно m, то активная область моделирующего КАсЛ будет состоять из $1 + 3k$ столбцов и $1 + n + k + m$ строк. В примере $k = 5$, $n = 2$, $m = 1$.

Входы обозначены маленькими кружками, выходы — квадратиками. Входы и выходы расположены в первом столбце и под каждый из них выделена своя строка. Функциональные элементы расположены в первой строке, причём слева и справа от функциональных элементов расположены ячейки под аргументы функциональных элементов (они прорисованы с нижним подчёркиванием). Получается $3k$ столбцов. Под каждый функциональный элемент выделена отдельная строка, по которой будет передаваться значение на выходе функционального элемента.

Функционирование КАсЛ осуществляется следующим образом:

1. i-й вход подаётся в эфир как $(x_i + 1, 0)$ из ячейки $(0, i)$ (слева от схемы), $i = 1, \ldots, n$. Здесь x_i значение i-го входа.
2. На каждый слой схемы затрачивается 4 такта:
   - **O**: принимает значение $(a, *)$ по горизонтали, ретранслирует $(0, a)$;
   - $\underline{*}$: при приёме значения $(0, b + 1)$ в вертикальный локатор переходит в состояние $\underline{b}$;
   - g_j: читает состояния соседей $\underline{x}$ и $\underline{y}$, отправляет $(0, g_j(x, y) + 1)$ в эфир, здесь g_j — j-й функциональный элемент, $i = 1, \ldots, k$;
   - **I**: принимает $(*, a)$ по вертикали, ретранслирует $(a, 0)$.
3. Ячейка-выход при получении сигнала $(a + 1, *)$, $a \in \{0, 1\}$, в горизонтальный локатор переходит в состояние $\boxed{a}$.

Отсюда получаем, что если в схеме d слоёв (т.е. ее глубина равна d), то задержка КАсЛ будет равна $4d + 1$.

Конвейерность приведённого КАсЛ очевидна, поскольку все сигналы распространяются по своим строкам и столбцам, не мешая друг другу.

Список литературы

[1] Э. Э. Гасанов, "Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью", *Математические вопросы кибернетики*, Вып 21, ФИЗМАТЛИТ, М, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[2] Надиров Ч. А., "Сложность реализации почти всех булевых функций клеточными автоматами с локаторами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:4 (2026), 224–227.

Статья поступила 28 октября 2026 г.

Modeling Boolean circuits using cellular automata with locators

E. E. Gasanov, G. V. Kalachev, D. A. Bukharina

This paper proposes a method for simulating Boolean circuits using cellular automata with locators (CALs). Given a CFE with k elements and a depth of d, the corresponding CAL that simulates it will have a delay of $4d + 1$ and an area on the order of k^2.

Keywords: Boolean circuits, cellular automata with locators.

References

[1] E. E. Gasanov, "Cellular automata with locators as a model for wireless communication devices", *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, Issue 21, FIZMATLIT, M, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (in Russian).

[2] Nadirov Ch. A., "The Complexity of Implementing Almost All Boolean Functions Using Cellular Automata with Locators", *Intelligent systems. Theory and Applications*, **30**:4 (2026), 224–227 (in Russian).

Received on October 28, 2026

Модели данных и формы представления информации в интеллектуальных системах

С. Т. Главацкий*, И. Г. Бурыкин‡

В современных интеллектуальных системах обработка данных выполняется над цифровым представлением предметной области. При этом для одной и той же предметной области могут использоваться различные формы представления данных. В данной работе рассматривается переход от исходного набора оцифрованных сведений к структуре цифрового представления в контексте классической схемы «Модель – Алгоритм – Программа» А.А. Самарского. Вводится структура цифрового представления как результат организации исходных сведений в соответствии с выбранной моделью. Если X обозначает исходный набор оцифрованных сведений, а R — совокупность отношений и иных структурных связей, задаваемых выбранным способом представления, то структура имеет вид $S = (X, R)$. Рассматривается роль структуры цифрового представления как одного из факторов выбора метода обработки, на основании которого выбирается алгоритм его реализации. Для задач науки о данных рассматривается последовательность «цифровое представление – структура – метод – алгоритм – программа».

Ключевые слова: искусственный интеллект, наука о данных, цифровое представление данных, структура данных, базы данных, метод обработки, алгоритм, математическое моделирование.

1. Постановка задачи

Классическая схема «Модель – Алгоритм – Программа», связанная с работами А.А. Самарского, описывает переход от исследуемого объекта к его компьютерной обработке: строится математическая модель, выбирается алгоритм ее обработки, затем создается программная реализация [1].

Главацкий Сергей Тимофеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, и.о. зав. каф. теоретической информатики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: sergey.glavatsky@math.msu.ru, ORCID: 0000-0003-1857-6158.

Glavatsky Sergei Timofeevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Acting Head of the Chair of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡*Бурыкин Илья Геннадиевич* — старший преподаватель каф. теоретической информатики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ilia.burykin@math.msu.ru, ORCID: 0000-0003-1310-3060.

Burykin Ilia Gennadievich — Senior Lecturer, Chair of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

В задачах науки о данных обработка выполняется над цифровым представлением предметной области. Для одной предметной области могут использоваться различные формы представления. До выбора конкретной модели существует набор оцифрованных сведений, отобранных для решения задачи; выбор модели определяет способ их организации и отношения между ними. В работе рассматривается связь этой структуры с выбором метода обработки и алгоритма его реализации [2–4].

2. Цифровое представление и его структура

Под цифровым представлением предметной области будем понимать совокупность оцифрованных сведений, содержащих необходимые для решения задачи факты об объектах, их свойствах и отношениях. Обозначим множество таких сведений через X. Оно не является конкретной моделью данных: в него входят отобранные сведения, но способ их организации еще не задан. На практике X может формироваться из различных исходных источников: баз данных, в том числе унаследованных, журналов ERP-систем, наборов файлов XLS и других разнородных источников. Исходная организация данных в этих источниках не определяет структуру их представления для решаемой задачи – из источников выделяются необходимые сведения, которые затем включаются в X.

После выделения исходных сведений X выбирается способ их представления. В зависимости от задачи, это может быть реляционная, графовая, векторная или другая модель. Выбранная модель задает организацию элементов X и отношения между ними. Обозначим совокупность отношений и иных структурных связей через R. Тогда структура цифрового представления имеет вид

$$S = (X, R).$$

Здесь X определяет состав представленных сведений, а R — их организацию в выбранной модели.

Различие структур существенно для обработки. Поэтому одна и та же совокупность исходных сведений может создавать различные условия для последующего анализа.

Структура, однако, не определяет метод однозначно. Один и тот же набор данных и одна и та же структура могут использоваться в различных задачах. Поэтому при выборе метода учитываются постановка задачи, содержание данных и структура их представления.

3. Структура, метод и алгоритм

Следующим этапом после определения структуры является выбор метода обработки. Метод задает общий способ решения задачи определенного типа, а алгоритм — конкретную последовательность вычислительных действий, реализующую выбранный метод:

$$\text{структура представления} \to \text{метод} \to \text{алгоритм} \to \text{программа}.$$

Изменение структуры данных может привести к изменению метода их обработки. После выбора метода алгоритм его реализации определяется с учетом размера и свойств данных, требований к памяти и времени выполнения, возможности распараллеливания и характеристик вычислительной среды. Поэтому один и тот же метод может иметь несколько алгоритмических реализаций.

Для современных интеллектуальных систем это особенно существенно из-за больших объемов данных и высокой стоимости вычислений. Развитие foundation models сопровождается разработкой алгоритмических решений, направленных на снижение вычислительных затрат и требований к памяти [5]. Одновременно неадекватное представление может ограничить обработку независимо от эффективности алгоритма [6].

Постановка задачи и содержание данных влияют на выбор метода, а размер и свойства данных и вычислительные ограничения — на выбор алгоритма.

4. Связь с классической схемой

В классической схеме А.А. Самарского математическая модель используется для перехода от исследуемого объекта к его компьютерной обработке [1]. Для задач науки о данных этот переход можно детализировать последовательностью

$$\begin{aligned}\text{предметная область} \to \text{цифровое представление} \to \text{структура} \\ \to \text{метод} \to \text{алгоритм} \to \text{программа}.\end{aligned}$$

Цифровое представление фиксирует необходимые для решения задачи сведения о предметной области, а выбранная модель задает структуру их организации. Метод определяет способ решения задачи, алгоритм — конкретную вычислительную процедуру, а программа реализует ее в вычислительной среде. Такая детализация не изменяет классическую схему, а выделяет этапы, связанные с организацией цифровых данных.

Для задач баз данных и интеллектуального анализа структура данных выступает одним из условий последующей вычислительной обработки.

Актуальность рассмотрения структуры цифрового представления данных соотносится с современными направлениями управления данными [7]. В частности, к ним относятся семантически обогащённый слой данных, составной семантический слой, графы знаний, онтологии и подготовка данных для задач искусственного интеллекта. Эти направления затрагивают различные аспекты организации данных, представления отношений между объектами, формализации смысла и подготовки данных к использованию в интеллектуальных системах. Рассматриваемое в настоящей работе понятие структуры цифрового представления позволяет связать эти аспекты в более общей постановке — как элементы перехода от предметной области к цифровым данным, предназначенным для последующей обработки.

Заключение

Недостаточное внимание к формированию структуры цифрового представления данных может быть одной из причин неэффективности ряда интеллектуальных систем. При разработке таких систем значительное внимание уделяется выбору методов, алгоритмов и вычислительных средств, тогда как организация данных нередко рассматривается как вспомогательный этап. Между тем, именно структура определяет форму, в которой данные поступают на последующую обработку. Она также обеспечивает доступность существенных для задачи свойств данных и отношений между ними.

Исходя из вышеизложенного, формирование структуры цифрового представления следует рассматривать как первостепенный этап построения интеллектуальной системы. Неадекватная задаче структура данных может ограничить возможности их последующей обработки независимо от эффективности выбранного алгоритма. Таким образом, выбор структуры данных должен рассматриваться как часть решения поставленной задачи, а не только как технический этап организации и хранения данных.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

Список литературы

[1] Б. Н. Четверушкин, А. П. Михайлов, “Триада Самарского. К 100-летию со дня рождения академика А. А. Самарского”, *Вестник Российской академии наук*, **89**:2 (2019), 187–193. DOI: 10.31857/S0869-5873892187-193.

[2] С. Т. Главацкий, И. Г. Бурыкин, “Преподавание фундаментальных основ искусственного интеллекта как реализация концепции нового научного знания”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **26**:1 (2022), 146–152.

[3] С. Т. Главацкий, Р. Р. Айдагулов, В. В. Борисенко, И. Г. Бурыкин, И. Б. Кожухов, В. В. Тензина, А. В. Шокуров, “Математические методы и алгоритмы теоретической информатики в науке о данных и искусственном интеллекте”, Математика в созвездии наук: тезисы докладов, 2024, 604–607.

[4] С. Т. Главацкий, И. Г. Бурыкин, “Совершенствование методики подготовки студентов математических специальностей для решения задач искусственного интеллекта и науки о данных”, Программирование и вычислительная математика: сборник материалов конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Н. П. Трифонова, 2025, 50–54. DOI: 10.55959/MSU012316-6-2025-50-54.

[5] M. Xu, D. Cai, W. Yin, S. Wang, X. Jin, X. Liu, “Resource-efficient Algorithms and Systems of Foundation Models: A Survey”, *ACM Computing Surveys*, **57**:5 (2025), 110. DOI: 10.1145/3706418.

[6] E. S. Raymond, *The Cathedral and the Bazaar*, Version 3.0, accessed 14.10.2026, http://www.catb.org/~esr/writings/cathedral-bazaar/cathedral-bazaar/ar01s06.html.

[7] Gartner, Inc., *Hype Cycle for Data Management*, Gartner ID: G00850550. Published 21 July 2026, accessed 14.10.2026, https://www.gartner.com/en/documents/8152229.

Статья поступила 9 октября 2026 г.

Data Models and Forms of Information Representation in Intelligent Systems

S. T. Glavatsky, I. G. Burykin

Modern intelligent systems perform computational processing over a digital representation of a subject domain. The same subject domain can be represented in different forms. This paper considers the transition from an initial set of digitized information to a data structure in the context of the classical “Model – Algorithm – Program” scheme associated with A.A. Samarskii. A digital representation structure is introduced as the result of organizing the initial information according to a selected model. If X denotes the initial set of digitized information and R denotes relations and other structural connections specified by the representation, then the structure is written as $S = (X, R)$. The role of the structure of digital representation as one of the factors in choosing a processing method, on the basis of which an algorithm for its implementation is selected, is considered. For data science problems,

the sequence “digital representation – structure – method – algorithm – program” is considered.

Keywords: artificial intelligence, data science, digital data representation, data structure, databases, processing method, algorithm, mathematical modeling.

References

[1] B. N. Chetverushkin, A. P. Mikhailov, “Triad of Samarskii. The 100th Anniversary of Academician A. A. Samarskii”, *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **89**:2 (2019), 187–193. DOI: 10.31857/S0869-5873892187-193 (In Russian).

[2] S. T. Glavatsky, I. G. Burykin, “Teaching the Fundamental Foundations of Artificial Intelligence as an Implementation of the Concept of New Scientific Knowledge”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **26**:1 (2022), 146–152 (In Russian).

[3] S. T. Glavatsky, R. R. Aidagulov, V. V. Borisenko, I. G. Burykin, I. B. Kozhukhov, V. V. Tenzina, A. V. Shokurov, “Mathematical Methods and Algorithms of Theoretical Informatics in Data Science and Artificial Intelligence”, Mathematics in the Constellation of Sciences: Abstracts of Reports, 2024, 604–607 (In Russian).

[4] S. T. Glavatsky, I. G. Burykin, “Improving the Training Methodology for Students of Mathematical Specialties to Solve Problems of Artificial Intelligence and Data Science”, Programming and Computational Mathematics: Proceedings of the Conference Dedicated to the 100th Anniversary of the Birth of N. P. Trifonov, 2025, 50–54. DOI: 10.55959/MSU012316-6-2025-50-54 (In Russian).

[5] M. Xu, D. Cai, W. Yin, S. Wang, X. Jin, X. Liu, “Resource-efficient Algorithms and Systems of Foundation Models: A Survey”, *ACM Computing Surveys*, **57**:5 (2025), 110. DOI: 10.1145/3706418.

[6] E. S. Raymond, *The Cathedral and the Bazaar*, Version 3.0, accessed 14.10.2026, http://www.catb.org/~esr/writings/cathedral-bazaar/cathedral-bazaar/ar01s06.html.

[7] Gartner, Inc., *Hype Cycle for Data Management*, Gartner ID: G00850550. Published 21 July 2026, accessed 14.10.2026, https://www.gartner.com/en/documents/8152229.

Received on October 9, 2026

Асимптотически оптимальный по сложности синтез булевых схем с линейной динамической активностью для произвольных булевых функций

Ю. Дай*, С. А. Ложкин‡

Рассматривается задача синтеза схем из функциональных элементов (СФЭ) с одновременными ограничениями на взвешенную сложность и динамическую активность — наибольшее число элементов, значения которых различаются на двух входных наборах. Показано, что для любого конечного полного базиса $\mathcal{B}$, принадлежащего объединению двух специальных классов таких базисов, и для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить такую реализующую её СФЭ Σ_f в базисе $\mathcal{B}$, сложность $L(\Sigma_f)$ и динамическая активность $C(\Sigma_f)$ которой при $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют неравенствам:

$$L(\Sigma_f) \leq \rho(\mathcal{B})\frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{6\log_2 n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad C(\Sigma_f) = O(n),$$

где $\rho(\mathcal{B})$ — наименьший приведённый вес элементов базиса. Заметим, что первая из этих оценок асимптотически совпадает с соответствующей функцией Шеннона, а вторая даёт линейную верхнюю границу.

Ключевые слова: булевы схемы, взвешенная сложность, динамическая активность, функция Шеннона, оптимизация схем по двум параметрам.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i = \langle \varphi_i, L_i \rangle\}_{i=1}^{b}$ — фиксированный конечный полный базис, где элемент ε_i реализует булеву функцию $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, существенно

*Дай Юэ — асп. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: daiy0928@cs.msu.ru.

Dai Yue — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

‡*Ложкин Сергей Андреевич* — д.ф.-м.н., проф. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru.

Lozhkin Sergey Andreevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

зависящую от k_i булевых переменных, если $k_i \geq 2$, и имеет вес $L_i > 0$ для всех $i = 1, \ldots, b$. Число входов k_i называется порядком элемента. Для СФЭ Σ обозначим через $V(\Sigma)$ множество её элементов, через $L(u)$ — вес элемента u, а через $\varphi_u(x_1, \ldots, x_n)$ — функцию на его выходе. Положим

$$L(\Sigma) = \sum_{u \in V(\Sigma)} L(u), \qquad C(\Sigma) = \max_{a,b \in \{0,1\}^n} \sum_{u \in V(\Sigma)} \big(\varphi_u(a) \oplus \varphi_u(b)\big).$$

Заметим, что величина $C(\Sigma)$, называемая динамической активностью СФЭ Σ, равна максимальному числу её элементов с различными значениями на двух входных наборах.

Как обычно, через $P_2(n)$ обозначим множество булевых функций от переменных $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Сложность $L_{\mathcal{B}}(f)$ и динамическая активность $C_{\mathcal{B}}(f)$ функции $f \in P_2(n)$ равны минимумам $L(\Sigma)$ и $C(\Sigma)$ соответственно по всем СФЭ Σ над базисом $\mathcal{B}$, реализующим f. Соответствующие функции Шеннона определяются равенствами

$$L_{\mathcal{B}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} L_{\mathcal{B}}(f), \quad C_{\mathcal{B}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} C_{\mathcal{B}}(f).$$

Напомним, что приведённый вес элемента ε_i при $k_i \geq 2$ равен $L_i/(k_i - 1)$; обозначим через $\rho(\mathcal{B}) = \min_{i:k_i \geq 2} L_i/(k_i - 1)$ минимальный приведённый вес элементов базиса $\mathcal{B}$. Классическая асимптотика взвешенной сложности имеет вид $L_{\mathcal{B}}(n) \sim \rho(\mathcal{B}) 2^n/n$ [1]. Линейная верхняя оценка $C_{\mathcal{B}}(n)$ известна для любого конечного полного базиса, причём для стандартного базиса $\mathcal{B}_0 = \{\langle \wedge_2, 1\rangle, \langle \vee_2, 1\rangle, \langle \neg, 1\rangle\}$ она достигается одновременно с асимптотически оптимальной сложностью [2]. Попытки обобщить этот результат на некоторые классы базисов предприняты в [3]. В настоящей работе аналогичные оценки получены для двух классов базисов, задаваемых условиями на конъюнктивные и дизъюнктивные элементы.

2. Основной результат

Функция φ порядка k называется *конъюнктивной*, если для некоторого $a \in \{0,1\}^k$ выполнено $\varphi(a) = 1$ и $\varphi(a \oplus e_i) = 0$ при всех i, где e_i — i-й единичный вектор. Функция называется *нормализованной сильно конъюнктивной*, если эти равенства выполнены при $a = 1^k$ и, кроме того, $\varphi(1^k \oplus e_i \oplus e_j) = 0$ для некоторых $i \neq j$. *Дизъюнктивная* функция определяется двойственными условиями: $\psi(d) = 0$, $\psi(d \oplus e_i) = 1$ для некоторого d и всех i. Те же термины применяются к соответствующим элементам базиса.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{B}$ содержит либо нормализованный сильно конъюнктивный элемент приведённого веса $\rho(\mathcal{B})$, либо конъюнктивный и дизъюнктивный элементы, каждый приведённого веса $\rho(\mathcal{B})$. Тогда для каждой $f \in P_2(n)$ существует реализующая её СФЭ Σ_f над базисом $\mathcal{B}$, для которой при $n = 1, 2, \ldots$ выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} L(\Sigma_f) &\le \rho(\mathcal{B})\frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{6\log_2 n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ C(\Sigma_f) &= O(n), \end{aligned} \tag{1}$$

где постоянные в O-оценках зависят только от базиса $\mathcal{B}$.

Обозначим через $\mathrm{as}(g)$, $g \in P_2(n)$, среднее по всем входным наборам число чувствительных координат булевой функции g, которое определяется равенством

$$\mathrm{as}(g) = 2^{-n} \sum_{a \in \{0,1\}^n} \sum_{i=1}^{n} \big(g(a) \oplus g(a \oplus e_i)\big).$$

Координата i называется чувствительной для g на наборе a, если $g(a) \ne g(a \oplus e_i)$.

Следствие 1. *Для схемы Σ_f из теоремы 1 имеем $\sum_{u \in V(\Sigma_f)} \mathrm{as}(\varphi_u) = O(n^2)$.*

Действительно, эта сумма равна n-кратному среднему числу изменившихся элементов при равномерном выборе входного набора и изменяемой координаты, которое не превосходит $nC(\Sigma_f)$.

Список литературы

[1] О. Б. Лупанов, *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во МГУ, М., 1984.

[2] S. A. Lozhkin, M. S. Shupletsov, "Switching activity of Boolean circuits and synthesis of Boolean circuits with asymptotically optimal complexity and linear switching activity", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **36**:4 (2015), 450–460. DOI: 10.1134/s1995080215040277.

[3] Н. В. Пименов, *О синтезе близких к оптимальным как по сложности, так и по динамической активности схем из функциональных элементов в некоторых базисах*, Выпускная квалификационная работа, МГУ, Москва, 2020 .

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

Asymptotically Optimal Boolean Circuit Synthesis in Complexity with Linear Switching Activity for Arbitrary Boolean Functions

Y. Dai, S. A. Lozhkin

We consider the synthesis of Boolean circuits with simultaneous bounds on weighted complexity and switching activity, the maximum number of gates whose values differ between two input assignments. For every finite complete basis $\mathcal{B}$ belonging to the union of two special classes and every Boolean function $f(x_1, \ldots, x_n)$, we construct a circuit Σ_f over $\mathcal{B}$ that computes f. Its weighted complexity $L(\Sigma_f)$ and switching activity $C(\Sigma_f)$ satisfy the following bounds for $n = 1, 2, \ldots$:

$$L(\Sigma_f) \leq \rho(\mathcal{B}) \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{6 \log_2 n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad C(\Sigma_f) = O(n),$$

where $\rho(\mathcal{B})$ is the minimum reduced weight of the basis elements. The first bound is asymptotically equal to the corresponding Shannon function, while the second is a linear upper bound.

Keywords: Boolean circuits, weighted complexity, switching activity, Shannon function, two-parameter circuit optimization.

References

[1] O. B. Lupanov, *Asymptotic Estimates of the Complexity of Control Systems*, Moscow State University Publishing House, Moscow, 1984.

[2] S. A. Lozhkin, M. S. Shupletsov, "Switching activity of Boolean circuits and synthesis of Boolean circuits with asymptotically optimal complexity and linear switching activity", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **36**:4 (2015), 450–460. DOI: 10.1134/s1995080215040277.

[3] N. V. Pimenov, *On the synthesis of circuits of functional elements in certain bases that are close to optimal in both complexity and switching activity*, Graduation thesis, Moscow State University, Moscow, 2020.

Received on November 8, 2026

Асимптотически оптимальные гомеоморфные односторонние вложения троичных деревьев подобных формул в прямоугольные решетки

С. А. Ложкин*, Д. Мо‡

Рассматривается задача построения односторонних вложений троичных деревьев формул, подобных заданным формулам с поднятыми отрицаниями над базисом коммутативных и ассоциативных операций, в прямоугольные решетки. Для произвольной исходной формулы получены оценки глубины подобной ей формулы и высоты прямоугольной решетки, допускающей каноническое вложение ее дерева.

Ключевые слова: деревья формул; подобные формулы; вложения; прямоугольные решетки;.

1. Постановка задачи и основные понятия[1]

В данной работе исследуется задача вложения троичных деревьев подобных формул над базисом коммутативных и ассоциативных операций в прямоугольную решетку (ПР), т. е. граф, вершинами которого являются точки плоскости (x, y), где x и y — целые числа, заключенные в целочисленные отрезки $[a, a + \ell]$ и $[b, b + h]$ соответственно, а ребра соединяют все пары точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) таких, что $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1$, а его площадью называется величина ℓh.

Будем, как обычно, через $V(G)$, $E(G)$ и $C(G)$ обозначать множество вершин, ребер и простых цепей неориентированного графа G соответственно. Следуя [2], *вложением* графа G в граф F назовем пару инъективных отображений (φ, ψ) такую, что $\varphi\colon V(G) \to V(F)$, $\psi\colon E(G) \to C(F)$ и для

*Ложкин Сергей Андреевич — д.ф.-м.н., проф. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: lozhkin@cs.msu.ru.

Lozhkin Sergey Andreevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

‡*Мо Ди* — асп. каф. математической кибернетики ВМК МГУ, e-mail: xdmodi1991@163.com.

Mo Di — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Mathematical Cybernetics.

[1]Те понятия, которые здесь не определяются, могут быть найдены, например, в [1].

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

любого ребра $e = (u, v) \in E(G)$ цепь $\psi(e)$ соединяет вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$. При этом образы ребер из $E(G)$ будем считать *транзитными цепями* данного вложения и будем рассматривать лишь т.н. *гомеоморфные* вложения, в которых транзитные цепи не пересекаются по внутренним вершинам. Будем предполагать также, что при вложении деревьев в ПР образы листьев дерева должны быть расположены на нижней стороне решетки, а образ корня — на ее верхней стороне, считая указанные вложения *каноническими*.

Пусть задан счетный упорядоченный алфавит булевых переменных (БП) $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и базис $\text{Б} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_b\}$, где для каждого i, $i = 1, ..., b$, функция алгебры логики (ФАЛ) φ_i существенно зависит от всех своих k_i БП, если $k_i \geqslant 2$. Обычным образом введем понятие формулы над базисом Б и реализуемой ею ФАЛ, а множество всех таких формул будем обозначать через $\text{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$.

Формуле F из $\text{U}_{\text{Б}}^{\Phi}$, как обычно, сопоставим корневое дерево $\mathcal{D}$, которое описывает ее структуру, заметив, что ранг $R(F)$ формулы F, то есть число вхождений в нее БП, равен числу листьев связанного с ней дерева $\mathcal{D}$, а ее глубина $D(F)$ равна глубине этого дерева. Сложностью $L(F)$ формулы F называется число вхождений в нее функциональных символов (ФС), а альтернированием $Alt(F)$ — максимальное число изменений пометок функций вдоль пути от листа дерева, соответствующего формуле F, до его корня.

Будем рассматривать базис $\text{Б}'_0 = \{x_1 \& x_2 \& x_3,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}\}$, и положим $\text{U}_{\text{Б}'_0}^{\Phi} = \text{U}^{\Phi}$. Формула из U^{Φ} называется *формулой с поднятыми отрицаниями*, если все ФС отрицания встречаются только над БП. Формула F_2 называется *подобной* формуле F_1, если F_2 может быть получена из F_1 путем нескольких эквивалентных преобразований с помощью тождеств ассоциативности и коммутативности[2] для базисных ФАЛ базиса $\text{Б}'_0$.

2. Формулировки известных и вновь полученных результатов

Теорема 1 ([3]). *Для любой формулы F в базисе двуместных коммутативных и ассоциативных функций Б$=\{\varphi_1, ..., \varphi_b\}$ и числа, определяемого равенством $n = \lceil \log_2(L(F) + 1) + \log_2 6 \cdot Alt(F) \rceil$, существует формула F', подобная F, глубины не более $d = n + 1$, а также каноническое*

[2]При этом допускается замена трехвходового базисного элемента суперпозицией двух двухвходовых элементов того же типа и обратно.

вложение дерева $\mathcal{D}(F')$ в ПР высоты не более $h = \frac{n}{3}(1+\alpha(n))$, где $\alpha(n) = O(\frac{1}{\sqrt{n}}) = o(1)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 ([4]). *Пусть $F(x_1, ..., x_n)$ — формула с поднятыми отрицаниями над базисом $Б_0'$, в которой минимальный ранг максимальных по включению букв БП $x_1, ..., x_n$ элементарных конъюнкций или дизъюнкций, являющихся ее подформулами, не меньше, чем 3^s. Тогда существует подобная F формула $\hat{F}$ глубины не больше, чем d, где $d = \lceil \log_3(2L(F)+1) \rceil + Alt(F) + 3$, а также каноническое вложение дерева этой формулы в ПР высоты не более, чем $d - \lfloor \frac{s}{3} \rfloor$.*

Теорема 2 показывает, что уменьшение высоты вложения может быть получено за счет достаточно больших максимальных элементарных конъюнкций или дизъюнкций исходной формулы. Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 3. *Для любой формулы F с поднятыми отрицаниями над базисом $Б_0'$ положим $n = \left\lceil \log_3\big(2L(F)+1\big) + \mathrm{Alt}(F)\log_3 12 \right\rceil + 1$. Тогда существует подобная F формула $\widehat{F}$ глубины не более $n+1$, дерево которой допускает вложение в ПР высоты не более*

$$\left\lceil \frac{2n + 2\sqrt{n-1}}{3} \right\rceil + 2 = \frac{2}{3}n + O(\sqrt{n}).$$

Аналогично теореме 1 она дает искомые оценки исследуемых величин через сложность $L(F)$ и альтернирование $Alt(F)$ исходной формулы F. Ее доказательство основано на рекурсивном разбиении троичных деревьев специального вида из диссертации [5]. Из [5] следует также, что в общем случае указанные оценки не могут быть существенно улучшены.

Список литературы

[1] С. А. Ложкин, *Лекции по основам кибернетики*, Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, М., 2004.

[2] С. А. Ложкин, Ли Да Мин, “О некоторых оптимальных вложениях двоичных и троичных деревьев в плоские прямоугольные решетки”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 1995, № 4, 49–55.

[3] С. А. Ложкин, Л. И. Высоцкий, “О некоторых асимптотически оптимальных односторонних вложениях деревьев подобных формул в прямоугольные решетки”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.*, 2017, № 2, 38–45.

[4] Б. М. Ибрагимов, *О некоторых асимптотически оптимальных односторонних вложениях троичных деревьев подобных формул в прямоугольные решетки*, магистерская диссертация, МГУ, М., 2020.

[5] Ли Да Мин, *Некоторые оптимальные вложения древовидных графов в плоские прямоугольные решетки*, дис. канд. физ.-мат. наук, МГУ, М., 1994 .

Статья поступила 7 ноября 2026 г.

Asymptotically optimal one-sided embeddings of ternary trees of similar formulas into rectangular grids

S. A. Lozhkin, D. Mo

The problem of constructing one-sided embeddings of ternary trees of formulas similar to given formulas with negations pushed down to the variables, over a basis of commutative and associative operations, into rectangular grids is considered. For an arbitrary initial formula, estimates are obtained for the depth of a similar formula and for the height of a rectangular grid admitting a canonical embedding of its tree.

Keywords: formula trees; similar formulas; embeddings; rectangular grids;.

References

[1] S. A. Lozhkin, *Lectures on the Fundamentals of Cybernetics*, Publishing Department of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, Moscow, 2004.

[2] S. A. Lozhkin, Li Da Min, "On Some Optimal Embeddings of Binary and Ternary Trees into Planar Rectangular Grids", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 1995, № 4, 47–53.

[3] S. A. Lozhkin, L. I. Vysotsky, "On Some Asymptotically Optimal One-Sided Embeddings of Trees of Similar Formulas into Rectangular Grids", *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, **41**:2 (2017), 89–96.

[4] B. M. Ibragimov, *On Some Asymptotically Optimal One-Sided Embeddings of Ternary Trees of Similar Formulas into Rectangular Grids*, Master's Thesis, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2020.

[5] Li Da Min, *Some Optimal Embeddings of Tree Graphs into Planar Rectangular Grids*, Ph.D. Thesis, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 1994.

Received on November 7, 2026

Подход к проектированию системы подготовки научных статей в техническом университете

И. И. Максимов*

Предложен подход к подготовке научных статей с независимыми моделями содержания и требований издания. Конвейер объединяет разбор рукописи, формирование документов и контроль преобразования. Реализованный модуль создаёт проект LaTeX, а для входного DOCX — также редактируемый документ Word. Все 63 функциональных теста завершились успешно. Проверены обработка структурных элементов, сохранность объектов и обнаружение заданных нарушений. Подход позволяет повторно использовать обработчики при смене издания и выделять участки для редакторской проверки.

Ключевые слова: научная статья, обработка документов, структурирование, шаблон, LaTeX, контроль преобразования.

1. Постановка задачи

Рассматривается подготовка авторской рукописи по требованиям журнала или конференции. Для технического университета существенна возможность использовать одну систему при работе с разными изданиями. Переоформление должно сохранять текст, числовые данные, таблицы, рисунки, формулы и ссылки.

При анализе научных документов учитываются логическая структура [1], разметка объектов страницы [2], порядок чтения и иерархия элементов [3]. В настоящей работе структурный анализ включён в процесс переоформления рукописи и контроля сохранности материала.

Цель работы — разработать подход к построению системы подготовки статей с независимыми описаниями содержания и требований издания. На вход поступают рукопись и образец либо текстовые требования. Результат включает исходники для вёрстки и отчёт о проверке; для рукописи DOCX дополнительно формируется редактируемый документ Word.

* *Максимов Игорь Игоревич* — студент 3-го курса кафедры «Системы автоматизированной поддержки принятия решений» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», e-mail: maksimov.i289@yandex.ru.

Maksimov Igor Igorevich — third-year student, Department of Automated Decision Support Systems, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Tambov State Technical University”.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Организация преобразования

Структурная модель рукописи хранит метаданные, разделы и абзацы. Таблицы, рисунки, формулы и списки представлены отдельными объектами с подписями, идентификаторами и ссылками. Сохраняются сведения об их положении в исходном файле. Профиль издания задаёт параметры страницы, полей, колонок, шрифта, заголовков и подписей, настройки класса LaTeX. Смена профиля изменяет оформление выделенных элементов без изменения алгоритма разбора рукописи.

Подход реализован в самостоятельном модуле проекта WEBTSTU. Анализатор входного пакета определяет основной файл и ресурсы. Обработчики DOCX, LaTeX и PDF формируют общую структурную модель. Для назначения роли блока учитываются три группы признаков: явная разметка (стили и нумерация DOCX, команды и окружения LaTeX), положение относительно соседних блоков и текстовые маркеры (например, номер раздела или подпись «Рисунок» либо «Таблица»). Явная структурная разметка задаёт первичного кандидата; при её отсутствии роль назначается при согласовании позиционных и текстовых признаков. Для PDF, где такая разметка обычно недоступна, используются две последние группы. Если признаки указывают на разные роли либо не дают однозначного решения, блок считается спорным: его содержимое сохраняется, а классификация требует редакторской проверки. Подключаемая языковая модель может предложить роль спорного блока, но не переписывает научный текст и не подменяет редакторское решение.

Генератор применяет профиль к структурной модели и создаёт проект LaTeX. При наличии компилятора формируется PDF. Редактируемый документ Word создаётся отдельно, только для входной рукописи DOCX, с использованием сохранённых объектов исходного файла. Для входных LaTeX и PDF получение документа Word не заявляется; обратное преобразование PDF в Word не выполняется. Промежуточные модели и результаты этапов сохраняются для проверки.

3. Контроль и результаты проверки

Структурная проверка сопоставляет количества таблиц, рисунков и формул, контролирует идентификаторы и связи. Содержательная проверка выявляет потери текста и объектов, включая строки и ячейки таблиц. Техническая проверка охватывает файлы, ресурсы, исходники LaTeX, сообщения компилятора, стили Word и ширину таблиц. Ошибки и предупреждения регистрируются раздельно; спорные случаи передаются на

редакторский контроль. Математическая эквивалентность формул этим способом не устанавливается.

Проверена версия 0.4.0 из архива WEBTSTU-main.zip в Python 3.13.5 и pytest 9.0.2. Внешняя языковая модель отключена. Запущены 63 теста из семи файлов: 22 — на разбор документов и назначение блоков, 32 — на формирование документов и сохранность объектов, 9 — на обработку пакетов и работу конвейера. Использованы искусственные документы с заданными свойствами. Успех означает выполнение ожидаемого условия, включая обнаружение специально внесённой ошибки.

Все 63 теста завершились успешно. Подтверждены сохранение номера и текста заголовка, отсутствие дублирования текста объединённых ячеек, перенос изображений, обработка двуязычного начального блока и обнаружение потери строк таблицы. Проверены создание исходников LaTeX и архива проекта, применение оформления и диагностика заданных нарушений.

Результаты относятся к проверенным программным компонентам. Число тестов не является числом обработанных статей. Этот запуск не оценивает точность распознавания на независимом корпусе, качество окончательной вёрстки PDF и работу внешней языковой модели.

4. Заключение

Реализован подход с независимыми моделями содержания и требований издания. Разбор, оформление и контроль объединены в единый конвейер. Функциональные тесты подтвердили выполнение заданных сценариев. Подход предназначен для повторного использования обработчиков при смене издания и контроля сохранности рукописи.

При подготовке текста и организации запуска тестов использовались инструменты на основе больших языковых моделей.

Список литературы

[1] A. Ramesh Kashyap, Y. Yang, M.-Y. Kan, “Scientific document processing: challenges for modern learning methods”, *International Journal on Digital Libraries*, **24**:4 (2023), 283–309. DOI: 10.1007/s00799-023-00352-7.

[2] A. Gemelli, S. Marinai, L. Pisaneschi, F. Santoni, “Datasets and annotations for layout analysis of scientific articles”, *International Journal on Document Analysis and Recognition*, **27**:4 (2024), 683–705. DOI: 10.1007/s10032-024-00461-2.

[3] J. Wang, K. Hu, Z. Zhong, L. Sun, Q. Huo, “Detect-order-construct: A tree construction based approach for hierarchical document structure analysis”,

Pattern Recognition, **156** (2024), 110836. DOI: 10.1016/j.patcog.2024.110836.

Статья поступила 7 октября 2026 г.

An approach to designing a scientific article preparation system for a technical university

I. I. Maksimov

An approach to scientific article preparation using independent models of content and publication requirements is proposed. The pipeline combines manuscript parsing, document generation, and validation. The implemented module produces a LaTeX project and, for DOCX input, an editable Word document. All 63 functional tests passed, covering structural processing, object preservation, and detection of predefined violations. The approach enables parsers to be reused across publications and identifies elements requiring editorial review.

Keywords: scientific article, document processing, structure, template, LaTeX, conversion validation.

References

[1] A. Ramesh Kashyap, Y. Yang, M.-Y. Kan, "Scientific document processing: challenges for modern learning methods", *International Journal on Digital Libraries*, **24**:4 (2023), 283–309. DOI: 10.1007/s00799-023-00352-7.

[2] A. Gemelli, S. Marinai, L. Pisaneschi, F. Santoni, "Datasets and annotations for layout analysis of scientific articles", *International Journal on Document Analysis and Recognition*, **27**:4 (2024), 683–705. DOI: 10.1007/s10032-024-00461-2.

[3] J. Wang, K. Hu, Z. Zhong, L. Sun, Q. Huo, "Detect-order-construct: A tree construction based approach for hierarchical document structure analysis", *Pattern Recognition*, **156** (2024), 110836. DOI: 10.1016/j.patcog.2024.110836.

Received on October 7, 2026

Сложность реализации почти всех булевых функций клеточными автоматами с локаторами

Ч. Надиров*

В работе исследуется возможность реализации произвольной булевой функции клеточными автоматами с локаторами. Доказано, что в двумерном клеточном автомате с локаторами любая булева функция от n переменных реализуется схемой площади $2^n+O(n2^{n/2})$ с задержкой четыре такта и поступлением нового входного набора на каждом такте. Подсчёт конфигураций даёт нижнюю оценку $\Omega(2^n)$ для почти всех функций. Функция Шеннона площади имеет порядок 2^n.

Ключевые слова: клеточные автоматы, локаторы, булевы функции, площадь схем, функция Шеннона.

1. Введение

Понятие клеточного автомата возникло в результате усовершенствования модели Дж. фон Неймана [1], предложенной им для описания процессов самовоспроизведения в биологии и технике. В дальнейшем эта модель использовалась В. Б. Кудрявцевым, А. С. Подколзиным, А. А. Болотовым, Э. Э. Гасановым [2, 3].

В модели клеточного автомата с локаторами, предложенной Э. Э. Гасановым [4], ячейки принимают суммы сигналов из заданных областей пространства, что позволяет передавать информацию на произвольное расстояние. В работе [5] Г. В. Калачев привёл некоторые уточнения этой модели. В работе [6] клеточные автоматы с локаторами рассматриваются как модель устройств с беспроводной связью.

В работе [7] описывается метод представления схем из функциональных элементов (СФЭ) клеточными автоматами с локаторами (КАсЛ),

* *Надиров Чингиз* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова; научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, профессор Гасанов Эльяр Эльдарович, e-mail: chingiz.nadirov@math.msu.ru.

Nadirov Chingiz — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; supervisor — Professor Elyar Eldarovich Gasanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

причем СФЭ с n элементами моделируется КАсЛ с площадью порядка n^2. Откуда сразу получаем, что булевские функции можно реализовать КАсЛ с площадью порядка $2^{2n}/n^2$. В данной работе будет приведен более экономный метод реализации булевских функций КАсЛ.

2. Постановка задачи

Автомат на решётке $\mathbb{Z}^2$ имеет конечное множество состояний Q с состоянием покоя q_0 и конечную коммутативную полугруппу сигналов $(G, +)$ с нейтральным элементом e. Локаторы суммируют сигналы из заданных областей, исключая саму ячейку. Правила синхронного перехода, алфавиты и локаторы фиксированы независимо от числа переменных и функции.

На каждом такте $s \geq 0$ на вход схемы поступает булев набор $x(s) = (x_1(s), \ldots, x_n(s)) \in \{0,1\}^n$. Входные ячейки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ посылают в эфир сигналы, задаваемые извне:

$$g_s(\alpha_i) = b_{x_i(s)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $g_s(\alpha_i)$ — сигнал ячейки α_i в момент s, а $b_0, b_1 \in G$, $b_0 \neq b_1$, соответствуют логическим значениям 0 и 1. Входные наборы могут изменяться независимо на каждом такте. Остальные ячейки обновляются синхронно по правилам автомата; начальный эфир вне входов нейтрален.

Схема реализует булеву функцию $F\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с задержкой $t > 0$, если для любого входного потока и всех $s \geq 0$

$$g_{s+t}(\alpha_{\text{out}}) = b_{F(x(s))},$$

где выходная ячейка α_{out} отлична от входных. Таким образом, результат появляется через t тактов при поступлении нового входного набора на каждом такте.

Площадь схемы — число ячеек минимального осепараллельного прямоугольника, содержащего входы, выход, отличный от всех входов, и все ячейки, которые хотя бы в один момент времени хотя бы на одном допустимом входном потоке имеют состояние, отличное от q_0, или сигнал, отличный от e.

В работе предлагается конструкция клеточного автомата с локаторами, не требующая изменения его правил в зависимости от числа переменных и реализуемой булевой функции. Минимальную площадь схемы, реализующей булеву функцию F в этом автомате, обозначим через $L(F)$. Функцией Шеннона площади назовём величину

$$L(n) = \max_{F\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}} L(F).$$

3. Основной результат

Теорема. *Для почти всех булевых функций от n переменных выполнено*

$$L(F) \asymp 2^n.$$

Знак $\asymp$ означает совпадение порядка, а «почти все» — долю, стремящуюся к единице при $n \to \infty$.

Для любой функции от $n \geq 1$ переменных построена схема площади

$$S(n) = 2^n + O(n2^{n/2}).$$

Автомат имеет девять состояний, четыре сигнала и два локатора. Задержка составляет четыре такта, новый входной набор может поступать на каждом такте. Функция Шеннона площади удовлетворяет соотношению $L(n) \asymp 2^n$.

Идея построения. Переменные разбиваются на две группы, полные конъюнкции которых совмещаются в прямоугольной матрице. Выбор активных ячеек определяется таблицей истинности функции. Горизонтальное и вертикальное агрегирование сигналов в двухкомпонентном алфавите обеспечивает вычисление функции при непрерывном поступлении входных наборов.

Нижняя оценка $\Omega(2^n)$ для почти всех функций получена подсчётом размеченных начальных конфигураций клеточного автомата с локаторами и сравнением их числа с общим числом булевых функций.

Список литературы

[1] John von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, University of Illinois Press, London, 1966.

[2] В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин, А. А. Болотов, *Основы теории однородных структур*, Наука, Москва, 1990 (296 с.).

[3] В. Б. Кудрявцев, Э. Э. Гасанов, А. С. Подколзин, *Теория интеллектуальных систем: в 4 т. Т. 4. Теория автоматов*, 2-е изд., Издательство Московского университета, Москва, 2026 (305 с.).

[4] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:2 (2020), 119–132.

[5] Г. В. Калачев, “Замечания к определению клеточного автомата с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **24**:3 (2020), 47–56.

[6] Э. Э. Гасанов, “Клеточные автоматы с локаторами как модель устройств с беспроводной связью”, *Математические вопросы кибернетики*, **21**, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5.

[7] Э. Э. Гасанов, Г. В. Калачев, Д. А. Бухарина, “Моделирование схем из функциональных элементов клеточными автоматами с локаторами”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:4 (2026), 202–205.

Статья поступила 26 октября 2026 г.

The Complexity of Implementing Almost All Boolean Functions Using Cellular Automata with Locators

C. Nadirov

This paper investigates the possibility of implementing arbitrary Boolean functions using cellular automata with locators. It is proved that, in a two-dimensional cellular automaton with locators, any Boolean function of n variables can be implemented by a circuit of area $2^n + O(n2^{n/2})$, with a delay of four time steps and a new input vector supplied at every time step. Configuration counting yields a lower bound of $\Omega(2^n)$ for almost all Boolean functions. The Shannon function for circuit area is of order 2^n.

Keywords: cellular automata, locators, Boolean functions, circuit area, Shannon function.

References

[1] John von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, University of Illinois Press, London, 1966.

[2] V. B. Kudryavtsev, A. S. Podkolzin, A. A. Bolotov, *Foundations of the theory of homogeneous structures*, Nauka, Moscow, 1990 (296 pp.) (In Russian).

[3] V. B. Kudryavtsev, E. E. Gasanov, A. S. Podkolzin, *Theory of intelligent systems: in 4 volumes. Vol. 4. Automata theory*, 2nd ed., Moscow University Press, Moscow, 2026 (305 pp.) (In Russian).

[4] E. E. Gasanov, “Cellular automata with locators”, *Intelligent systems*, **24**:2 (2020), 119–132 (In Russian).

[5] G. V. Kalachev, “Remarks on the definition of a cellular automaton with locators”, *Intelligent systems*, **24**:3 (2020), 47–56 (In Russian).

[6] E. E. Gasanov, “Cellular automata with locators as a model of devices with wireless communication”, *Mathematical problems of cybernetics*, **21**, FIZMATLIT, Moscow, 2023, 5–51. DOI: 10.20948/mvk-2023-5 (In Russian).

[7] E. E. Gasanov, G. V. Kalachev, D. A. Bukharina, “Modeling circuits of functional elements by cellular automata with locators”, *Intelligent systems*, **30**:4 (2026), 202–205 (In Russian).

Received on October 26, 2026

О минимальных единичных проверяющих тестах размыкания для контактных схем с дополнительными полюсами

К. А. Попков*

Рассматривается задача синтеза многополюсных неизбыточных контактных схем, реализующих заданные булевы функции между полюсами A и B и допускающих короткие единичные проверяющие тесты относительно размыканий контактов. Для каждой булевой функции и каждого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$ найдено минимально возможное значение длины такого теста. В частности, доказано, что оно не превосходит 3, если $\mathcal{P} \neq \{\{A, B\}\}$.

Ключевые слова: контактная схема, обрыв контакта, дополнительный полюс, единичный проверяющий тест, булева функция.

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции. Логический подход к тестированию двухполюсных контактных схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [2]; опишем одно из возможных обобщений данного подхода на случай схем с дополнительными полюсами.

Пусть зафиксированы $d \in \mathbb{N}$ и некоторое непустое множество $\mathcal{P}$ неупорядоченных пар полюсов из множества $\{A, B, V_1, \ldots, V_d\}$, обладающее тем свойством, что никакая пара из $\mathcal{P}$ не может состоять из двух полюсов с одним и тем же обозначением (например, $\{A, A\}$). Назовём $\mathcal{P}$ *тестовым полюсным множеством* и занумеруем произвольным образом его элементы различными натуральными числами от 1 до p, где $p = |\mathcal{P}|$; очевидно, что $1 \leqslant p \leqslant \frac{(d+2)(d+1)}{2}$. Рассмотрим произвольную $(d+2)$-полюсную контактную схему S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$; при этом из рассмотрения не исключаем случай, когда некоторые из полюсов $A, B, V_1, \ldots, V_d$ в схеме S совпадают. Пусть данная схема для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ реализует между i-й парой своих полюсов булеву функцию $f_i(\tilde{x}^n)$. Будем предполагать, что под воздействием некоторого источника неисправностей в схеме S может произойти обрыв (размыкание) произвольного одного контакта. При указанной неисправности проводимость между концами

Попков Кирилл Андреевич — докт. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. сектора теоретической кибернетики Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, e-mail: kirill-formulist@mail.ru, ORCID: 0000-0003-3763-4050.

Popkov Kirill Andreevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Sector of Theoretical Cybernetics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

этого контакта становится тождественно нулевой, а схема S для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ начинает реализовывать между i-й парой своих полюсов некоторую булеву функцию $g_i(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от $f_i(\tilde{x}^n)$. Все такие наборы $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_p(\tilde{x}^n))$ назовём *наборами функций неисправности* схемы S. *Единичным проверяющим тестом* для схемы S назовём такое множество T наборов значений булевых переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любого нетривиального, т.е. отличного от $(f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_p(\tilde{x}^n))$, набора функций неисправности $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_p(\tilde{x}^n))$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $(f_1(\tilde{\sigma}), \ldots, f_p(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g_p(\tilde{\sigma}))$. Будем рассматривать единичные проверяющие тесты (ЕПТ) только для *неизбыточных схем*, в которых обрыв любого одного контакта приводит к нетривиальному набору функций неисправности.

Легко видеть, что определение ЕПТ не зависит от того, в каком порядке элементы множества $\mathcal{P}$ занумерованы числами от 1 до p.

Пусть T — ЕПТ для некоторой $(d+2)$-полюсной контактной схемы S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$ и заданным тестовым полюсным множеством $\mathcal{P}$. Введём следующие обозначения: $D_{d,\mathcal{P}}(T)$ — длина теста T; $D_{d,\mathcal{P}}(S) = \min D_{d,\mathcal{P}}(T)$, где минимум берётся по всем ЕПТ T для схемы S; $D_{d,\mathcal{P}}(f) = \min D_{d,\mathcal{P}}(S)$, где минимум берётся по всем неизбыточным $(d+2)$-полюсным контактным схемам S с полюсами $A, B, V_1, \ldots, V_d$, реализующим между полюсами A и B функцию f; $D_{d,\mathcal{P}}(n) = \max D_{d,\mathcal{P}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функцию $D_{d,\mathcal{P}}(n)$ назовём *функцией Шеннона* длины ЕПТ.

В работе [3] для каждой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ была введена [3, с. 69–70] величина $m(f)$, достаточно просто вычисляемая по столбцу значений этой функции, и было фактически установлено [3, теорема 1] равенство $D_{d,\{\{A,B\}\}}(f) = m(f)$ для любого $d \in \mathbb{N}$; определение величины $m(f)$ ввиду его громоздкости здесь не приводится. В [4] был рассмотрен случай $d = 1$ и произвольного тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, отличного от $\{\{A, B\}\}$: в [4, теорема 2] найдено точное значение величины $D_{1,\mathcal{P}}(f)$ для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, а в [4, следствие 1] установлено равенство $D_{1,\mathcal{P}}(n) = \min(3, n)$ для любого $n \geqslant 0$. В работе [5] рассматривался случай произвольных целого $d \geqslant 2$ и тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, содержащего хотя бы две отличных от $\{A, B\}$ и непересекающихся пары полюсов: в [5, теорема 1] найдено точное значение величины $D_{d,\mathcal{P}}(f)$ для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, а в [5, следствие 1] установлено равенство $D_{d,\mathcal{P}}(n) = \min(2, n)$ для любого $n \geqslant 0$.

Положим $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{\{A, B\}\}$. Если $\mathcal{P}' = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_3\}\}$ для некоторых $P_1, P_2, P_3 \in \{A, B, V_1, ..., V_d\}$, то не более одного из полюсов P_1, P_2, P_3 принадлежит множеству $\{A, B\}$; без ограничения общности будем считать, что $P_2 \notin \{A, B\}$ и $P_3 \notin \{A, B\}$, и положим $\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \setminus$

$\{\{P_1, P_2\}\}$. В противном случае полагаем $\mathcal{P}'' = \mathcal{P}$. Введём обозначение

$$N_1(\mathcal{P}) = \min\left(|\mathcal{P}''|, \min_{V \in \{V_1,\ldots,V_d\}} |\mathcal{P}'' \setminus \{\{A,B\},\{A,V\},\{B,V\}\}| + 1\right).$$

Обозначим через $N_2(\mathcal{P})$ число таких пар, являющихся элементами множества $\mathcal{P}''$, что в каждой паре оба полюса отличны от A и от B.

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, любого целого $d \geqslant 2$ и любого такого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, что $|\mathcal{P}'| \geqslant 1$ и любые две пары полюсов из множества $\mathcal{P}'$ содержат общий полюс, справедливо равенство*

$$D_{d,\mathcal{P}}(f) = \begin{cases} m(f), & \text{если } m(f) \leqslant 2, \\ 2, & \text{если } m(f) > 2 \text{ и существуют такое } r \in \{1,\ldots,n\}, \\ & \text{такие попарно различные } i_1,\ldots,i_r \in \{1,\ldots,n\} \text{ и} \\ & \text{такие } \alpha_1,\ldots,\alpha_r \in \{0,1\}, \text{ что } f(\tilde{x}^n) \leqslant x_{i_1}^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\alpha_r} \\ & \text{и выполнен один из следующих случаев:} \\ & 1)\ f(\tilde{x}^n) \not\leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r} \text{ и } r \leqslant N_1(\mathcal{P}) + 1, \\ & 2)\ f(\tilde{x}^n) \leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r} \text{ и } r \leqslant N_2(\mathcal{P}) + 1, \\ 3 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(Запись $f(\tilde{x}^n) \not\leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r}$ означает, что не выполнено функциональное неравенство $f(\tilde{x}^n) \leqslant x_{i_1}^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\alpha}_r}$; полагаем $x_{i_j}^1 = x_{i_j}$, $x_{i_j}^0 = \overline{x}_{i_j}$.)

Следствие 1. *Для любых целых $n \geqslant 0$, $d \geqslant 2$ и любого такого тестового полюсного множества $\mathcal{P}$, что $|\mathcal{P}'| \geqslant 1$ и любые две пары полюсов из множества $\mathcal{P}'$ содержат общий полюс, справедливо неравенство $D_{d,\mathcal{P}}(n) \leqslant \min(3, n)$.*

Объединяя формулировки теоремы 1 и следствия 1 с вышеперечисленными результатами работ [3–5], получаем, что для любых булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $d \in \mathbb{N}$ и тестового полюсного множества $\mathcal{P}$ удалось найти точное значение величины $D_{d,\mathcal{P}}(f)$, причём в случае $\mathcal{P} \neq \{\{A,B\}\}$ оно не превосходит 3.

Список литературы

[1] О. Б. Лупанов, *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд-во Моск. ун-та, М, 1984, 138 с.

[2] И. А. Чегис, С. В. Яблонский, “Логические способы контроля работы электрических схем”, *Труды МИАН*, **51** (1958), 270–360.

[3] К. А. Попков, “О проверяющих тестах размыкания для контактных схем”, *Дискретная математика*, **29**:4 (2017), 66–86. DOI: 10.4213/dm1447.

[4] К. А. Попков, “Короткие проверяющие тесты размыкания для контактных схем с дополнительным полюсом”, *Дискретная математика*, **36**:4 (2024), 117–137. DOI: 10.4213/dm1844.

[5] К. А. Попков, “Короткие единичные проверяющие тесты размыкания для контактных схем с двумя и более дополнительными полюсами”, *Прикладная дискретная математика*, 2026, № 71, 63–74. DOI: 10.17223/20710410/71/4.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

On minimal single fault detection tests of contact break for contact circuits with additional poles

K. A. Popkov

We consider a problem of synthesis of multi-pole irredundant contact circuits, implementing given Boolean functions between poles A and B and allowing short single fault detection tests relative to contact breaks. For each Boolean function and each test pole set $\mathcal{P}$, the minimal possible length value of such a test is found. In particular, it is proved that this value does not exceed 3 if $\mathcal{P} \neq \{\{A, B\}\}$.

Keywords: contact circuit, contact break, additional pole, single fault detection test, Boolean function.

References

[1] O. B. Lupanov, *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem*, MSU Publ., M, 1984 (in Russian), 138 pp.

[2] I. A. Chegis, S. V. Yablonskiy, “Logical ways of monitoring the operation of electrical circuits”, *Trudy MIAN*, **51** (1958), 270–360 (in Russian).

[3] K. A. Popkov, “On fault detection tests of contact break for contact circuits”, *Discrete Mathematics and Applications*, **28**:6 (2018), 369–383. DOI: 10.1515/dma-2018-0033.

[4] K. A. Popkov, “Short fault detection tests of contact break for contact circuits with an additional pole”, *Discrete Mathematics and Applications*, **36**:1 (2026), 27–41. DOI: 10.1515/dma-2026-0003.

[5] K. A. Popkov, “Short single fault detection tests of contact break for contact circuits with two or more additional poles”, *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2026, № 71, 63–74 (in Russian. DOI: 10.17223/20710410/71/4).

Received on November 9, 2026

О единичных проверяющих тестах для формул в некоторых базисах при константных неисправностях на выходах функциональных элементов

Чж. Цуй*, Д. С. Романов†

В работе исследуется длина единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в булевых формулах. Для трёх базисов, близких к стандартному, установлена асимптотическая верхняя оценка функции Шеннона. Для базисов «стрелка Пирса» и «штрих Шеффера» получены растущая нижняя оценка этой функции, а также выраженная через ранг формулы верхняя оценка длины минимального теста. Показано, что не всякая булева функция допускает неизбыточную реализацию над последними двумя базисами.

Ключевые слова: проверяющий тест, константные неисправности, булева формула.

1. Введение и основные результаты

Булева формула может быть представлена как схема из функциональных элементов (СФЭ) с одним выходом без ветвлений на выходах функциональных элементов (ФЭ). Будем в любой базис неявно включать тождественную функцию, понимая под этим лишь возможность пустой формулы (непосредственного соединения входа с выходом). Отдельные ФЭ, реализующие тождественную функцию, не рассматриваются и неисправностям не подвергаются.

Константная неисправность на выходе ФЭ есть результат замены исходного ФЭ на функциональный элемент, реализующий константу. Через O_1^{c} (IO_1^{c}) обозначается источник одиночных произвольных константных неисправностей на выходах ФЭ (соответственно, источник одиночных

Цуй Чжэнюй — аспирант факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: ourobros1234@gmail.com.

Cui Zhenyu — Postgraduate student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

†*Романов Дмитрий Сергеевич* — профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: romanov@cs.msu.ru.

Romanov Dmitrii Sergeevich — Professor, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

произвольных константных неисправностей на входах и выходах ФЭ). Множество T входных наборов формулы S, реализующей функцию f, является *проверяющим тестом* относительно O_1^{c}, если для любой полученной при такой неисправности формулы, реализующей функцию $g \neq f$, в T найдётся набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $f(\widetilde{\alpha}) \neq g(\widetilde{\alpha})$. Число наборов в тесте называется его *длиной*. Длину минимального теста обозначим через $L^{\mathrm{dt}}(O_1^{\mathrm{c}}, S)$. Формула считается *неизбыточной*, если при любой одиночной нетривиальной поломке ФЭ полученная формула реализует функцию, не равную исходной. Поломка нетривиальна, если она меняет значение на выходе соответствующего ФЭ хотя бы на одном входном наборе. Через $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, f)$ обозначим минимум величин $L^{\mathrm{dt}}(O_1^{\mathrm{c}}, S)$ по всем неизбыточным формулам S над базисом B, реализующим f. Если таких формул нет, полагаем эту величину равной нулю. *Функцией Шеннона* длины проверяющего теста называется величина $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) = \max\limits_{f \in P_2(n)} L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, f)$, где $P_2(n)$ — множество булевых функций от n переменных. Аналогичная величина для СФЭ обозначается через $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n)$.

В [1] фактически доказано, что в базисе $B_1 = \{x \,\&\, y,\ x \oplus y,\ 1\}$ любую булеву функцию n переменных можно смоделировать формулой с одним дополнительным аргументом, допускающей универсальный (т.е. не зависящий от булевой функции) единичный проверяющий тест длины не более $n + 4$ относительно IO_1^{c}. В [2] установлено, что $2 \leqslant L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) \leqslant 4$ для произвольного конечного полного (в P_2) базиса B. В [3, 4] доказано, в частности, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},\{xy,\, x\oplus y,\, 1,\, 0\}}(O_1^{\mathrm{c}}, n) = 3$. В работах [5, 6] установлены точные (равные трем, начиная с некоторого n) значения $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},\hat{B}}(O_1^{\mathrm{c}}, n)$ над неизбыточными полными базисами $\hat{B}$ (из элементов с не более чем двумя входами), содержащими $x \oplus y$ или $x \sim y$. В работе [7] установлены нижние оценки $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) \geq n(1 + o(1))$ для базисов $B \in \{\{x\&y,\ x \vee y,\ \bar{x}\}, \{x\&y, \bar{x}\}, \{x \vee y, \bar{x}\}, \{x\&\bar{y}, \bar{x}\}, \{x \vee \bar{y}, \bar{x}\}\}$.

Положим $B_0 = \{x \,\&\, y, x \vee y, \bar{x}\}$, $B_{0,1} = \{x \,\&\, \bar{y}, \bar{x}\}$, $B^*_{0,1} = \{x \vee \bar{y}, \bar{x}\}$, $B_2 = \{x \downarrow y\}$, $B^*_2 = \{x \,|\, y\}$. *Рангом* формулы называется число вхождений переменных в эту формулу. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любого базиса B, $B \in \{B_0, B_{0,1}, B^*_{0,1}\}$, при $n \to \infty$ для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет место следующая асимптотическая верхняя оценка:*

$$L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, f) \leqslant 32 \cdot \frac{2^n}{n} \cdot (1 + o(1)).$$

Теорема 2. *Над базисами B_2 и B^*_2 не существует неизбыточных формул, реализующих константы 0 и 1. Для любого натурального $n \geqslant 2$*

над базисом B_2 не существует неизбыточной формулы от переменных $x_1, \ldots, x_n$, реализующей элементарную дизъюнкцию $x_1^{\sigma_1} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n}$, а над базисом B_2^* не существует неизбыточной формулы от переменных $x_1, \ldots, x_n$, реализующей элементарную конъюнкцию $x_1^{\sigma_1} \,\&\, \cdots \,\&\, x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 3. *Для любого базиса B из множества $\{B_2, B_2^*\}$ при $n \geqslant 25$ имеет место следующая нижняя оценка:*

$$L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) \geqslant \lfloor \log_2 n - \log_2 6 \rfloor .$$

Теорема 4. *Для любой неизбыточной формулы S над базисом B_2 или B_2^*, имеющей ранг p, длина минимального единичного проверяющего теста относительно константных неисправностей на выходах элементов формулы S не превосходит p.*

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова.

Список литературы

[1] S. M. Reddy, “Easily testable realization for logic functions”, *IEEE Trans. Comput.*, **C-21**:11 (1972), 1183–1188. DOI: 10.1109/T-C.1972.223475.

[2] Д. С. Романов, “Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины”, *Дискр. матем.*, **26**:2 (2014), 100–130. DOI: 10.4213/dm1283.

[3] К. А. Попков, “Короткие единичные тесты для схем в базисе Жегалкина при произвольных константных неисправностях элементов”, *Матем. заметки*, **117**:5 (2025), 736–749. DOI: 10.4213/mzm14492.

[4] Ю. В. Бородина, К. А. Попков, “Легкотестируемые схемы в базисе Жегалкина при произвольных константных неисправностях на выходах элементов”, *Матем. заметки*, **119**:3 (2026), 352–359. DOI: 10.4213/mzm14729.

[5] Чжэнюй Цуй, Д. С. Романов, “О единичных проверяющих тестах при константных неисправностях на выходах элементов для формул над одним базисом жегалкинского типа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **89**:6 (2025), 206–218. DOI: 10.4213/im9667.

[6] Чжэнюй Цуй, Д. С. Романов, “О единичных проверяющих тестах при константных неисправностях на выходах элементов в формулах над некоторыми базисами”, *Математические труды*, **29**:1 (2026), 119–141. DOI: 10.25205/1560-750x-2026-29-1-119-141.

[7] Ч. Цуй, Д. С. Романов, “О растущей нижней оценке функции Шеннона длины единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в формулах над базисами, близкими к стандартному”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **29**:2 (2025), 162–172.

Статья поступила 23 октября 2026 г.

On single fault detection tests for formulas over certain bases with respect to stuck-at faults at gate outputs

Zh. Cui, D. S. Romanov

The cardinality of a single fault detection test set with respect to stuck-at faults at gate outputs is studied for Boolean formulas. An asymptotic upper bound for the corresponding Shannon function is established for three bases close to the standard one. For the "Peirce arrow" and "Sheffer stroke" bases, a growing lower bound for this function is obtained, as well as an upper bound (expressed in terms of the formula's rank) on minimal test set cardinality. Not every Boolean function admits an irredundant formula over the latter two bases.

Keywords: fault detection test set, stuck-at faults, Boolean formula.

References

[1] S. M. Reddy, "Easily testable realization for logic functions", *IEEE Trans. Comput.*, **C-21**:11 (1972), 1183–1188. DOI: 10.1109/T-C.1972.223475.

[2] D. S. Romanov, "Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length", *Diskretnaya Matematika*, **26**:2 (2014), 100–130. DOI: 10.4213/dm1283 (in Russian).

[3] K. A. Popkov, "Short single-fault tests for circuits in the Zhegalkin basis with arbitrary stuck-at faults of gates", *Math Notes*, **117**:5–6 (2025), 826–836.

[4] Y. V. Borodina, K. A. Popkov, "Easy-to-test circuits in the Zhegalkin basis with arbitrary stuck-at faults of gate outputs", *Math Notes*, **119**:3–4 (2026), 416–421. DOI: 10.1134/s0001434626601905.

[5] Zhenyu Cui, D. S. Romanov, "Single fault detection test sets with respect to stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over one basis of Zhegalkin type", *Izv. Math.*, **89**:6 (2025), 1281–1291. DOI: 10.4213/im9667e.

[6] Zhenyu Cui, D. S. Romanov, "Single fault detection test sets with respect to stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over some bases", *Matematicheskie Trudy*, **29**:1 (2026), 119–141 (in Russian. DOI: 10.25205/1560-750x-2026-29-1-119-141).

[7] Zhenyu Cui, D. S. Romanov, "The growing lower bound for the Shannon function of the detection test set cardinality with respect to single stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over bases close to the standard one", *Intellektual'nyye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya*, **29**:2 (2025), 162–172 (in Russian).

Received on October 23, 2026

Математическая модель боя с применением расходуемых FPV-дронов

Д. М. Шлапаков*

Предлагается модификация квадратичного закона Осипова–Ланчестера для двух группировок, включающих пехоту и расходуемые FPV-дроны. Расход дронов описывается отдельным уравнением, что замыкает модель. Получено общее интегральное уравнение состояния с произвольным профилем применения дронов. Для предварительного массированного удара и пропорциональной огневой поддержки выведены аналитические условия победы.

Ключевые слова: уравнения Осипова–Ланчестера, математическое моделирование боя, FPV-дроны, беспилотные летательные аппараты, дифференциальные уравнения.

1. Постановка задачи

Классический квадратичный закон Осипова–Ланчестера описывает прицельный огонь двух группировок и предполагает постоянное и непрерывное поражение боевых единиц противника. Для FPV-дронов-камикадзе это предположение нарушается: успешная атака сопровождается расходом самого дрона. Цель работы – модифицировать квадратичный закон для боя двух гетерогенных группировок, включающих пехоту и расходуемые FPV-дроны.

Для однородных группировок $A(t)$ и $B(t)$ классическая модель Осипова–Ланчестера и вытекающее из неё уравнение состояния имеют вид

$$\frac{dA}{dt} = -\beta B(t), \quad \frac{dB}{dt} = -\alpha A(t) \implies \alpha(A_0^2 - A^2) = \beta(B_0^2 - B^2), \quad (1)$$

где α и β – темпы уничтожения противника одной боевой единицей в единицу времени для группировок $A(t)$ и $B(t)$ соответственно. В работе используются классические модели Осипова и Ланчестера и исследования переменных коэффициентов моделей Ланчестера [1, 2, 4]; общие вопросы дифференциальных моделей боя рассматриваются в [3, 5].

* *Шлапаков Данила Михайлович* — студент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: `danila.shlapakov@math.msu.ru`.

Shlapakov Danila Mikhailovich — Student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Модифицированная модель

Пусть $I_1(t), I_2(t)$ – численность пехоты, $D_1(t), D_2(t)$ – число FPV-дронов, а $u_1(t), u_2(t) \geq 0$ – доли запаса дронов, расходуемые в единицу времени. Коэффициенты α_{II}, β_{II} характеризуют эффективность пехоты в поражении пехоты противника. Параметры k_1, k_2 задают математическое ожидание числа поражённых военнослужащих одним дроном с учётом попадания, осечки и перехвата. Дроны применяются только против пехоты противника; взаимодействие "дрон–дрон" не моделируется, а потери дронов от средств противодействия учтены в k_1, k_2, поэтому запас убывает лишь вследствие применения:

$$\frac{dD_1}{dt} = -u_1(t)D_1(t), \qquad \frac{dD_2}{dt} = -u_2(t)D_2(t). \tag{2}$$

Отсюда $\int_0^t u_i D_i \, d\tau = D_i(0) - D_i(t) \leq D_i(0)$: дроны i-й стороны поражают в среднем не более $k_i D_i(0)$ военнослужащих. Динамика пехоты описывается системой

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt} = -\beta_{II} I_2(t) - k_2 u_2(t) D_2(t), \\ \dfrac{dI_2}{dt} = -\alpha_{II} I_1(t) - k_1 u_1(t) D_1(t), \end{cases} \tag{3}$$

которая вместе с (2) при заданных $u_i(t)$ определяет $I_i(t)$ и $D_i(t)$ по начальным значениям. Умножая уравнения (3) на $\alpha_{II} I_1(t)$ и $\beta_{II} I_2(t)$ соответственно, вычитая и интегрируя от 0 до t_k (t_k – момент окончания боя, т.е. обращения в нуль численности пехоты одной из сторон), получаем общее уравнение состояния

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_{II}}{2}[I_1^2(t_k) - I_1^2(0)] - \frac{\beta_{II}}{2}[I_2^2(t_k) - I_2^2(0)] \\ &= \int_0^{t_k} [\beta_{II} I_2(\tau) k_1 u_1(\tau) D_1(\tau) - \alpha_{II} I_1(\tau) k_2 u_2(\tau) D_2(\tau)] d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Аналитические условия для двух тактик

Массированный удар. Пусть все дроны применяются до начала стрелкового контакта: $D_i(t) = 0$ при $t > 0$, и правая часть (4) на фазе стрелкового боя равна нулю. Дроны не могут поразить больше военнослужащих, чем имеется в наличии, поэтому эффективные численности равны $I_1^{\text{eff}} = \max\{0, I_1(0) - k_2 D_2(0)\}$ и $I_2^{\text{eff}} = \max\{0, I_2(0) - k_1 D_1(0)\}$. Из (1) условие полной победы первой стороны принимает вид

$$\alpha_{II} \big(I_1^{\text{eff}}\big)^2 > \beta_{II} \big(I_2^{\text{eff}}\big)^2. \tag{5}$$

При $k_2 D_2(0) \le I_1(0)$ и $k_1 D_1(0) \le I_2(0)$ максимумы можно опустить. Если же $k_2 D_2(0) > I_1(0)$, то $I_1^{\text{eff}} = 0$, пехота первой стороны уничтожена до контакта, и условие (5) не выполняется (побеждает вторая сторона либо обе теряют пехоту).

Пропорциональная поддержка. Пусть $k_1 u_1(t) D_1(t) = \gamma_1 I_1(t)$, $k_2 u_2(t) D_2(t) = \gamma_2 I_2(t)$, $\gamma_i \ge 0$. Из (2) следует $D_i(t) = D_i(0) - \frac{\gamma_i}{k_i} \int_0^t I_i \, d\tau$, поэтому дальнейшие соотношения справедливы, лишь пока запас не исчерпан:

$$\gamma_i \int_0^{t_k} I_i(\tau) \, d\tau \le k_i D_i(0), \qquad i = 1, 2. \tag{6}$$

При выполнении (6) система (3) сводится к

$$\frac{dI_1}{dt} = -(\beta_{II} + \gamma_2) I_2(t), \qquad \frac{dI_2}{dt} = -(\alpha_{II} + \gamma_1) I_1(t), \tag{7}$$

и условие победы первой стороны имеет вид

$$(\alpha_{II} + \gamma_1) I_1^2(0) > (\beta_{II} + \gamma_2) I_2^2(0). \tag{8}$$

Заключение. Уравнение расхода (2) замыкает модель и ограничивает эффект дронов начальным запасом $D_i(0)$. При одном и том же запасе исход боя зависит от профиля $u_i(t)$: при массированном ударе дроны изменяют начальные численности в квадратичном законе, а при распределённом применении их вклад проявляется как добавка к коэффициентам эффективности. Модель может быть расширена введением стохастических факторов и влияния рельефа местности.

Список литературы

[1] М. П. Осипов, “Влияние численности сражающихся сторон на их потери”, *Военный сборник*, 1915, № 9, 25–37.

[2] F. W. Lanchester, *Aircraft in Warfare, the Dawn of the Fourth Arm*, Constable and Company Limited, London, 1916, 222 pp.

[3] A. Washburn, *Lanchester Systems*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2000, 24 pp.

[4] G. Taylor, *A Mathematical Theory for Variable Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1974, 39 pp.

[5] G. Isac, A. Gosselin, *Viability Theory and Differential Lanchester Type Models for Combat Differential Systems*, Department of Mathematics, Royal Military College of Canada, Kingston, Ontario, Canada, 2004, 33 pp.

Статья поступила 29 сентября 2026 г.

A Mathematical Model of Combat with Expendable FPV Drones

D. M. Shlapakov

A modification of the quadratic Osipov–Lanchester law for forces including infantry and expendable FPV drones is proposed. Drone expenditure is described by a separate equation, which closes the model. A general integral state equation with an arbitrary drone employment profile is derived. Analytical victory conditions are obtained for a preliminary massed strike and proportional fire support.

Keywords: Osipov–Lanchester equations, combat modeling, FPV drones, unmanned aerial vehicles, differential equations.

References

[1] M. P. Osipov, "Vliyanie chislennosti srazhayushchikhsya storon na ikh poteri", *Voennyi sbornik*, 1915, № 9, 25–37 (In Russian).

[2] F. W. Lanchester, *Aircraft in Warfare, the Dawn of the Fourth Arm*, Constable and Company Limited, London, 1916, 222 pp.

[3] A. Washburn, *Lanchester Systems*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 2000, 24 pp.

[4] G. Taylor, *A Mathematical Theory for Variable Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare*, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 1974, 39 pp.

[5] G. Isac, A. Gosselin, *Viability Theory and Differential Lanchester Type Models for Combat Differential Systems*, Department of Mathematics, Royal Military College of Canada, Kingston, Ontario, Canada, 2004, 33 pp.

Received on September 29, 2026

Часть 5
Квантовые вычисления, кодирование и защита информации

О построении бесформенных полиномиально полных квазигрупп

Д. А. Александров*

В. А. Артамонов, С. Чакрабарти, Ш. К. Тивари и В. Т. Марков в статье «Алгебраические свойства подквазигрупп и построение конечных квазигрупп» предложили метод построения конечных квазигрупп порядка $q = p^r > 4$, где p — простое, $r \in \mathbb{N}$, обеспечивающий полиномиальную полноту и отсутствие собственных подквазигрупп. В работе доказывается, что квазигруппы, полученные с помощью исходной конструкции, не удовлетворяют требованию бесформенности, введенному С. Марковски и Д. Глигороски с соавторами. Предлагается уточнение данной конструкции, позволяющее получать бесформенные квазигруппы, обладающие ранее установленными свойствами.

Ключевые слова: конечные квазигруппы, полиномиальная полнота, бесформенность.

1. Введение

В основе данной работы лежит статья [1], в которой был предложен метод построения конечных квазигрупп порядка $q = p^r > 4$, где p — простое, $r \in \mathbb{N}$, обеспечивающий полиномиальную полноту и отсутствие собственных подквазигрупп. Одна из таких квазигрупп была использована, например, в криптоалгоритме INRU [2]. С. Марковски и Д. Глигороски ввели (см., например, [3]) свойство бесформенности. Мы показали (см. теорему 1 ниже), что не все квазигруппы из работы [1] являются бесформенными.

Обобщение исходной конструкции позволило получить более широкий класс квазигрупп, сохраняющий основные свойства и допускающий наличие бесформенности. Приведен пример для порядка 16, который можно рассматривать как усиление квазигруппы из алгоритма INRU.

2. Основные определения

Определение 1. *Квазигруппой* называется пара $(Q, *)$, где Q — непустое множество, $* : Q \times Q \to Q$ — бинарная операция такая, что для любых

*Александров Демид Андреевич — студент МГУ им. М.В. Ломоносова, e-mail: demid.aleksandrov@math.msu.ru, ORCID: 0009-0007-0576-6039.

Aleksandrov Demid Andreevich — Student, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

$a, b \in Q$ существуют единственные решения $x, y \in Q$ уравнений $a * x = b$ и $y * a = b$.

В дальнейшем будет предполагаться, что квазигруппы конечные, то есть $|Q| = k < \infty$. Без ограничения общности $Q = E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, а квазигрупповая операция — функция k-значной логики.

Определение 2. Пусть задана квазигруппа $(E_k, *)$ и $Q' \subset E_k$, $1 \leq |Q'| < k$. Если для любых элементов $a, b \in Q'$ верно, что $a * b \in Q'$, то будем говорить, что квазигруппа $(E_k, *)$ содержит *собственную подквазигруппу* $(Q', *|_{Q'})$.

Определение 3. Квазигруппа называется *полиномиально полной*, если $\left[\{*\} \cup P_k^0\right] = P_k$, где $[F]$ — стандартным образом определенное замыкание множества функций $F \subseteq P_k$.

Определение 4. Квазигруппа $(E_k, *)$ называется *бесформенной*, если она не идемпотентна, некоммутативна, неассоциативна, не содержит ни левой, ни правой единицы, не содержит собственных подквазигрупп, и не существует $t < 2k$, при котором для всех $x, y \in E_k$ выполняются тождества $\underbrace{x * (x * \ldots * (x}_{t} * y)) = y$ или $(\underbrace{(y * x) * \ldots * x}_{t}) * x = y$.

Рассмотрим конечное поле $\mathbb{F}_k$ ($k = p^r$) с $k > 4$ элементами, и $\alpha, \beta, c \in \mathbb{F}_k^*$. Пусть $m, d \in \mathbb{N}$ — взаимно простые с $(k-1)$. Определим

$$x * y = \alpha x^m + \beta y^d + c. \tag{1}$$

В статье [1] авторы показали, что операция 1 задает структуру квазигруппы на $\mathbb{F}_k$ и получили следующий результат.

Предположим, что $m \notin \{1, p, \ldots, p^{r-1}\}$, β является порождающим для группы $\mathbb{F}_k^*$, $1 < m < k-1$ взаимно прост с $k-1$ и $d = 1$. Тогда найдется $c \in \mathbb{F}_k^*$, такой что квазигруппа с операцией (1) не имеет собственных подквазигрупп и полиномиально полна [1, Следствие 3.8].

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть p простое и $k = p^r$. Предположим, что $m \notin \{1, p, \ldots, p^{r-1}\}$, β является порождающим для циклической группы $\mathbb{F}_k^*$, а $1 < m < k-1$ взаимно прост с $(k-1)$ и $d = 1$. Тогда квазигруппа с операцией (1) при $\alpha = 1 - \beta$ неидемпотентна, некоммутативна, неассоциативна, не содержит ни левой, ни правой единицы и удовлетворяет левому тождеству бесформенности при $t = k-1$ и $t = 2k-2$. Существует c, для которого отсутствуют собственные подквазигруппы.*

Теорема 2. *Пусть p простое и $k = p^r$. Предположим, что β является порождающим для циклической группы $\mathbb{F}_k^*$, $md^{-1} \mod (k-1) \notin \{1, p, \ldots, p^{r-1}\}$, а $1 < m, d < k-1$ взаимно просты с $k-1$. Тогда найдется $c \in \mathbb{F}_k^*$ такой, что квазигруппа с умножением $x * y = (1-\beta)x^m + \beta y^d + c$ полиномиально полна и не имеет собственных подквазигрупп.*

Замечание 1. Полиномиальная полнота напрямую следует из [1, следствие 3.4]. Новизна состоит в доказательстве отсутствия подквазигрупп.

С использованием программы https://github.com/Gerror/Quasigroup Р. А. Жигляева, в ходе вычислительных экспериментов удалось найти полиномиально полную, бесформенную квазигруппу порядка 16 (см. таблицу 1), которая может послужить заменой квазигруппы из [2].

Таблица 1: Таблица Кэли для $q = 16$, $m = 13$, $d = 7$, $\beta = 13$, $c = 2$

$*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2	15	4	12	13	8	10	7	1	14	0	6	5	11	3	9
1	14	3	8	0	1	4	6	11	13	2	12	10	9	7	15	5
2	1	12	7	15	14	11	9	4	2	13	3	5	6	8	0	10
3	15	2	9	1	0	5	7	10	12	3	13	11	8	6	14	4
4	6	11	0	8	9	12	14	3	5	10	4	2	1	15	7	13
5	4	9	2	10	11	14	12	1	7	8	6	0	3	13	5	15
6	12	1	10	2	3	6	4	9	15	0	14	8	11	5	13	7
7	0	13	6	14	15	10	8	5	3	12	2	4	7	9	1	11
8	3	14	5	13	12	9	11	6	0	15	1	7	4	10	2	8
9	7	10	1	9	8	13	15	2	4	11	5	3	0	14	6	12
10	10	7	12	4	5	0	2	15	9	6	8	14	13	3	11	1
11	9	4	15	7	6	3	1	12	10	5	11	13	14	0	8	2
12	8	5	14	6	7	2	0	13	11	4	10	12	15	1	9	3
13	5	8	3	11	10	15	13	0	6	9	7	1	2	12	4	14
14	11	6	13	5	4	1	3	14	8	7	9	15	12	2	10	0
15	13	0	11	3	2	7	5	8	14	1	15	9	10	4	12	6

4. Заключение

В работе была рассмотрена и усилена конструкция, введенная в статье [1], позволяющая порождать полиномиально полные квазигруппы без собственных подквазигрупп. Для исходного метода было доказано, что такие квазигруппы не являются бесформенными. Предложено усиление, которое позволяет сохранить полиномиальную полноту и отсутствие собственных подквазигрупп, а также получить бесформенность.

Список литературы

[1] В. А. Артамонов, С. Чакрабарти, Ш. К. Тивари, В. Т. Марков, “Алгебраические свойства подквазигрупп и построение конечных квазигрупп”, *Алгебра и логика*, **61**:4 (2022), 375–400.

[2] S. K. Tiwari, A. Awasthi, S. Chakrabarti, S. Yadav, “INRU: A Quasigroup Based Lightweight Block Cipher”, arXiv: 2112.07411v1.

[3] A. Mileva, S. Markovski, “Shapeless quasigroups derived by Feistel orthomorphisms”, *Glasnik Matematicki*, **47**:2 (2012), 333–349. DOI: 10.3336/gm.47.2.09.

Статья поступила 2 ноября 2026 г.

On the construction of shapeless polynomially complete quasigroups

D. A. Aleksandrov

In their paper “Algebraic Properties of Subquasigroups and Construction of Finite Quasigroups”, V. A. Artamonov, S. Chakrabarti, S. K. Tiwari, and V. T. Markov proposed a method for constructing finite quasigroups of order $q = p^r > 4$, where p is prime and $r \in \mathbb{N}$, that are polynomially complete and have no proper subquasigroups. The paper proves that quasigroups obtained using the original construction do not satisfy the requirement of shaplesness introduced by S. Markovski and D. Gligoroski with co-authors. A refinement of this construction is proposed, which makes it possible to preserve the previously established properties and obtain shapless quasigroups.

Keywords: finite quasigroups, polynomial completeness, shapeless quasigroups.

References

[1] V. A. Artamonov, S. Chakrabarti,Sh. K. Tiwari, V. T. Markov, “Algebraic Properties of Subquasigroups and Construction of Finite Quasigroups”, *Algebra and Logic*, **61**:4 (2022), 251–270. DOI: 10.1007/s10469-023-09695-1.

[2] S. K. Tiwari, A. Awasthi, S. Chakrabarti, S. Yadav, “INRU: A Quasigroup Based Lightweight Block Cipher”, arXiv: 2112.07411v1.

[3] A. Mileva, S. Markovski, “Shapeless quasigroups derived by Feistel orthomorphisms”, *Glasnik Matematicki*, **47**:2 (2012), 333–349. DOI: 10.3336/gm.47.2.09.

Received on November 2, 2026

Сравнение способов умножения в схемах Kyber + Lizard и NewHope + Lizard

К. А. Арканников*, Б. Г. Мубараков‡

Сравниваются три способа умножения полиномов в Kyber и NewHope отдельно и в схемах с неизменным Lizard. Приведены результаты и доверительные интервалы.

Ключевые слова: Kyber, NewHope, Lizard, Карацуба, NTT.

1. Введение и постановка задачи

Kyber и NewHope устанавливают общий ключ через открытый канал [1,2]. Lizard шифрует открытым ключом, расшифровывает секретным [3].

Цель работы — оценить ускорение Kyber и NewHope при замене обычного умножения полиномов алгоритмом Карацубы или теоретико-числовым преобразованием (NTT). Меняется только умножение; при одинаковых входах, параметрах и случайных последовательностях ключи и шифртексты сохраняются.

Lizard задаёт общую неизменную нагрузку стенда. Эффект модификаций выделяется отдельными замерами умножения; время составной схемы включает оба компонента.

Схема взаимодействия. Ключевые пары независимы. Отправитель получает s_P через Kyber/NewHope и передаёт 32-байтовый z через Lizard. Итоговый ключ объединяет s_P и полученный из z вклад s_L.

Для воспроизводимости зададим порядок байтов и метки объединения. $F(v) = \mathrm{LE}_8(|v|)\|v$ добавляет длину строки: восемь байтов, младший первым; $\|$ соединяет строки. Пусть $H = \text{SHA3-256}$, $X(v) = \text{SHAKE-256}(v, 32)$, c_P — шифртекст Kyber/NewHope, $|s_P| = 32$. Тогда

$$\begin{aligned} s_L &= X(D_L\|z), \qquad K = X(T),\\ T &= F(D)\|F(I)\|F(s_P)\|F(s_L)\\ &\quad \|F(H(c_P))\|F(H(E_L))\|F(C). \end{aligned}$$

Арканников Кирилл Артурович — магистрант каф. САИТ, ИВМиИТ КФУ, e-mail: kaarkannikov@kpfu.ru.

Arkannikov Kirill Arturovich — master's student, Department of System Analysis and Information Technologies, Kazan Federal University.

‡*Мубараков Булат Газинурович* — канд. техн. наук, доцент каф. САИТ, ИВМиИТ КФУ, e-mail: mubbulat@mail.ru, ORCID: 0000-0002-7628-9870.

Mubarakov Bulat Gazinurovich — docent, Kazan Federal University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

В ASCII заданы D =`KYBER-NEWHOPE-LIZARD-HYBRID-v1`, D_L =`LIZARD-HYBRID-CONTRIBUTION-v1` и фиксированная метка эксперимента C =`master-thesis-hybrid-pair-benchmark-v1`. Название I состоит из `Kyber`/`NewHope`, суффикса `-Karatsuba`, `-NTT` либо пустой строки и `+Lizard`. Совпадение K проверяется у сторон внутри каждого варианта.

Шифртекст Lizard кодируется как $E_L = D_c \| F(c_1) \| F(V_p(u)) \| F(V_p(v)) \| F(V_t(w))$, где D_c =`LIZARD-CCA-CIPHERTEXT-v1`. Функция V_a записывает коэффициенты по порядку, по модулю a, по $\lceil \log_2(a)/8 \rceil$ байтов, младший первым. Длина c_1 — 32 байта, u, v, w — по 256 коэффициентов. Получатель восстанавливает s_P, z и повторяет вычисления.

2. Параметры и модификации

В Kyber $n = 256, q = 3329, k = 4$, в NewHope $n = 1024, q = 12289$: n — число коэффициентов, q — модуль, k — длина вектора Kyber. Произведения сокращаются по $x^n + 1$ и q. Алгоритм Карацубы разбивает каждый полином на две половины: вместо четырёх произведений половин достаточно трёх [4]; подполиномы, содержащие не более 32 коэффициентов, умножаются обычным способом.

В NTT [1,2] при $n = Md$, $a(x) = \sum_{r=0}^{d-1} x^r a_r(x^d)$ вычисляются значения a_r в точках $\beta_j = \psi^{2j+1}$, $0 \le j < M$, с порядком ψ, равным $2M$. Блоки перемножаются по модулю $x^d - \beta_j$, затем выполняется обратное NTT. В Kyber неполное NTT даёт для каждого полинома 128 пар коэффициентов остатков $a_{j,0} + a_{j,1}x$, в NewHope — 1024 скаляра. При $n = 1024, q = 3329$ блоков 128 по 8 коэффициентов, порядок $\psi = 3061$ равен 256, не 2048.

В Lizard $(m, n, q, p, t, \ell) = (768, 256, 3329, 1024, 2, 256)$, $\sigma = 3329/(182\sqrt{2\pi})$. Открытый ключ — матрицы $m \times n$ и $m \times \ell$ по модулю q, секретный — $n \times \ell$: $P(0) = 1/2$, $P(1) = P(-1) = 1/4$. Элементы A равномерны по модулю q. Параметр t задаёт алфавит $\{0, \ldots, t-1\}$; при $t = 2$ сообщение — $\ell = 256$ равномерных битов. Для ошибок $P(E = x) \propto e^{-\pi x^2/\sigma^2}$ на $[-44, 44]$. Суммы $F_E(x) = P(E \le x)$ вычисляются с плавающей точкой. Для случайного 64-битного целого R двоичный поиск выбирает минимальное x с $F_E(x) \ge R/2^{64}$. Обёртка выводит из SHAKE-256 вектор со 128 ненулевыми знаками и проверяет повторное шифрование и контрольный вектор [3].

Ключи Lizard — списки Python без упаковки. Оценки размеров при 12 и 2 битах на коэффициент: $2mn \cdot 12/8 = 589824$ и $n\ell \cdot 2/8 = 16384$ байта; это не расход памяти. Модули фиксированы, тесты простоты [5] не измеряются.

3. Измерения и результаты

Эксперимент 18.10.2026: Ryzen 7 7800X3D, Windows 11 (26200), CPython 3.13.0; три прогрева, 30 пар замеров в случайном порядке, 10000 повторных выборок (seed=123456). Генераторы воспроизводимы; сборщик мусора отключён. Ключи и таблицы NTT подготовлены вне замеров; пять групп тестов пройдены.

В таблице Ф/В — формирование/восстановление ключа, t_K, t_N — медианы времени. Интервал оценивает медиану $E_i = 100(1 - t_{K,i}/t_{N,i})$: при $E_i > 0$ быстрее Kyber-пара, при $E_i < 0$ — NewHope-пара.

Метод		t_K, мс	t_N, мс	95% интервал E, %
Обычный	Ф	113,804	272,078	[57,1; 59,3]
Обычный	В	125,007	381,177	[66,8; 67,7]
Карацуба	Ф	46,112	45,325	[−2,7; −0,9]
Карацуба	В	57,229	69,454	[17,1; 17,9]
NTT	Ф	19,601	13,446	[−48,2; −44,9]
NTT	В	27,122	22,226	[−24,1; −20,3]

При обычном умножении быстрее Kyber-пара, при NTT — NewHope-пара. Знаковый тест без поправки на множественные сравнения даёт $p = 0{,}0003249$ для Карацубы/Ф и $p = 1{,}863 \cdot 10^{-9}$ иначе.

При $q = 3329$, $n = 256, 1024$ умножение ускорилось в 2,52–6,33 раза с Карацубой и в 7,95–33,97 с NTT (медианы парных отношений), включая эффект изменения частоты приведения по модулю.

Выводы и перспективы. В эксперименте обе модификации ускорили умножение. Далее сравним инкапсуляцию и декапсуляцию до и после модификации. Замеры на данном коде и компьютере не доказывают безопасность модификаций и объединения ключей, равную стойкость или соответствие FIPS 203.

Список литературы

[1] NIST, *Module-Lattice-Based Key-Encapsulation Mechanism Standard. FIPS 203*, 2024. DOI: 10.6028/NIST.FIPS.203.

[2] E. Alkim et al., *NewHope: Algorithm Specifications and Supporting Documentation. Version 1.1*, 2020, https://newhopecrypto.org/data/NewHope_2020_04_10.pdf.

[3] J. H. Cheon, D. Kim, J. Lee, Y. Song, *Lizard: Cut off the Tail! Practical Post-Quantum Public-Key Encryption from LWE and LWR*, Cryptology ePrint Archive, 2016/1126, 2016, https://eprint.iacr.org/2016/1126.

[4] А. Карацуба, Ю. Офман, “Умножение многозначных чисел на автоматах”, *Докл. АН СССР*, **145**:2 (1962), 293–294.

[5] Ш. Т. Ишмухаметов, Н. А. Антонов, Б. Г. Мубараков, Р. Г. Рубцова, “Об одном комбинированном тесте простоты”, *Изв. вузов. Матем.*, 2022, № 12, 123–129. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-12-123-129 .

Статья поступила 9 октября 2026 г.

Comparing Multiplication Methods in Kyber + Lizard and NewHope + Lizard Schemes

K. A. Arkannikov, B. G. Mubarakov

Three polynomial multiplication methods in Kyber and NewHope are compared separately and in schemes with unchanged Lizard. Results and confidence intervals are reported.

Keywords: Kyber, NewHope, Lizard, Karatsuba, NTT.

References

[1] NIST, *Module-Lattice-Based Key-Encapsulation Mechanism Standard. FIPS 203*, 2024. DOI: 10.6028/NIST.FIPS.203.

[2] E. Alkim et al., *NewHope: Algorithm Specifications and Supporting Documentation. Version 1.1*, 2020, https://newhopecrypto.org/data/NewHope_2020_04_10.pdf.

[3] J. H. Cheon, D. Kim, J. Lee, Y. Song, *Lizard: Cut off the Tail! Practical Post-Quantum Public-Key Encryption from LWE and LWR*, Cryptology ePrint Archive, 2016/1126, 2016, https://eprint.iacr.org/2016/1126.

[4] A. Karatsuba, Yu. Ofman, “Multiplication of many-digital numbers by automatic computers”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **145**:2 (1962), 293–294 (In Russian).

[5] Sh. T. Ishmukhametov, N. A. Antonov, B. G. Mubarakov, R. G. Rubtsova, “On a Combined Primality Test”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2022, № 12, 123–129. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-12-123-129 (In Russian).

Received on October 9, 2026

Подквазигруппы случайных m-арных квазигрупп

Л. В. Гайваль*

Для равномерно случайной помеченной m-арной квазигруппы порядка n при фиксированном $m \geq 2$ доказаны пуассоновский предел Pois(1) числа всех собственных подквазигрупп и оценка $O(n^{-1})$ вероятности существования собственной подквазигруппы размера не менее двух. Доля квазигрупп без собственных подквазигрупп стремится к e^{-1} при $n \to \infty$.

Ключевые слова: m-квазигруппа, подквазигруппа, латинский квадрат, распределение Пуассона.

1. Введение

В последние годы существует интерес к свойствам квазигрупп и латинских квадратов. Вопросы поиска подквазигрупп рассматривались, в частности, в [1], а в [2] изучена задача о латинских подквадратах случайных латинских квадратов. В настоящей работе исследуется асимптотика числа собственных подквазигрупп в равномерно случайной помеченной m-арной квазигруппе при росте её порядка.

Пусть $m, n \geq 2$ — целые числа, $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Помеченная m-арная квазигруппа задаётся операцией $F : [n]^m \to [n]$, если уравнение $F(x_1, \ldots, x_m) = y$ однозначно разрешимо по каждой переменной при заданных остальных. Непустое $S \subseteq [n]$ называется собственной *подквазигруппой*, если $F(S^m) \subseteq S$ и $S \neq [n]$.

Выбираем F равномерно среди всех помеченных m-арных квазигрупп на $[n]$. Через X_k обозначим число собственных подквазигрупп размера k.

2. Подквазигруппы размера не менее двух

Для фиксированного $a \in [n]$ срез $L_a(x, y) = F(x, y, a, \ldots, a)$ является латинским квадратом (при $m = 2$ полагаем $L_a = F$). Его распределение инвариантно относительно независимых перестановок строк и столбцов,

* *Гайваль Леонид Валерьевич* — студент магистратуры кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, e-mail: leonid.gaival@math.msu.ru, ORCID: 0009-0003-6664-8993.

Gaival Leonid Valerievich — Master's student, Department of Probability Theory, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

так как перестановки меток первых двух аргументов биективно преобразуют множество операций и сохраняют равномерное распределение. Если S — подквазигруппа и $a \in S$, то $L_a(S, S) \subseteq S$.

Лемма 1. *Размер k собственной подквазигруппы квазигруппы порядка n удовлетворяет $k \le n/2$.*

Доказательство. Пусть S — собственная подквазигруппа размера k, $a \in S$. Тогда S является собственной подквазигруппой бинарной квазигруппы L_a порядка n. По [3, теорема 1], $k \le n/2$. □

Лемма 2. *Пусть распределение латинского квадрата L инвариантно относительно независимых перестановок строк и столбцов. Для фиксированных $A, R, C \subseteq [n]$ размера $k \ge 1$*

$$\mathbb{P}\big(L(R,C) \subseteq A\big) \le \frac{n}{k\binom{n}{k}^2}.$$

Доказательство. В двудольном графе $G_A(L)$ вершины соответствуют строкам и столбцам, а ребро (r, c) присутствует при $L(r, c) \in A$. Граф k-регулярен. Поэтому условие $L(R, C) \subseteq A$ равносильно тому, что R, C образуют компоненту $K_{k,k}$: все степени этих вершин исчерпываются внутренними рёбрами. Число таких компонент $Z_A(L)$ не превосходит n/k. По инвариантности вероятность одинакова для всех пар (R, C), по линейности математического ожидания получаем

$$\binom{n}{k}^2 \mathbb{P}\big(L(R,C) \subseteq A\big) = \mathbb{E}Z_A(L) \le n/k. \qquad \square$$

Теорема 1. *При $n \to \infty$*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k\right] = O(n^{-1}), \qquad \mathbb{P}\left(\sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k > 0\right) = O(n^{-1}).$$

Доказательство. Зафиксируем S размера k и $a \in S$. Замкнутость S влечёт $L_a(S, S) \subseteq S$. По лемме 2 вероятность этого события не превосходит $n/(k\binom{n}{k}^2)$. Суммирование по S даёт $\mathbb{E}X_k \le n/(k\binom{n}{k}) = 1/\binom{n-1}{k-1}$. При $n \ge 6$, поскольку $\binom{n-1}{k-1} \ge \binom{n-1}{2}$ для $3 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor$, имеем

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{\lfloor n/2 \rfloor} X_k\right] \le \frac{1}{n-1} + \frac{\lfloor n/2 \rfloor - 2}{\binom{n-1}{2}} \le \frac{2}{n-1}.$$

Оценка вероятности следует из неравенства Маркова. □

3. Одноэлементные подквазигруппы

Положим $Y_i = F(i,\dots,i)$, тогда $X_1 = \#\{i : Y_i = i\}$. Обозначим $(x)_r = x(x-1)\cdots(x-r+1)$, $(x)_0 = 1$.

Лемма 3. *Для фиксированного $r \geq 1$ и различных $i_1,\dots,i_r \in [n]$ при $n \to \infty$ имеем $\mathbb{P}(Y_{i_j} = i_j,\ j = 1,\dots,r) = (1+o(1))n^{-r}$.*

Доказательство. Пусть $i \neq j$ и π — равномерная случайная перестановка, независимая от F. Перестановка меток первого аргумента сохраняет распределение F, поэтому

$$\mathbb{P}(Y_i = Y_j) = \mathbb{P}\big(F(\pi(i),i,\dots,i) = F(\pi(j),j,\dots,j)\big).$$

Зафиксируем F и $\pi(i) = b$. Тогда $\pi(j)$ равномерно распределено на $[n]\setminus\{b\}$, а уравнение $F(c,j,\dots,j) = F(b,i,\dots,i)$ имеет единственное решение c. Условная вероятность совпадения не превосходит $1/(n-1)$. Усредняя по F и b, получаем $\mathbb{P}(Y_i = Y_j) \leq 1/(n-1)$.

Пусть D — событие попарной различности $Y_{i_1},\dots,Y_{i_r}$. По неравенству объединения $1 - \binom{r}{2}/(n-1) \leq \mathbb{P}(D) \leq 1$. Перестановки выходных значений сохраняют распределение F и событие D, поэтому все $(n)_r$ упорядоченных наборов различных значений равновероятны. В частности, при фиксированном r,

$$\mathbb{P}(Y_{i_1} = i_1,\dots,Y_{i_r} = i_r) = \frac{\mathbb{P}(D)}{(n)_r} = \frac{1+O_r(n^{-1})}{n^r} = \frac{1+o(1)}{n^r}. \qquad (1)$$

□

Теорема 2. *При $n \to \infty$ имеем $X_1 \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$.*

Доказательство. Суммируя (1) по упорядоченным наборам различных индексов, для $1 \leq r \leq n$ получаем

$$0 \leq \mathbb{E}(X_1)_r \leq 1, \qquad \mathbb{E}(X_1)_r \geq 1 - \frac{\binom{r}{2}}{n-1}. \qquad (2)$$

При каждом фиксированном r имеем $\mathbb{E}(X_1)_r \to 1$. Метод факториальных моментов [4] даёт $X_1 \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$. □

Следствие 1. *Пусть $N_n = \sum_{k=1}^{n-1} X_k$ — число всех собственных подквазигрупп. Для любого фиксированного $m \geq 2$ при $n \to \infty$ имеем $N_n \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$. В частности, доля помеченных m-арных квазигрупп порядка n без собственных подквазигрупп стремится к e^{-1}.*

Доказательство. По лемме 1 и теореме 1, $\mathbb{P}(N_n \neq X_1) = O(n^{-1})$. Следовательно, по теореме 2, $N_n \xrightarrow{d} \mathrm{Pois}(1)$, откуда $\mathbb{P}(N_n = 0) \to e^{-1}$. □

Список литературы

[1] А. В. Галатенко, А. Е. Панкратьев, В. М. Староверов, "Об одном алгоритме проверки существования подквазигрупп", *Чебышевский сб.*, **22**:2 (2021), 76–89. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-76-89.

[2] J. Allsop, I. M. Wanless, "Subsquares in Random Latin Rectangles", *Combinatorica*, **45** (2025), 29. DOI: 10.1007/s00493-025-00156-0.

[3] D. W. Wall, "Sub-quasigroups of finite quasigroups", *Pacific J. Math.*, **7**:4 (1957), 1711–1714. DOI: 10.2140/pjm.1957.7.1711.

[4] A. Frieze, M. Karoński, *Introduction to Random Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. DOI: 10.1017/CBO9781316339831 .

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Subquasigroups of random m-ary quasigroups

L. V. Gaival

For fixed $m \geq 2$, we prove that in a uniformly random labelled m-ary quasigroup of order n, the total number of proper subquasigroups converges in distribution to Pois(1) as $n \to \infty$. The probability of the existence of a proper subquasigroup of order at least two is $O(n^{-1})$, and the probability of having no proper subquasigroups tends to e^{-1}.

Keywords: m-quasigroup, subquasigroup, Latin square, Poisson distribution.

References

[1] A. V. Galatenko, A. E. Pankratiev, V. M. Staroverov, "An algorithm for checking the existence of subquasigroups", *Chebyshevskii Sbornik*, **22**:2 (2021), 76–89. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-2-76-89 (In Russian).

[2] J. Allsop, I. M. Wanless, "Subsquares in Random Latin Rectangles", *Combinatorica*, **45** (2025), 29. DOI: 10.1007/s00493-025-00156-0.

[3] D. W. Wall, "Sub-quasigroups of finite quasigroups", *Pacific J. Math.*, **7**:4 (1957), 1711–1714. DOI: 10.2140/pjm.1957.7.1711.

[4] A. Frieze, M. Karoński, *Introduction to Random Graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015. DOI: 10.1017/CBO9781316339831.

Received on November 9, 2026

О криптосистеме Шора-Ривеста в поле с оптимальным нормальным базисом второго типа

С. Б. Гашков*, А. А. Сесюкалов‡, А. Б. Фролов§

Рассматривается модификация криптосистемы Шора—Ривеста, отличающаяся тем, что вычисления в случайном степенном базисе имитируются в оптимальном нормальном базисе второго типа с ускорением при использовании быстрых операции умножения и возведения в степень.

Ключевые слова: криптосистема Шора-Ривеста, оптимальный нормальный базис второго типа, быстрое умножение.

Целью работы является обоснование возможности ускорения вычислений в криптосистеме Б. Шора и Р.Л. Ривеста [1] при ее реализации в поле $GF(p^n)$, имеющем оптимальный нормальный базис второго типа (ОНБ 2) и гладкую мультипликативную группу при простых p и n.

Предлагается следующая модификация указанной криптосистемы в таком поле.

1. Выбрать случайный элемент $t', t' \notin GF(p)$, поля $GF(p^n)$ и вычислить в ОНБ 2 его минимальный многочлен $f'(X) = \Pi_{i=0}^{n-1}(X - t'^{p^i})$. Вычислить $n \times n$ матрицу A перехода из ССБ в ОНБ 2. Ее строки— элементы $1, t', t'^2, \ldots, t'^{n-1}$ в ОНБ 2. Для обратного перехода вычислить матрицу $B = A^{-1}$.
2. Выбрать случайно генератор g' поля $GF(p^n)$ в ОНБ 2 .
3. Вычислить набор a дискретных логарифмов $a_j = \log_{g'}(t' + j), j =$

Гашков Сергей Борисович — проф. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ имени Ломоносова (Москва), e-mail: sbgashkov@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3406-0063.

Gashkov Sergey Borisovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Discrete Mathematics.

‡ *Сесюкалов Александр Алексеевич* — студент магистратуры НИУ МЭИ (Москва), e-mail: sesiukalovaa@mpei.ru, ORCID: 0009-0002-9770-3505.

Sesiukalov Aleksandr Alekseevich — Master's student of NRU MPEI.

§ *Фролов Александр Борисович* — проф. каф. математического и компьютерного моделирования НИУ МЭИ (Москва), e-mail: frolovab@mpei.ru, ORCID: 0000-0002-2022-4533.

Frolov Aleksandr Borisovich — Doctor of Technical Sciences, professor, NRU MPEI, Institute of Information Technologies and Computer Science, Chair of Mathematical and Computer Modeling.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

$0, \ldots, p-1$.
4. Случайной перестановкой π элементов набора a получить набор b.
5. Прибавлением к элементам набора b единого случайного числа d получить «зашумленный» набор c.
6. Объявить открытый ключ c, p, n.
7. Сохранить секретный ключ $t'\, g,' \pi, d$.
8. Открытый текст: бинарная строка $x = (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{p-1})$ длины p и веса n.
9. Зашифрование: $s = \sum_{i=0}^{p-1} x_i c_i \mod (p^n - 1)$.
10. Расшифрование :
— вычислить $s' = s - nd \mod (p^n - 1)$,
— вычислить $q'(t) = g'^{s'}$,
— умножением на матрицу B получить $q(t) = q'(t)B$,
— получить $f(X)$ как представление $f'(X)$ в ССБ и вычислить многочлен $F(X) = X^n + (r(X) + q(X))$, где $r(X) = f(X) - X^n$,
— найти, например, по схеме Горнера, все его корни,
— перестановкой π^{-1} корней многочлена $F(X)$ получить номера позиций единичных элементов в открытом тексте.

В оригнальном варианте криптосистемы п.1 соответствует выбор корня t и случайного многочлена $f(t)$ в ССБ. П.п. 2—10 соответсвуют такие же действия, но выполняемяе в ССБ (с заменой обозначений t', g', q') обозначениями t, g, q.

Это позволяет по умолчанию выбрать примитивный элемент g в ССБ путем генерации примитивного элемента g' поля в ОНБ 2 как образа $g = g'B$ элемента g' и далее вычисления в ССБ этого поля воспроизводить (имитировать) в ОНБ 2 с возвращением полученного результата в ССБ. Ускорение достигается за счет применения операции умножения в ОНБ 2, более быстрой по сравнению с умножением ССБ (см. таблицу 1), и «бесплатного» возведения в степень p^d, $d \geq 1$.

По таблице 2 можно судить о существенном превосходстве имплементации в поле $GF(10333^{11})$ с использованием ОНБ 2 по сравнению с имплементацией непосредственно в ССБ как по числу операций, так и по времени исполнения. Поле $GF(10333^{11})$ имеет ОНБ 2 и указано в [2] как поле, удовлетворяющее известным пяти условиям безопасности.

Числа операций получены непосредственным подсчетом. Для измерения времени используются функции стандартной библиотеки $C++$ или библиотека time в Python.

Таблица 1: Числа операций в Z_{10333} при умножении в $GF(10333^{11})$, Python, PU@3.00GHz

Базис	Время	умножений	сложений	всего
ОНБ 2	0.247 мс.	66	266	332
ССБ	1.044 мс.	225	235	460

Таблица 2: Вычислительные затраты на этапы логарифмирования (Л), получения ключей, зашифрования (З) и расшифрования (Р) в поле $GF(10333^{11})$, C++, NVIDIA GeForce RTX 4060 Laptop GPU

	Базис	время,	умножений	всего
Л	ОНБ 2	190.9 с.	967774374820	4868197567777
З		0,28мкс.	10344	20688
Р		2000мкс.	149387568	668743673
Л	ССБ	1230.1	3377540542049	7484865560846
З		3,65мкс.	10344	20688
Р		7300 мкс.	506911437	1194964258

Список литературы

[1] Chor B., Rivest R.L., "A Knapsack-Type Public Key Cryptosystem Based on Arithmetic in Finite Fields.", *IEEE Transactions on information theory*, **34**:5 (1988), 901–909.

[2] L. Hernández Encinas , J. Muñoz Masqué, A. Queiruga Dios., "Safer parameters for the Chor–Rivest cryptosystem.", *Computers and Mathematics with Applications*, **56** (2008), 2883–2886.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

On the Chor-Rivest Cryptosystem in a Field with an Optimal Normal Basis of the Second Type

S. B. Gashkov, A. A. Sesiukalov, A. B. Frolov

A modification of the Shor–Rivest cryptosystem is considered, distinguished by the fact that computations in a random power basis are simulated using an optimal normal basis of type II, with acceleration achieved through fast multiplication and exponentiation.

Keywords: Shor-Rivest cryptosystem, optimal normal basis of the second type, fast multiplication, raising to a power equal to the field characteristic..

References

[1] Chor B., Rivest R.L., “A Knapsack-Type Public Key Cryptosystem Based on Arithmetic in Finite Fields.”, *IEEE Transactions on information theory*, **34**:5 (1988), 901–909.

[2] L. Hernández Encinas , J. Muñoz Masqué, A. Queiruga Dios., “Safer parameters for the Chor–Rivest cryptosystem.”, *Computers and Mathematics with Applications*, **56** (2008), 2883–2886.

Received on October 10, 2026

О вычислении размаха регулярных языков при алфавитном кодировании

П. С. Дергач*

В данной работе вводится и изучается понятие размаха регулярных языков при алфавитном кодировании. Основным результатом является ранее не известное свойство дихотомии единичного и бесконечного размахов для языков специального итерационно-конкатанированного вида в случае двухэлементного входного алфавита. Также показано, как для такого алфавита на основании этого результата можно построить новый алгоритм вычисления размаха регулярного языка в общем случае (сама алгоритмическая разрешимость этого вычисления является известным фактом).

Ключевые слова: регулярный язык, алфавитное кодирование, размах.

1. Введение

В классической теории кодирования известен результат об алгоритмической разрешимости проверки регулярных языков на однозначность декодирования при алфавитном кодировании[1]. Также чуть менее известен результат об алгоритмичности вычисления максимального количества различных слов языка с общим кодом[2],[3]. Но соответствующие алгоритмы в общем случае имеют высокую временную сложность и имеет смысл изучать подклассы языков с точки зрения упрощения сложности алгоритмов и получения новых качественных результатов.

2. Основные определения

Через $\mathbb{N}$ обозначаем множество натуральных чисел. Понятия регулярного языка и алфавитного кодирования считаем общеизвестными [4], [5]. Множество регулярных языков в конечном алфавите A обозначаем через $R(A)$, а множество функций алфавитного кодирования из конечного

Дергач Петр Сергеевич — к.ф.-м.н., научный сотрудник кафедры Математической Теории Интеллектуальных Систем механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: dergachpes@mail.ru.

Dergach Peter Sergeevich — Ph.D. in Physics and Mathematics, Researcher, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

алфавита A в конечный алфавит B обозначаем через $F(A,B)$. *Размахом* $l_f(P)$ регулярного языка $P \in R(A)$ при алфавитном кодировании $f \in F(A,B)$ называем максимальное количество попарно различных слов из P с общим кодом относительно f. Если количество таких слов сколь угодно велико, то говорим, что *размах бесконечен* и пишем $l_f(P) = \infty$.

3. Основные результаты

Утверждение 1. *Пусть* $|A| = 2$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P_1, \ldots, P_s \in R(A) \setminus \{\lambda\}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+1} \in A^*$, $P = \alpha_1 \cdot P_1^* \ldots \alpha_s \cdot P_s^* \cdot \alpha_{s+1}$ *и* $f \in F(A,B)$. *Тогда или* $l_f(P) = 1$, *или* $l_f(P) = \infty$.

Замечание 1. *При* $|A| = 2$, $P \in R(A)$, $f \in F(A,B)$ *из этого утверждения следует алгоритмическая вычислимость* $l_f(P)$ *новым ранее не известным способом, который может в ряде случаев оказаться более быстрым, чем известные ранее алгоритмы.*

4. Краткое изложение идеи доказательства

Сначала заметим, что при $s = 0$ утверждение тривиально, а при $s = 1$ оно сводится к случаю $P = (P_1)^*$. В этом случае заметим, что если $l_f(P_1) > 1$, то найдется пара различных слов $\alpha, \beta \in P_1$ с общим кодом. Но тогда они не соизмеримы (то есть у них нет общего измельчения $\alpha = \nu^k$, $\beta = \nu^m$), а это в свою очередь значит, что при любом $n \in \mathbb{N}$ слова из множества $(\alpha \cup \beta)^n$ тоже имеют общий код и при этом их количество равно 2^n, то есть все такие комбинации из n слов α, β попарно различны. Далее считаем, что $s > 1$. Ясно, что $l_f(\alpha_1 \cdot P_1^* \ldots \alpha_s \cdot P_s^* \cdot \alpha_{s+1}) = l_f(P_1^* \ldots \alpha_s \cdot P_s^*)$. Далее используется ключевой факт о том, что при $A = \{0,1\}$ неоднозначное кодирование f без ограничения общности имеет вид $f(0) = 0^k$, $f(1) = 0^r$, где $k, r \in \mathbb{N}$. И для такого кодирования можно подобрать непустые слова $\alpha \in P_1^*$, $\gamma \in P_s^*$ так, чтобы $f(\alpha) = f(\gamma)$. И далее показывается, что если $\beta_1, \beta_2 \in P_1^* \ldots \alpha_s \cdot P_s^*$ – два различных слова с общим кодом, то каждая из двух пар слов $(\alpha\beta_1, \beta_1\gamma)$, $(\alpha\beta_2, \beta_2\gamma)$ имеет общий код и при этом хотя бы одна из этих пар попарно различна. Наконец, показывается, что если слова $\alpha\beta, \beta\gamma$ попарно различны и имеют общий код, то тогда и при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ семейство слов вида $\alpha^{n-k}\beta\gamma^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$ попарно различно и имеет общий код.

Приведем теперь обоснование первого замечания. Хорошо известно, что любой регулярный язык представим в виде конечного объединения множеств вида $\alpha_1 \cdot P_1^* \ldots \alpha_s \cdot P_s^* \cdot \alpha_{s+1}$. При этом у каждого представителя

этого объединения параметр s может быть своим и может равняться 0. И слова α_i тоже могут варьироваться и могут быть равными пустым словам. Регулярные множества P_i тоже могут варьироваться и являются непустыми. В силу первого утверждения каждая из таких серий имеет или единичный, или бесконечный размах. Причем можно эффективно быстро определить, какой из двух случаев имеет место, так как хорошо известен быстрый алгоритм проверки $l_f(P) \geqslant 2$. Если хотя бы одна из серий имеет бесконечный размах, то это верно и для P. В противном случае размах $l_f(P)$ конечен и не превосходит общего количества серий. Далее можно применить, например, модификацию графового критерия Маркова[1], в котором ищется цикл через пустую вершину. Основная суть модификации состоит в том, что в вершинах находятся уже не постфиксы элементарных кодов, а конструкции из n-ярусных слов, получаемых при подаче очередного элементарного кода из n-склейки (то есть набора из n различных слов с общим кодом). Также важно отметить, что помимо графового критерия здесь еще используется идея об отслеживании состояний автомата для P в каждом из ярусов и выявляется совпадение части возникающих слов между собой.

Заключение

Для случая $|A| = 2$ и языков интерационно-конкатанированного вида получен результат об эффективном вычислении размаха (все сводится к проверке обычной однозначности такого языка). Также показано, как этот результат может быть применен для построения алгоритма в случае $|A| = 2$ для произвольных регулярных языков. Дальнейший интерес представляет оптимизация сложности возникшего алгоритма и выявление классов языков, на которых данный алгоритм эффективно работает. Также было бы интересно получить обобщение этого алгоритма на случай $|A| > 2$.

Список литературы

[1] Ал. А. Марков, *Введение в теорию кодирования*, Наука, Москва, 1982, 192 с.

[2] Weber A., Seidl H., *On the degree of ambiguity of finite automata*, **88**, Theoretical Computer Science, 1991, 325-249 pp.

[3] Allauzen C., Mohri M., Rastogi A., *General algorithms for testing the ambiguity of finite automata*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, 108–120 pp.

[4] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Теория автоматов: 2-е изд., испр. и доп.*, Юрайт, Москва, 2025, 320 с.

[5] С. В. Яблонский., *Введение в дискретную математику*, Высшая школа, Москва, 2008, 384 с.

Статья поступила 2 ноября 2026 г.

On the computation of the span of regular languages under alphabetic coding

P. S. Dergach

In this paper, we introduce and study the concept of the span of regular languages under alphabetic coding. The main result is a previously unknown dichotomy property of unit and infinite spans for languages of a special iteration-concatenation form in the case of a two-element input alphabet. It is also shown how, based on these results, one can construct an algorithm for computing the span in the general case for such an alphabet (the algorithmic decidability of this computation itself is a known fact).

Keywords: regular language, alphabetic coding, span.

References

[1] Markov Al.A., *Introduction to Coding Theory*, Nauka Publishers, Moscow, 1982, 192 pp.

[2] Weber A., Seidl H., *On the degree of ambiguity of finite automata*, **88**, Theoretical Computer Science, 1991, 325-249 pp.

[3] Allauzen C., Mohri M., Rastogi A., *General algorithms for testing the ambiguity of finite automata*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, 108–120 pp.

[4] Kudryavtsev V.B., Alyoshin S.V., Podkolzin A.S., *Automata theory*, 2nd ed., revised and expanded, Urait, Moscow, 2025, 320 pp.

[5] Yablonskiy S.V., *Introduction to Discrete Mathematics*, Vysshaya Shkola, Moscow, 2008, 384 pp.

Received on November 2, 2026

Квадратичный алгоритм проверки бесформенности конечных квазигрупп

Р. А. Жигляев*

В работе приводится алгоритм проверки бесформенности конечных квазигрупп, имеющий квадратичную по порядку квазигруппы сложность по времени и по памяти. В частности, представлен квадратичный алгоритм проверки отсутствия собственных подквазигрупп как одного из свойств, входящего в понятие бесформенности.

Ключевые слова: квазигруппа, подквазигруппа, бесформенность .

1. Введение

Конечные квазигруппы применяются в криптографических алгоритмах Edon-R' [1] и NaSHA [2], построении A-кодов и однонаправленных функций [3]. Важные криптографические требования к ним – отсутствие собственных подквазигрупп и бесформенность: подквазигруппы могут упрощать атаки на криптосистему, а их отсутствие входит в более обширное понятие бесформенности. Для ускорения работы криптосистем необходимо проверять требуемые свойства с наибольшей эффективностью.

В работе предложены алгоритмы проверки бесформенности и существования собственной подквазигруппы с квадратичной по порядку квазигруппы сложностью по времени и памяти.

2. Основные определения

Определение 1. Конечное множество Q, на котором задана бинарная операция умножения $*$: $Q \times Q \to Q$, такая, что для любых элементов $a, b \in Q$ уравнения $a * x = b$ и $y * a = b$ однозначно разрешимы в Q, называется *конечной квазигруппой*. Операцию $*$ будем называть квазигрупповой.

Далее речь будет идти только о конечных квазигруппах, поэтому слово «конечная» будет опускаться, а множество Q будем считать непустым.

* *Жигляев Родион Алексеевич* — аспирант каф. МаТИС мех.-мат. факультета МГУ, e-mail: rzhiglyaev@mail.ru, ORCID: 0000-0002-2008-8674.

Zhigliaev Rodion Alekseevich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Будем считать, что все квазигруппы заданы своими таблицами умножения, а вычисление умножения в квазигруппе будем считать элементарной операцией.

Определение 2. Пусть задана квазигруппа $(Q, *)$ и $Q' \subset Q$, $1 \leq |Q'| < |Q|$. Если для любых элементов $a, b \in Q'$ верно, что $a * b \in Q'$, то будем говорить, что квазигруппа $(Q, *)$ содержит собственную подквазигруппу $(Q', *')$, где $*'$ — ограничение операции $*$ на $Q' \times Q'$.

Определение 3. Квазигруппа $(Q, *)$ порядка N называется бесформенной, если:

- квазигруппа не идемпотентна, т.е. $\exists x \in Q$, т.ч. $x * x \neq x$;
- квазигруппа не коммутативна, т.е. $\exists x, y \in Q$, т.ч. $x * y \neq y * x$;
- квазигруппа не ассоциативна, т.е. $\exists x, y, z \in Q$, т.ч. $(x * y) * z \neq x * (y * z)$;
- квазигруппа не содержит ни левой, ни правой единицы, т.е. не существует $e_1 \in Q$, т.ч. $\forall x \in Q\ e_1 * x = x$, и не существует $e_2 \in Q$, т.ч. $\forall x \in Q\ x * e_2 = x$;
- квазигруппа не содержит собственных подквазигрупп;
- не существует целого k с $0 < k < 2N$, при котором выполняется хотя бы одно из тождеств

$$\underbrace{x * (x\ ... * (x}_{k} * y)) = y,\ y = ((y * \underbrace{x) * ...\ x) * x}_{k}\ \forall x, y \in Q.$$

3. Описание алгоритма

Проверка бесформенности заключается в поочередной проверке каждого из свойств, входящих в определение. Проверка идемпотентности, коммутативности и существования единиц, очевидно, осуществляется простым перебором с не более чем квадратичной сложностью по времени и памяти. Для проверки ассоциативности известен квадратичный алгоритм, представленный в работе [4]. Для проверки существования собственной подквазигруппы можно воспользоваться описанным далее алгоритмом.

Алгоритм 1 Проверка существования собственной подквазигруппы

1: выбрать $a \in Q$ и пометить посещённым
2: $t \leftarrow 1$; $B_1 \leftarrow \{a\}$; $P_1 \leftarrow [(a, a)]$
3: **while** true **do**
4: **if** $P_t = \emptyset$ **then**
5: **return** «существует», если $|B_t| < N$; иначе «не существует»
6: **end if**
7: извлечь (x, y) из P_t; $z \leftarrow x * y$
8: **if** $z \notin B_t$ **then**
9: **if** z не посещён **then**
10: пометить z посещённым; $t \leftarrow t + 1$
11: $B_t \leftarrow \{z\}$; $P_t \leftarrow [(z, z)]$
12: **else**
13: найти $i < t$ с $z \in B_i$
14: $B \leftarrow \bigcup_{j=i}^{t} B_j$
15: $P \leftarrow$ очереди $P_i, \ldots, P_t$, объединённые без копирования
16: добавить в P все пары $(u, v) \in B_p \times B_q$, где $i \le p, q \le t$ и $p \ne q$
17: $t \leftarrow i$; $B_t \leftarrow B$; $P_t \leftarrow P$
18: **end if**
19: **end if**
20: **end while**

Приведем также алгоритм проверки тождества $\underbrace{x * (x \ ... * (x}_{k} * y)) = y$. Для второго тождества алгоритм выглядит аналогичным образом.

Алгоритм 2 Проверка левого тождества

1: $k \leftarrow 1$
2: **for all** $x \in Q$ **do**
3: пометить все элементы непосещёнными
4: **for all** $y \in Q$ **do**
5: **if** y посещён **then continue**
6: **end if**
7: $z \leftarrow x * y$, $len \leftarrow 1$
8: **while** $z \ne y$ **do**
9: пометить z посещённым; $z \leftarrow x * z$, $len \leftarrow len + 1$
10: **end while**
11: пометить y посещённым; $k \leftarrow \mathrm{lcm}(k, len)$
12: **if** $k \ge 2N$ **then return** «не выполняется при $0 < k < 2N$»
13: **end if**
14: **end for**
15: **end for**
16: **return** «выполняется при найденном k»

Теорема 1. *Существует алгоритм проверки бесформенности конечной квазигруппы со сложностью $O(N^2)$ по времени и памяти, где N – порядок квазигруппы.*

Список литературы

[1] D. Gligoroski, R. S. Ødegård, M. Mihova, S. J. Knapskog, A. Drapal, V. Klíma, J. Amundsen, M. El-Hadedy, "Cryptographic hash function EDON-R'", *Proceedings of the 1st International Workshop on Security and Communication Networks*, IEEE, 2009, 1–9.

[2] S. Markovski, A. Mileva, "NaSHA — family of cryptographic hash functions", *The First SHA-3 Candidate Conference* (K.U. Leuven, Belgium, February 25–28, 2009), 2009.

[3] М. М. Глухов, "О применениях квазигрупп в криптографии", *Прикладная дискретная математика*, 2008, №2(2), 28–32. DOI: 10.17223/20710410/2/7.

[4] R. Beals, "Testing Whether a Table Defines a Group", *The American Mathematical Monthly*, **133**:5 (2026), 472–477. DOI: 10.1080/00029890.2025.2557077.

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

Quadratic algorithm for checking shapelessness of finite quasigroups

R. A. Zhigliaev

The paper presents an algorithm for checking the shapelessness of finite quasigroups that has quadratic time and space complexity in the order of the quasigroup. In particular, a quadratic algorithm is presented for checking the absence of proper subquasigroups as one of the properties comprising the concept of shapelessness.

Keywords: quasigroup, subquasigroup, shapelessness .

References

[1] D. Gligoroski, R. S. Ødegård, M. Mihova, S. J. Knapskog, A. Drapal, V. Klíma, J. Amundsen, M. El-Hadedy, "Cryptographic hash function EDON-R'", *Proceedings of the 1st International Workshop on Security and Communication Networks*, IEEE, 2009, 1–9.

[2] S. Markovski, A. Mileva, "NaSHA — family of cryptographic hash functions", *The First SHA-3 Candidate Conference* (K.U. Leuven, Belgium, February 25–28, 2009), 2009.

[3] M. M. Glukhov, "On applications of quasigroups in cryptography", *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2008, №2(2), 28–32 (In Russian. DOI: 10.17223/20710410/2/7).

[4] R. Beals, "Testing Whether a Table Defines a Group", *The American Mathematical Monthly*, **133**:5 (2026), 472–477. DOI: 10.1080/00029890.2025.2557077.

Received on November 8, 2026

О схеме, реализующей квантовую хеш-функцию

И. Г. Зиннатуллин*

Представлен алгоритм для построения k-кубитной схемы квантового хеширования с d параметрами, где $k \geq 3$, $2^{k-2} < d \leq 2^{k-1}$. Получены оценки $N_1 \leq 2^{k-1} + 11k - 24$ и $N_2 \leq 2^{k-1} + 3k - 8$ на количества элементарных однокубитных гейтов и CNOT-гейтов соответственно. При $k \geq 5$ обе оценки меньше соответствующих оценок алгоритма Бергхольма и соавторов (2005) в том же базисе гейтов.

Ключевые слова: квантовое хеширование, квантовая схема.

1. Предварительные сведения

Конструкции квантовых хеш-функций в амплитудной и фазовой формах представлены в работе [1]. Рассматривается схема для их реализации на k кубитах с d параметрами, где $k \geq 3$, $2^{k-2} < d \leq 2^{k-1}$. Элементарными считаются однокубитные гейты X, H, R_y, R_z и двухкубитный CNOT-гейт. Через N_1 и N_2 обозначаются количества элементарных однокубитных гейтов и CNOT-гейтов соответственно.

2. Преобразование квантового состояния в базисное нулевое состояние

Алгоритм из работы [2] преобразует произвольное k-кубитное состояние в $|0\rangle^{\otimes k}$. Схема состоит из каскада равномерно управляемых однокубитных гейтов с $j = k-1, \ldots, 1$ управляющими кубитами и заключительного однокубитного гейта. После преобразований каждому j соответствует блок, в котором чередуются 2^j однокубитных гейтов и $2^j - 1$ CNOT-гейтов. Используем разложение Тейта-Брайана в форме $R_x R_y R_z$. Поворот R_x на целевом кубите коммутирует с CNOT-гейтом, поэтому он переносится через CNOT-гейт и объединяется со следующим однокубитным гейтом. Далее пересчитываются углы разложения для объединенного

* *Зиннатуллин Илнар Гумарович* — ассистент кафедры теоретической кибернетики ИВМиИТ КФУ, e-mail: ilngzinnatullin@kpfu.ru.

Zinnatullin Ilnar Gumarovich — Assistant Lecturer, Department of Theoretical Cybernetics, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

гейта. Последний однокубитный гейт каждого блока и заключительный однокубитный гейт раскладываются в форме $R_zR_yR_z$. Левый множитель R_z можно убрать: на $|0\rangle$ он даёт глобальную фазу. В итоге получаем оценки $N_1 \le 2^{k+1} - 2$ и $N_2 \le 2^k - k - 1$.

3. Приготовление равномерной суперпозиции

Пусть $k \ge 2$ — число кубитов, $3 \le d \le 2^k$. Необходимо приготовить состояние $\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle$ из $|0\rangle^{\otimes k}$. Если $d = 2^r$, где $2 \le r \le k$, достаточно применить гейт H к r младшим кубитам. В этом случае $N_1 = r$ и $N_2 = 0$. Далее предполагаем, что d не является степенью двойки, и используем алгоритм из работы [3].

Запишем $d = \sum_{j=0}^{m} 2^{l_j}$, где $0 \le l_0 < \ldots < l_m \le k - 1$ и $m \ge 1$. Согласно [3], схема содержит m гейтов X, l_0 гейтов H, один гейт R_y, $m-1$ управляемых гейтов R_y и $l_m - l_0$ управляемых гейтов H. Управляемые гейты имеют управление по состоянию $|0\rangle$. Используя разложения для управляемых гейтов из [3, рис. 6], получаем оценки:

$$N_1 = m + l_0 + 1 + 4(m-1) + 6(l_m - l_0) = 5m + 6l_m - 5l_0 - 3,$$
$$N_2 = 2(m-1) + (l_m - l_0) = 2m + l_m - l_0 - 2.$$

Поскольку $l_m - l_0 = \sum_{j=0}^{m-1} (l_{j+1} - l_j) \ge m$, $l_m \le k - 1$ и $l_0 \ge 0$, то

$$N_1 \le 5(l_m - l_0) + 6l_m - 5l_0 - 3 = 11l_m - 10l_0 - 3 \le 11k - 14,$$
$$N_2 \le 2(l_m - l_0) + l_m - l_0 - 2 = 3l_m - 3l_0 - 2 \le 3k - 5.$$

Границы достигаются при $d = 2^k - 1$. Оценки справедливы и при $d = 2^r$.

4. Разложение равномерно управляемого поворота

Равномерно управляемый поворот $\mathrm{UCR}_a^n(\tilde{\theta})$ с n управляющими кубитами, где $a \in \{y, z\}$, $\tilde{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_{2^n-1})^T \in \mathbb{R}^{2^n}$, при состоянии $|j\rangle$ управляющего регистра применяет $R_a(\theta_j)$ к целевому кубиту. Согласно [2], этот гейт раскладывается в чередующуюся последовательность 2^n однокубитных поворотов R_a и 2^n CNOT-гейтов. Таким образом, $N_1 = N_2 = 2^n$.

5. Реализация квантового хеширования

Пусть $q \ge 3$ — натуральное число, $\varepsilon \in (0, 1)$, а $S = (s_0, \ldots, s_{d-1})$ — упорядоченный набор элементов $\mathbb{Z}_q$, такой, что для любого $x \in \mathbb{Z}_q \setminus \{0\}$ выполняется $\frac{1}{d} \left| \sum_{j=0}^{d-1} e^{2\pi i s_j x/q} \right| \le \varepsilon$. Выбор S определяет криптографические

свойства. Согласно [1], такой набор можно выбрать с $d = O((\log_2 q)/\varepsilon^2)$. Пусть $n = \lceil \log_2 d \rceil$ и $k = n + 1$.

Квантовая хеш-функция $\psi : \mathbb{Z}_q \to (\mathcal{H}^2)^{\otimes k}$ определяется как $|\psi(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle \otimes R_a(\theta_j) |\phi\rangle$, где $a = y$, $\phi = 0$ для амплитудной формы и $a = z$, $\phi = 1$ для фазовой формы, $\theta_j = 4\pi s_j x/q$. Если $d < 2^n$, определим $\theta_j = 0$ при $d \le j \le 2^n - 1$. Положим $\tilde{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_{2^n-1})^T \in \mathbb{R}^{2^n}$. Для вычисления $|\psi(x)\rangle$ выполняются следующие шаги:

1. Из $|0\rangle^{\otimes k}$ подготавливается $|0\rangle^{\otimes n} \otimes |\phi\rangle$: при $|\phi\rangle = |1\rangle$ к целевому кубиту применяется гейт X.
2. На первых n кубитах приготавливается равномерная суперпозиция $\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle$ по алгоритму из раздела 3.
3. Применяется гейт $\mathrm{UCR}_a^n(\tilde{\theta})$ с первыми n управляющими кубитами. Используется разложение из раздела 4.

Суммируя оценки для этих шагов, получаем $N_1 \le 2^n + 11n - 14 + 1 = 2^n + 11n - 13$ и $N_2 \le 2^n + 3n - 5$.

Теорема 1. *Для описанной k-кубитной схемы при $k \ge 3$, $2^{k-2} < d \le 2^{k-1}$ выполняются оценки $N_1 \le 2^{k-1} + 11k - 24$ и $N_2 \le 2^{k-1} + 3k - 8$.*

Универсальную схему для приготовления $|\psi(x)\rangle$ из $|0\rangle^{\otimes k}$ можно получить обращением схемы из раздела 2: порядок гейтов меняется на обратный, а каждый гейт заменяется эрмитово сопряженным. При этом оценки $N_1 \le 2^{k+1} - 2$ и $N_2 \le 2^k - k - 1$ сохраняются. При $k \ge 5$ обе оценки из теоремы 1 меньше этих универсальных оценок.

6. Заключение

Представлен алгоритм для построения k-кубитной схемы квантового хеширования с d параметрами, где $k \ge 3$, $2^{k-2} < d \le 2^{k-1}$. Получены оценки $N_1 \le 2^{k-1} + 11k - 24$ и $N_2 \le 2^{k-1} + 3k - 8$. При $k \ge 5$ обе оценки меньше соответствующих оценок универсального алгоритма из [2] после описанного разложения однокубитных гейтов. Главные члены оценок N_1 и N_2 уменьшены в 4 и 2 раза соответственно.

Благодарности

Работа выполнена за счет предоставленного в 2026 году Фондом науки и технологий Республики Татарстан гранта на осуществление фундаментальных и поисковых исследований в научных и образовательных

организациях, предприятиях и организациях реального сектора экономики Республики Татарстан.

Список литературы

[1] F. Ablayev, K. Khadiev, A. Vasiliev, M. Ziiatdinov, "Theory and applications of quantum hashing", *Quantum Reports*, **7**:2 (2025), 24. DOI: 10.3390/quantum7020024.

[2] V. Bergholm, J. J. Vartiainen, M. Möttönen, M. M. Salomaa, "Quantum circuits with uniformly controlled one-qubit gates", *Phys. Rev. A*, **71**:5 (2005), 052330. DOI: 10.1103/PhysRevA.71.052330.

[3] A. Shukla, P. Vedula, "An efficient quantum algorithm for preparation of uniform quantum superposition states", *Quantum Information Processing*, **23**:2 (2024), 38. DOI: 10.1007/s11128-024-04258-4 .

Статья поступила 23 октября 2026 г.

On a Quantum Circuit Implementing a Quantum Hash Function

I. G. Zinnatullin

We present an algorithm for constructing a k-qubit quantum hashing circuit with d parameters, where $k \geq 3$ and $2^{k-2} < d \leq 2^{k-1}$. We obtain the bounds $N_1 \leq 2^{k-1}+11k-24$ and $N_2 \leq 2^{k-1}+3k-8$ on the numbers of elementary one-qubit gates and CNOT gates, respectively. For $k \geq 5$, both bounds are lower than the corresponding bounds for the algorithm of Bergholm et al. (2005) in the same gate basis.

Keywords: quantum hashing, quantum circuit.

References

[1] F. Ablayev, K. Khadiev, A. Vasiliev, M. Ziiatdinov, "Theory and applications of quantum hashing", *Quantum Reports*, **7**:2 (2025), 24. DOI: 10.3390/quantum7020024.

[2] V. Bergholm, J. J. Vartiainen, M. Möttönen, M. M. Salomaa, "Quantum circuits with uniformly controlled one-qubit gates", *Phys. Rev. A*, **71**:5 (2005), 052330. DOI: 10.1103/PhysRevA.71.052330.

[3] A. Shukla, P. Vedula, "An efficient quantum algorithm for preparation of uniform quantum superposition states", *Quantum Information Processing*, **23**:2 (2024), 38. DOI: 10.1007/s11128-024-04258-4.

Received on October 23, 2026

Об использовании малой теоремы Ферма и ее аналогов в криптографии

Ш. Т. Ишмухаметов*, А. А. Курбангалеев‡, Б. Г. Мубараков§, Р. Г. Рубцова¶

В этой статье мы рассмотрим важную задачу криптографии: построение тестов простоты для генерации простых чисел большой размерности. Мы предлагаем усиление существующих методов путем использования аналогов малой теоремы Ферма.

Ключевые слова: тест простоты, конечные поля, факторизация, криптографические протоколы, эллиптические кривые, метод Люка, метод Вильямса.

1. Введение

Мы опишем новый подход к построению тестов простоты. Тест простоты – это процедура, определяющая, является ли заданное натуральное число простым или составным. В настоящее время в криптографии используются вероятностные тесты, которые иногда делают ошибки, оценивая составные числа как вероятно простые. Наш подход заключается в уменьшении вероятности ошибок или сведению их к нулю путем комбинирования применяемых в криптографии методов с малой теоремой Ферма или ее аналогов ([1], [2], [3]). Сформулируем малую теорему Ферма. Пусть p–простое число, $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, тогда

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{1}$$

Обращение этой теоремы неверно. С другой стороны, вероятность выполнения соотношения (1) для составного числа достаточна мала и позволяет

* *Ишмухаметов Шамиль Талгатович* — докт. физ.-мат. наук, проф. каф. САИТ, ИВМиИТ КФУ, e-mail: ishm2010@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2554-2351.

Ishmukhametov Shamil Talgatovich — professor, Kazan Federal University.

‡ *Курбангалеев Артур Аскарович* — канд. техн. наук, доцент каф. САИТ, ИВМиИТ КФУ, e-mail: arturkurbangaleev@rambler.ru, ORCID: 0000-0002-6881-1075.

Kurbangaleev Artur Askarovich — docent, Kazan Federal University.

§ *Мубараков Булат Газинурович* — канд. техн. наук, доцент каф. САИТ, ИВМиИТ КФУ, e-mail: mubbulat@mail.ru, ORCID: 0000-0002-7628-9870.

Mubarakov Bulat Gazinurovich — docent, Kazan Federal University.

¶ *Рубцова Рамиля Гакилевна* — ст.преподаватель каф. САИТ, ИВМиИТ КФУ, e-mail: dearr2003@mail.ru, ORCID: 0000-0002-3555-4834.

Rubtsova Ramilya Gakilevna — senior lecturer, Kazan Federal University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

использовать его в тестах простоты. Малая теорема Ферма используется также для факторизации составных чисел. Известный $(p-1)$–метод Полларда работает следующим образом. Пусть $p > 2$ – простой делитель составного числа n. Возьмем произвольный элемент, например, число 2, и будем возводить его в большую степень $N(B)$, находя остаток по модулю n. Если выполнится соотношение $(p-1)|\ N(B)$, тогда $2^{N(B)} \bmod\ p = 2^{(p-1)k} \bmod\ p = 1$, и $2^{N(B)} = 1 + kp$ для некоторого k, откуда $GCD(2^N(B) - 1, n) = p$.

Рассмотрим конечное поле F_{p^2}, построенное на неприводимом многочлене $f(x) = x^2 - ax - b$. Эндоморфизм Фробениуса, определенный на элементах этого поля, $\Phi(z) :\ z \to z^p$, оставляет простое подполе F_p на месте. Также для корней $f(x)$ выполняется соотношение $\Phi(z) = a - z$ и $\Phi(a - z) = z$, то есть отображение Фробениуса переставляет элементы z и $a - z$. Отсюда $z^{p+1} \equiv z(a - z) \equiv (a - z)^{p+1} (\bmod\ p)$, откуда

$$z^{p+1} - (a - z)^{p+1} \equiv\ 0 (\bmod\ p). \tag{2}$$

Формула (2) так же, как и малая теорема Ферма, может быть использована для построения тестов простоты и алгоритмов факторизации. Приведем пример теста простоты, использующего ряд Фибоначчи: $R_0 = 0,\ R_1 = 1,\ R_{n+2} = R_n + R_{n+1}$. Элементы ряда Фибоначчи можно представить в виде:

$$R_n \equiv \frac{x^n - (1 - x)^n}{2x - 1}\ (\bmod\ f(x), p),$$

где $f(x) = x^2 - x - 1$ – характеристический многочлен последовательности Фибоначчи с дискриминантом $D = 5$. Рассмотрим кольцо F, состоящее из многочленов 1-й степени $ax + b$ по составному модулю $\{f(x), p\}$, где $p \neq 5$ – простое число. Если $p \bmod\ D$ является квадратичным вычетом в F_5, то F изоморфно $Z_p \times Z_p$. Иначе, F – квадратичное поле порядка p^2. Отсюда вытекает следующая теорема Люка, являющаяся в некотором смысле аналогом малой теоремы Ферма . Если простое $p \equiv \pm 1\ (\bmod\ 5)$, то $R_{p-1} \equiv 0\ (\bmod\ p)$, и если $p \equiv \pm 2\ (\bmod\ 5)$, тогда $R_{p+1} \equiv 0\ (\bmod\ p)$. Как и в теореме Ферма, составные числа достаточно редко проходят данный тест. Будем называть составные числа, проходящие тест Люка, L-псевдопростыми, а составные числа, проходящие тест Ферма по основанию 2, F2-псевдопростыми. Объединим эти два теста. Назовем составные числа, проходящие комбинированный тест, FL-псевдопростыми. С помощью компьютерных вычислений были найдены несколько FL-псевдопростых чисел $n \equiv \pm 1\ (\bmod\ 5)$. Однако FL-псевдопростых чисел вида $n \equiv \pm 2\ (\bmod\ 5)$ найдено не было. Это породило Baillie-PSW гипотезу, сформулированную еще в 1980 году: не существует FL-псевдопростых

чисел вида $n \equiv \pm 2 \pmod 5$ (в самой гипотезе использовался не тест Ферма, а один раунд теста Миллера-Рабина с основанием 2). На сегодняшний день так и не было найдено ни одного Fl2-псевдопростого числа вида $n \equiv \pm 2 \pmod 5$. Если эта гипотеза верна, то простоту чисел вида $n \equiv \pm 2 \pmod 5$ можно было бы проверять с помощью двух проверок теорем Ферма и Люка, что является самым быстрым на текущий момент тестом простоты в мире. Используя свойства FL-псевдопростых чисел $n \equiv \pm 2 \pmod 5$ [4] и мультипроцессорный сервер Казанского федерального университета, мы проверили отсутствие таких чисел до границы 10^{21}. Наша программа работала примерно 9 месяцев, используя 24 процессора. Отметим, что данный тест проверяет только числа вида $n \equiv \pm 2 \pmod 5$, то есть примерно половину от всех нечетных чисел (числа, кратные 5, легко отсекаются). Для проверки других чисел используем поля, построенные на других характеристических полиномах вида $f(x) = x^2 - ax - b$. Необходимым условием возможности использования полинома является требование того, чтобы его дискриминант не был полным квадратом или являлся отрицательным числом. Последнее дает нам знакопеременные ряды, что уменьшает рост слагаемых по абсолютной величине. С помощью компьютерных вычислений нами было найдено 5 нетривиальных полиномов, которые охватывают в совокупности 31/32 всех целых чисел (исключая числа, кратные модулю соответствующего дискриминанта).

N	a	b	$D = a^2 + 4b$
1	1	1	5
2	4	-2	8
3	1	-2	-7
4	1	-3	-11
5	2	-3	-8

Справедливость Baillie-PSW гипотезы для ряда Фибоначчи не влечет автоматически ее справедливости при замене его другим рядом из нашей таблицы, однако имеются серьезные основания считать, что это верно. В этом случае большинство натуральных чисел могло бы быть проверено на простоту с помощью этого комбинированного теста.

Список литературы

[1] Ш.Т. Ишмухаметов, Р.Г.Рубцова, Р.Р.Хуснутдинов, “Об одном комбинированном тесте простоты”, *Известия вузов.Математика*, **2**, 2022, 83–89. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X22020049.

[2] Ш.Т.Ишмухаметов, Н.А.Антонов, Б.Г.Мубараков, Р.Г.Рубцова., “Об одном тесте простоты натуральных чисел”, *Известия вузов.Математика*, **12**, 2022, 123–129. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-12-123-129.

[3] S.Ishmukhametov, N.Antonov, B. Mubarakov, “On a Modification of The Lucas Primality Test”, *Lobachevskii J.Math*, **7**, 2023, 1–8. DOI: 10.1134/S1995080223070193.

[4] Ш.Т.Ишмухаметов, Б.Г.Мубараков, Р.Г.Рубцова, Р.Г. Олейникова, “О BAILLIE-PSW гипотезе”, *Известия вузов.Математика*, **4**, 2024, 80–88. DOI: 10.26907/0021-3446-2024-4-80-88 .

Статья поступила 5 октября 2026 г.

The use of Fermat’s Little Theorem and its analogues in cryptography

S. T. Ishmukhametov, A. A. Kurbangaleev, B. G. Mubarakov, R. G. Rubtsova

In this article, we will examine an important cryptographic problem: constructing efficient primality tests used to generate large prime numbers. We improve upon existing methods by using analogues of Fermat’s little theorem.

Keywords: primality test, finite fields, factorization, cryptographic protocols, elliptic curves, Lucas method, Williams’ method.

References

[1] Sh.T. Ishmukhametov, R.G. Rubtsova, R.R. Khusnutdinov, “On a Combined Primality Test”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2022, Volume 66, Issue 12, Pages 112–117*, **12**, 2022, 112–117. DOI: 10.3103/S1066369X22120088.

[2] Sh.T. Ishmukhametov, N.A. Antonov, B.G. Mubarakov, R.G. Rubtsova, “A New Primality Test for Natural Integers”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **66 (2)**, 2022, 70–73. DOI: 10.3103/S1066369X22020049.

[3] S.Ishmukhametov, N.Antonov, B. Mubarakov, “On a Modification of The Lucas Primality Test”, *Lobachevskii J.Math*, **7**, 2023, 1–8. DOI: 10.1134/S1995080223070193.

[4] Sh.T. Ishmukhametov, B.G. Mubarakov, R.G. Rubtsova, R.G. Oleinikova, “On the Baillie PSW Conjecture”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **68 (4)**, 2024, 72–78. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X24700294.

Received on October 5, 2026

Расширение произведения LDPC кодов

Г. В. Калачев*

Мы изучаем свойство расширения произведения кодов LDPC. Известно, что произведение двух экспандерных кодов LDPC является робастно тестируемым (robustly testable), что в двумерном случае эквивалентно расширению произведения. В данной работе показано, что расширение произведения любого числа LDPC кодов на основе вершинных экспандеров ограничено снизу положительной константой. При подходящем выборе параметров случайные LDPC коды с высокой вероятностью экспандерные, поэтому результат покрывает широкий класс кодов. Ранее для трёх и более двоичных кодов свойство расширения произведения было известно только для локально тестируемых кодов и некоторых их подкодов.

Ключевые слова: тензорное произведение кодов, LDPC коды, экспандерные коды, расширение произведения.

1. Введение

Понятие расширения произведения кодов в таком виде, как мы его будем рассматривать, было введено в [1]. В последние годы оно активно изучалось в связи с построением хороших локально тестируемых и квантовых кодов. Для двух кодов с линейным минимальным расстоянием оно совпадает со свойствами робастной тестируемости и тестируемости на согласованность, а при $m \geqslant 3$ строго сильнее [2]. В общем случае это переформулировка когранічного расширения коцепного комплекса, связанного с тензорным произведением кодов [1, Appendix B].

Для двух экспандерных кодов это свойство следует из [3]. Для $m \geqslant 3$ кодов основные известные на данный момент результаты получены для недвоичных кодов. Исключением являются двоичные локально тестируемые коды (LTC) с линейным расстоянием и некоторые их подкоды, для которых расширение произведения доказано в [4], однако это очень узкий класс кодов. Там же высказана гипотеза о том, что экспандерные LDPC коды также обладают хорошим расширением произведения. В настоящей

* *Калачев Глеб Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

работе мы доказываем эту гипотезу, показывая, что произвольное фиксированное число LDPC кодов на основе вершинных экспандеров обладает хорошим расширением произведения.

Приведём определение расширения произведения из [1], где также представлены история и связь с другими формами этого определения. Пусть заданы линейные коды $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m \subseteq \mathbb{F}_q^n$. Мы можем определить (*тензорное*) *произведение кодов*

$$\mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_m := \{c \in \mathbb{F}_q^{n^m} \mid \forall i \in [m]\ \forall \ell \in \mathcal{L}_i \colon c|_\ell \in \mathcal{C}_i\},$$

где $\mathbb{F}_q^{n^m}$ — это множество функций $c\colon [n]^m \to \mathbb{F}_q$, а $\mathcal{L}_i$ — множество линий, параллельных i-й оси в m-мерной решётке $[n]^m$, то есть

$$\mathcal{L}_i := \{A_1 \times \dots \times A_m \subseteq [n]^m \mid A_i = [n], \forall j \neq i : |A_j| = 1\}.$$

Здесь и далее мы используем обозначение $[n] := \{1, \dots, n\}$. Также для набора $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i\in[m]}$ линейных кодов над $\mathbb{F}_q$ нам будет удобно использовать обозначение $\otimes\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_m$.

Для набора $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i\in[m]}$ линейных кодов над $\mathbb{F}_q$ определим коды

$$\mathcal{C}^{(i)} := \mathbb{F}_q^n \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_i \otimes \dots \otimes \mathbb{F}_q^n = \{c \in \mathbb{F}_q^{n^m} \mid \forall \ell \in \mathcal{L}_i \colon c|_\ell \in \mathcal{C}_i\}.$$

Можно заметить, что в этих обозначениях выполнено

$$\mathcal{C}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_m = \mathcal{C}^{(1)} \cap \dots \cap \mathcal{C}^{(m)}.$$

Определим код

$$\boxplus\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \boxplus \dots \boxplus \mathcal{C}_m := \mathcal{C}^{(1)} + \dots + \mathcal{C}^{(m)}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{C}^{(1)} + \dots + \mathcal{C}^{(m)} = (\mathcal{C}_1^\perp \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_m^\perp)^\perp$.

Заметим, что каждый код $\mathcal{C}^{(i)}$ представляет собой прямую сумму $|\mathcal{L}_i| = n^{m-1}$ копий кода $\mathcal{C}_i$. Для $x \in \mathbb{F}_q^{n^m}$ через $|x|$ и $|x|_i$ обозначим соответственно *вес Хэмминга* (то есть количество ненулевых элементов) x и количество линий $\ell \in \mathcal{L}_i$, для которых $x|_\ell \neq 0$. Легко видеть, что введённые нормы связаны неравенством $|x| \leqslant n|x|_i$, $i \in [m]$.

Каждый $x \in \mathcal{C}_1 \boxplus \dots \boxplus \mathcal{C}_m$ может быть представлен несколькими способами как сумма $x = \sum_{i\in[m]} a_i$, где $a_i \in \mathcal{C}^{(i)}$ для всех $i \in [m]$. Введём величину

$$|x|_{\boxplus\mathcal{C}} := \min\Big\{ \sum_{i\in[m]} |a_i|_i \;\Big|\; x = \sum_{i\in[m]} a_i, a_i \in \mathcal{C}^{(i)} \Big\}.$$

Расширением произведения набора кодов $\mathcal{C}$ называется величина

$$\rho(\mathcal{C}) := \frac{1}{n} \min_{x \in \boxplus\mathcal{C}\setminus\{0\}} \frac{|x|}{|x|_{\boxplus\mathcal{C}}},$$

где минимум по пустому множеству считаем равным $+\infty$.

2. Основной результат

Двудольный (δ_L, δ_R)-регулярный граф G с левой долей L назовём (α, ε)-экспандером, если для любого $S \subseteq L$ с $|S| \leqslant \alpha|L|$ выполнено $|N(S)| \geqslant (1-\varepsilon)\delta_L|S|$, где $N(S)$ — множество соседей множества S.

Через $\mathsf{ExpLDPC}(\delta, \alpha, \varepsilon)$ обозначим множество линейных кодов $\mathcal{C}$, которые могут быть представлены как $\mathcal{C} = \ker H$, где H — матрица смежности (δ, δ_R)-регулярного (α, ε)-экспандера для некоторого $\delta_R \in \mathbb{N}$. При $\varepsilon < 1/2$ относительное минимальное расстояние такого кода больше α.

Теорема 1. *Для любых $m, \delta \in \mathbb{N}$, $R_1, \ldots, R_m \in (0,1)$, $\alpha > 0$ и $\varepsilon \in [0, 1/16]$ существует $\rho_0 > 0$, зависящее только от m, α и $\Delta := \lfloor \delta/(1 - \max_i R_i) \rfloor$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых кодов $\mathcal{C}_i \in \mathsf{ExpLDPC}(\delta, \alpha, \varepsilon)$ длины n и скорости $\leqslant R_i$, $i \in [m]$, выполнено*

$$\rho(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m) \geqslant \rho_0.$$

Замечание 1. В доказательстве регулярность справа и ограничение на скорость кодов нужны лишь для оценки правых степеней d_i: $d_i \leqslant \lfloor \delta/(1 - R_i) \rfloor \leqslant \Delta$.

Код доказательства теоремы 1 в системе Lean 4 доступен в репозитории: `https://github.com/KalachevGleb/ldpc-prodexp-lean/tree/v1.0`.

Об использовании инструментов ИИ

При работе над доказательством использовалась модель Claude Opus 5.5 в среде Claude Code. С её помощью идеи автора были формализованы и доведены до строгого доказательства теоремы 1 и написан программный код для формальной верификации доказательства в системе Lean 4. Автор несёт полную ответственность за содержание статьи.

Список литературы

[1] G. Kalachev, P. Panteleev, “Two-Sided Robustly Testable Codes”, arXiv: 2206.09973.

[2] Г. В. Калачев, “Многомерное расширение произведений кодов сильнее робастной тестируемости и тестируемости на согласованность”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:2 (2026), 101–119.

[3] I. Dinur, M. Sudan, A. Wigderson, “Robust local testability of tensor products of LDPC codes”, *APPROX-RANDOM 2006, Lecture Notes in Computer Science, vol. 4110*, Springer, 2006, 304–315.

[4] G. Kalachev, P. Panteleev, “Maximally Extendable Product Codes are Good Coboundary Expanders”, *2025 IEEE 66th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, IEEE, Sydney, Australia, 2025, 1512–1524. DOI: 10.1109/FOCS63196.2025.00079.

Статья поступила 18 октября 2026 г.

Product Expansion of LDPC Codes

G. V. Kalachev

We study the product expansion property of LDPC codes. It is known that the product of two expander LDPC codes is robustly testable, which in the two-dimensional case is equivalent to product expansion. In this work, we show that the product expansion of any number of expander LDPC codes is bounded below by a positive constant. Since random LDPC codes with certain parameters are expander codes with high probability, our result covers a wide class of codes. Previously, for three or more binary codes, product expansion was known only for locally testable codes and some of their subcodes.

Keywords: tensor product of codes, LDPC codes, expander codes, product expansion.

References

[1] G. Kalachev, P. Panteleev, “Two-Sided Robustly Testable Codes”, arXiv: 2206.09973.

[2] G. Kalachev, “High-dimensional expansion of product codes is stronger than robust and agreement testability”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:2 (2026), 101–119.

[3] I. Dinur, M. Sudan, A. Wigderson, “Robust local testability of tensor products of LDPC codes”, *APPROX-RANDOM 2006, Lecture Notes in Computer Science, vol. 4110*, Springer, 2006, 304–315.

[4] G. Kalachev, P. Panteleev, “Maximally Extendable Product Codes are Good Coboundary Expanders”, *2025 IEEE 66th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, IEEE, Sydney, Australia, 2025, 1512–1524. DOI: 10.1109/FOCS63196.2025.00079.

Received on October 18, 2026

Прототип низкоресурсного блокчейн-протокола для Интернета вещей с HMAC-защитой и edge-валидацией

О. Л. Никифоров*, Б. Г. Мубараков‡

Разработан программный прототип низкоресурсного блокчейн-протокола для Интернета вещей. Конечные устройства формируют сообщения с хешем данных и кодом аутентификации HMAC, а доверенные edge-узлы проверяют сообщения и формируют блоки. Такое разделение переносит ведение реестра на более мощные узлы. При сравнении на одном оборудовании в одинаковых условиях выполнения прототип обработал 5000 событий с пропускной способностью 4980,52 события/с против 306,53 у контрольной модели.

Ключевые слова: Интернет вещей, блокчейн, программный прототип, HMAC, edge-вычисления, дерево Меркла.

1. Введение

Датчики Интернета вещей формируют потоки измерений, для которых важны проверка источника и целостности данных. Ограниченные память, вычислительная мощность и запас энергии затрудняют хранение цепочки блоков и участие устройств в согласовании записей [1].

Разделение функций между устройствами и более мощными узлами используется в архитектуре LSB [2], а применение HMAC в низкоресурсном блокчейне рассматривается в [3]. В данной работе этот подход реализован в прототипе LWB-HMAC-edge для регистрации событий. Цель исследования — объединить аутентификацию сообщений, хранение хешей и пакетное подтверждение блоков, а затем оценить производительность полученной программной реализации.

* *Никифоров Олег Леонидович* — магистрант, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, e-mail: oleg_02.12.2002@mail.ru.

Nikiforov Oleg Leonidovich — Master's student, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University.

‡ *Мубараков Булат Газинурович* — кандидат технических наук, доцент кафедры системного анализа и информационных технологий, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, e-mail: mubbulat@mail.ru, ORCID: 0000-0002-7628-9870.

Mubarakov Bulat Gazinurovich — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of System Analysis and Information Technologies, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Архитектура и принцип работы

Конечное устройство формирует сообщение, а edge-узлы — более мощные компьютеры, например локальные шлюзы, — проверяют его и ведут реестр. Устройство освобождается от хранения цепочки и подтверждения блоков.

Устройство вычисляет хеш данных по алгоритму SHA-256 и передаёт его вместе со своим идентификатором, номером и временем события, длиной данных и кодом аутентификации HMAC. Хеш позволяет впоследствии проверить соответствие исходных данных сохранённой записи. В реестре фиксируется компактное представление события; полные измерения могут храниться отдельно.

Для аутентификации каждому устройству назначается индивидуальный секретный ключ, заранее доступный проверяющим узлам. HMAC защищает поля сообщения от незаметного изменения участником, не знающим ключа. Узел проверяет идентификатор устройства и код аутентификации; успешно проверенные сообщения поступают в очередь формирования блоков. Решение ориентировано на закрытую инфраструктуру с доверенными проверяющими узлами и защищёнными ключами: HMAC подтверждает владение общим секретом, а не служит публичной цифровой подписью.

Сообщения объединяются в блоки по порядку поступления. Каждый блок содержит ссылку на предыдущий, а дерево Меркла объединяет идентификаторы транзакций в общий контрольный хеш. В модели четыре узла проверяют сообщения, а для подтверждения блока требуются три голоса. Пакетная обработка позволяет выполнять подтверждение сразу для группы событий без дополнительного вычислительного поиска.

Через каждые десять блоков сохраняется локальный контрольный хеш состояния цепочки. Голосование моделируется внутри одной программы. Внешняя фиксация контрольных хешей для независимого аудита и проверка распределённой отказоустойчивости предусмотрены на следующем этапе.

3. Экспериментальная оценка

Прототип реализован на Python. Сравнение проводилось на одном и том же оборудовании, в одинаковых условиях выполнения. Оба режима обрабатывали по 5000 событий от 50 моделируемых устройств; размер блока составлял до 32 транзакций. В LWB-HMAC-edge использовались

четыре проверяющих узла. Все компоненты моделировались в одном процессе.

Контрольная модель сохраняла полные данные и использовала Proof-of-Work (PoW) — подтверждение блока посредством вычислительного поиска. Объём и состав записей различались в соответствии с архитектурой каждого режима. Оценивались время обработки всего набора событий и пропускная способность.

Таблица 1: Результаты сравнения программных конфигураций

Показатель	LWB-HMAC-edge	Контрольная модель
Время выполнения, с	1,004	16,312
Пропускная способность, событий/с	4980,52	306,53

В проведённом запуске пропускная способность прототипа оказалась выше в 16,25 раза, а время выполнения сократилось на 93,85%. Подтверждение блоков голосованием исключает такой поиск, а работа с хешами отделяет реестр от хранения полных измерений.

Результаты характеризуют программные конфигурации в целом, без выделения вклада отдельных механизмов. Сетевая задержка и энергопотребление датчиков требуют отдельных аппаратных измерений.

4. Заключение

Разработан прототип, объединяющий HMAC-аутентификацию, хранение хешей данных и пакетное подтверждение блоков. Конечное устройство формирует собственную запись, а ведение реестра выполняют доверенные edge-узлы.

Сравнение на одном оборудовании показало увеличение пропускной способности относительно выбранной контрольной модели. Дальнейшая работа направлена на испытания в распределённой сети и на микроконтроллерах, реализацию смены ключей и защиты от повторной передачи сообщений, а также подключение внешнего аудита состояния реестра.

Список литературы

[1] H.-N. Dai, Z. Zheng, Y. Zhang, “Blockchain for Internet of Things: A Survey”, *IEEE Internet of Things Journal*, **6**:5 (2019), 8076–8094. DOI: 10.1109/JIOT.2019.2920987.

[2] A. Dorri, S. S. Kanhere, R. Jurdak, P. Gauravaram, “LSB: A Lightweight Scalable BlockChain for IoT Security and Privacy”, arXiv: 1712.02969. DOI: 10.48550/arXiv.1712.02969.

[3] S. Panasenko, “A Lightweight Blockchain for the Internet of Medical Things Using Hash-based Message Authentication Codes”, *2023 International Wireless Communications and Mobile Computing (IWCMC)*, IEEE. DOI: 10.1109/IWCMC58020.2023.10182980, 2023, 1095–1100.

Статья поступила 9 октября 2026 г.

A Prototype Lightweight Blockchain Protocol for the Internet of Things with HMAC Protection and Edge Validation

O. L. Nikiforov, B. G. Mubarakov

A prototype lightweight blockchain protocol for the Internet of Things is developed. End devices generate messages containing a data hash and an HMAC authentication code, while trusted edge nodes verify messages and form blocks. This division transfers ledger maintenance to more capable nodes. In a comparison performed on the same hardware under identical execution conditions, the prototype processed 5000 events at 4980.52 events/s versus 306.53 for the control model.

Keywords: Internet of Things, blockchain, software prototype, HMAC, edge computing, Merkle tree.

References

[1] H.-N. Dai, Z. Zheng, Y. Zhang, “Blockchain for Internet of Things: A Survey”, *IEEE Internet of Things Journal*, **6**:5 (2019), 8076–8094. DOI: 10.1109/JIOT.2019.2920987.

[2] A. Dorri, S. S. Kanhere, R. Jurdak, P. Gauravaram, “LSB: A Lightweight Scalable BlockChain for IoT Security and Privacy”, arXiv: 1712.02969. DOI: 10.48550/arXiv.1712.02969.

[3] S. Panasenko, “A Lightweight Blockchain for the Internet of Medical Things Using Hash-based Message Authentication Codes”, *2023 International Wireless Communications and Mobile Computing (IWCMC)*, IEEE. DOI: 10.1109/IWCMC58020.2023.10182980, 2023, 1095–1100.

Received on October 9, 2026

Правильные семейства булевых функций с симметрическим слагаемым

М. А. Осипова*

Рассматривается обобщение известного квадратично-линейного семейства булевых функций: к линейной треугольной части добавляется произвольная симметрическая булева функция от всех переменных, кроме одноимённой. Доказано, что такое семейство является правильным и имеет максимально возможную мощность образа. Тем самым новое семейство сохраняет ключевое свойство известного частного случая.

Ключевые слова: правильное семейство функций, булевы функции, симметрическая функция, квазигруппа, мощность образа.

1. Введение

Квазигруппы — аналоги групп без требования ассоциативности — активно рассматриваются как структуры для построения криптографических примитивов: многие известные атаки существенно используют ассоциативность. Прямое табличное задание квазигруппы большого порядка практически неэффективно, поэтому естественным является переход к функциональному заданию квазигруппы.

Один из таких подходов предложен В. А. Носовым [1] и основан на *правильных семействах функций*. Семейство функций задаёт параметрический класс латинских квадратов, а условие правильности является необходимым и достаточным условием того, что получаемая операция является квазигрупповой при произвольном выборе параметрических функций.

В работе рассматривается обобщение известного квадратично-линейного семейства: к линейной треугольной части добавляется произвольная симметрическая булева функция от всех переменных, кроме одноимённой. Основной результат: такое семейство является правильным и имеет максимально возможную мощность образа.

* *Осипова Марина Андреевна* — студентка каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: marina-a-o@yandex.ru.

Osipova Marina Andreevna — student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Основные понятия и известные результаты

Определение 1. Конечная n-квазигруппа ($n \geq 2$) — пара (Q, f), где Q — конечное множество, а $f\colon Q^n \to Q$ является биекцией при произвольной фиксации любых $n-1$ переменных.

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, P_k^m — множество всех дискретных функций m аргументов $f\colon E_k^m \to E_k$.

Определение 2. Семейство $G = (g_1, \ldots, g_m)$, $g_i \in P_k^m$, называется *правильным*, если для любой пары различных $s, t \in E_k^m$ найдётся индекс i, $1 \leq i \leq m$, такой, что $s_i \neq t_i$, но $g_i(s) = g_i(t)$.

В работе [2] предложен способ порождения n-квазигрупп с помощью правильных семейств; доказано, что конструкция порождает не менее M^{k^n} попарно различных n-квазигрупп, где M — мощность образа правильного семейства. Поэтому мощность образа является важной характеристикой.

Квадратично-линейное семейство. Пусть $k = 2$. Известно, что для любого $m \geq 1$ семейство

$$f_s(x_1, \ldots, x_m) = \bigoplus_{i<s} x_i \ \oplus \bigoplus_{\substack{1\leq i<j\leq m \\ i,j\neq s}} x_i x_j, \qquad s = 1, \ldots, m,$$

является правильным [3] и имеет максимальную возможную мощность образа 2^{m-1} [2].

Логичным шагом является обобщение этой конструкции: добавление к линейной треугольной части произвольной симметрической функции от $m-1$ переменной.

Определение 3. Для $l \geq 0$ булева функция $H\colon \{0,1\}^l \to \{0,1\}$ называется *симметрической*, если существует функция $h\colon \{0, \ldots, l\} \to E_2$ такая, что для всякого $z = (z_1, \ldots, z_l) \in \{0,1\}^l$

$$H(z) = h(|z|), \qquad |z| = z_1 + \cdots + z_l$$

(сумма понимается как обычное целое число).

3. Основные результаты

Теорема 1 (Правильность)**.** *Пусть $m \geq 1$, и пусть $H\colon \{0,1\}^{m-1} \to \{0,1\}$ — произвольная симметрическая булева функция. Для $s = 1, \ldots, m$*

зададим

$$f_s(x_1,\dots,x_m) = \bigoplus_{i<s} x_i \ \oplus \ H(x_1,\dots,x_{s-1},x_{s+1},\dots,x_m).$$

Тогда семейство $F = (f_1,\dots,f_m)$ является правильным.

Теорема 2 (Максимальная мощность образа)**.** *В условиях теоремы 1*

$$|\operatorname{Im} F| = 2^{m-1}.$$

В частности, мощность образа – максимально возможная среди правильных булевых семейств размера m.

4. Заключение

Доказано, что семейство булевых функций, получаемое добавлением произвольной симметрической функции от $m-1$ переменной к линейной треугольной части, является правильным (теорема 1) и имеет максимально возможную мощность образа 2^{m-1} (теорема 2). Тем самым новое семейство сохраняет ключевое свойство известного квадратично-линейного частного случая. Полученные результаты дают новые примеры правильных семейств, пригодные для функционального задания квазигрупп большого порядка, и могут быть использованы в конструкции порождения n-квазигрупп.

Направление дальнейшей работы – обобщение конструкции для функций k-значной логики.

Список литературы

[1] Носов В. А., “О построении классов латинских квадратов в булевой базе данных”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **4**:3–4 (1999), 307–320.

[2] Галатенко А. В., Носов В. А., Панкратьев А. Е., Царегородцев К. Д., “О порождении n-квазигрупп с помощью правильных семейств функций”, *Дискретная математика*, **35**:1 (2023), 35–53. DOI: 10.4213/dm1749.

[3] Царегородцев К. Д., “О свойствах правильных семейств булевых функций”, *Дискретная математика*, **33**:1 (2021), 91–102. DOI: 10.4213/dm1634.

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

Proper families of Boolean functions with a symmetric summand

M. A. Osipova

We consider a generalization of the well-known quadratic-linear family of Boolean functions: an arbitrary symmetric Boolean function of all variables except the one with the same index is added to the linear triangular part. It is proved that this family is proper and has the maximum possible image cardinality. Thus, the new family preserves the key property of the known particular case.

Keywords: proper family of functions, Boolean functions, symmetric function, quasigroup, image cardinality.

References

[1] Nosov V. A., "On the construction of classes of Latin squares in a Boolean database", *Intellektual'nye Sistemy*, **4**:3–4 (1999), 307–320 (In Russian).

[2] Galatenko A. V., Nosov V. A., Pankratiev A. E., Tsaregorodtsev K. D., "Generation of n-quasigroups using proper families of functions", *Discrete Mathematics and Applications*, **35**:4 (2025), 203–217. DOI: 10.1515/dma-2025-0015.

[3] Tsaregorodtsev K. D., "Properties of proper families of Boolean functions", *Discrete Mathematics and Applications*, **32**:5 (2022), 369–378. DOI: 10.1515/dma-2022-0030.

Received on November 8, 2026

Квантовые и классические алгоритмы для задачи о кратчайшей общей надстроке с множественными вхождениями и запросами

К. Р. Хадиев*, Р. И. Капралов‡, А. Р. Иликаев§

Рассматривается задача SUM-SCS: по словарю из n строк построить кратчайшую строку, содержащую не менее k вхождений строк словаря. Изучается версия с множественными запросами (MSUM-SCS): для одного словаря нужно найти длины кратчайших надстрок для m количеств вхождений $k_1, \ldots, k_m$. Рассматривается случай, когда строки словаря не являются подстроками друг друга (бесфакторный случай). Предложены квантовый алгоритм со сложностью $O^*(mn^{1.5} \log k_{\max} + n^{2.5} \log k_{\max} + L)$ и классический со сложностью $O^*(mn^2 \log k_{\max} + n^3 \log k_{\max} + L)$. Здесь L — суммарная длина строк, $k_{\max} = \max_{1 \le r \le m} k_r$, обозначение O^* скрывает не только константу, но и полилогарифмическую функцию, т.е. полином от $\log m, \log n, \log \log k_{\max}, \log L$.

Ключевые слова: строки, квантовые алгоритмы, запросная сложность, кратчайшая общая надстрока.

1. Введение

Задача о кратчайшей общей надстроке (SCS) NP-трудна и связана со сборкой ДНК из коротких фрагментов, но не учитывает многократные вхождения фрагментов. Сформулируем версию задачи с k вхождениями

* *Хадиев Камиль Равилевич* — доцент, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, e-mail: kamilhadi@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5151-9908.

Khadiev Kamil Ravilevich — Assistant professor, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University.

‡ *Капралов Руслан Илнарович* — аспирант, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, e-mail: kapralov_ruslan@mail.ru.

Kapralov Ruslan Ilnarovich — PhD student, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University.

§ *Иликаев Артём Рашитович* — аспирант, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, e-mail: artemka.tema1998@gmail.com.

Ilikaev Artyom Rashitovich — PhD student, Institute of Computational Mathematics and Information Technologies, Kazan Federal University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

(SUM-SCS) формально. Пусть имеется n строк $S = (s^1, \ldots, s^n)$. Требуется построить кратчайшую строку t (называемую надстрокой) такую, что $\sum_{i=1}^{n} occ(t, s^i) \geq k$, где $occ(t, s^i)$ — это количество вхождений строки s^i в строку t в качестве подстроки. В этой постановке задачи нас интересуют только длина строки и сама строка t.

Рассматривается случай, когда строки словаря не являются подстроками друг друга (бесфакторный случай), известен алгоритм [1] с временной сложностью $O(n^3 \log k + L)$ в случае, если нужно определить длину результирующей строки, и $O(n^3 \log k + L + \ell)$, если нужно найти саму строку, где ℓ — длина результирующей строки. В данной работе предложен квантовый алгоритм со сложностью $O^*(n^{2.5} \log k + L)$ в случае, если нужно найти длину строки, и $O^*(n^{2.5} \log k + L + \ell)$, если нужно найти саму строку.

Для версии задачи с множественными запросами (MSUM-SCS) нужно ответить на m запросов $k_1, \ldots, k_m$ (вариант задачи, когда нужно найти только длину строки). Независимые запуски выполняются со сложностью $O^*(mn^{2.5} \log k_{\max} + L)$ в квантовом случае. В работе показывается, что, используя предварительную обработку, для каждого k_i результат можно посчитать со сложностью $O^*(n^{1.5} \log k_{\max})$.

В рамках данной работы предполагается, что имеется оракул для доступа к символам входной строки и к данным о построенном графе (ребра и вершины). В работе сформулированы оценки запросной сложности в терминах запросов к такому оракулу. В то же время, квантовые алгоритмы, базирующиеся на алгоритме Гровера, имеют временную сложность отличающуюся от запросной на логарифмический множитель [4]. В данном случае, наш алгоритм использует модификации алгоритма Гровера.

2. Квантовый алгоритм для SUM-SCS

Строится полный взвешенный ориентированный граф перекрытий с вершинами $v_1, \ldots, v_n$, где вершина v_i соответствует строке s^i. Вес ребра (v_i, v_j) равен $w(i, j) = |s^j| - r(i, j)$, где $r(i, j)$ — длина наибольшего суффикса s^i, совпадающего с префиксом s^j. При этом суффикс не должен совпадать с самой строкой, т.е. $|s^j| \neq r(i, j)$. Граф строится за $O(L+n^2)$ [3]. Путь $P = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$ с повторами задаёт строку длины $|s^{i_1}| + w(P)$, составленную из строк $s^{i_1}, \ldots, s^{i_k}$ с максимальным перекрытием соседних (заданным весом ребер). Здесь $w(P)$ — суммарный вес ребер пути P. Путь, состоящий из k вершин и минимизирующий $|s^{i_1}| + w(P)$, дает решение задачи SUM-SCS в бесфакторной версии. Его можно найти с помощью

матрицы $W^{\boxplus(k-1)}$ — мин-плюс степени матрицы W с показателем $k-1$ (при $k=1$ используется единичная матрица мин-плюс алгебры). Здесь $(A \boxplus B)[i,j] = min\{A[i,q] + B[q,j] : 1 \leq q \leq n\}$ для $1 \leq i,j \leq n$. В работе предлагается выполнить данную операцию с помощью квантового алгоритма поиска минимума [2]. Общая сложность выполнения одной операции в квантовом случае составляет $O^*(n^{2.5})$, а для $O(\log k)$ операций умножения составляет $O^*(n^{2.5}\log k)$, используя технику быстрого возведения в степень. В случае построения самой строки к сложности добавляется слагаемое $O(\ell)$, где ℓ — длина результирующей строки.

3. Алгоритм для MSUM-SCS

В случае задачи MSUM-SCS предварительно считается набор матриц W^{2^p} для $p \in \{0, \ldots, \lceil \log_2 k_{max} \rceil\}$. Они используются для вычислений каждого числа вхождений $k_1, \ldots, k_m$.

Задача решается детерминированным алгоритмом с временной сложностью $O^*(mn^2 \log k_{\max} + n^3 \log k_{\max} + L)$ и квантовым алгоритмом с временной и запросной сложностью $O^*(mn^{1.5} \log k_{\max} + n^{2.5} \log k_{\max} + L)$.

Для малых значений k решение базируется на методе динамического программирования. Пусть $D(h,v)$ — минимальная длина строки для пути из h вершин, оканчивающегося в v, тогда $D(h,v) = \min_u\{D(h-1,u) + W[u,v]\}$. Функция вычисляется один раз до $h = k_{\max}$, а ответ на запрос k_r равен $\min_v D(k_r, v)$. В квантовом случае минимум ищем квантовым алгоритмом поиска минимума [2].

В этом случае временная сложность детерминированного алгоритма составляет $O^*(mn + n^2 k_{\max} + L)$. Временная и запросная сложность квантового алгоритма составляет $O^*(m\sqrt{n} + n^{1.5} k_{\max} + n^2 + L)$.

4. Заключение

Было получено полиномиальное ускорение в квантовых алгоритмах по сравнению с классическими, а также решена более общая задача, чем рассматриваемая ранее.

Финансирование:

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 25-11-00366.

Список литературы

[1] M. Crochemore, M. Cygan, C. Iliopoulos, M. Kubica, J. Radoszewski, W. Rytter, T. Waleń, "Algorithms for three versions of the shortest common superstring prob-

lem", *Combinatorial Pattern Matching (CPM 2010)*, Lecture Notes in Computer Science, **6129**, Springer, 2010, 299–309. DOI: 10.1007/978-3-642-13509-5_27.

[2] C. Dürr, M. Heiligman, P. Høyer, M. Mhalla, "Quantum query complexity of some graph problems", *SIAM Journal on Computing*, **35**:6 (2006), 1310–1328. DOI: 10.1137/050644719.

[3] D. Gusfield, G. M. Landau, B. Schieber, "An efficient algorithm for the all pairs suffix-prefix problem", *Information Processing Letters*, **41**:4 (1992), 181–185. DOI: 10.1016/0020-0190(92)90176-v.

[4] L. Grover, "Trade-offs in the quantum search algorithm", *Physical Review A*, **66**:5 (2002), 052314. DOI: 10.1103/PhysRevA.66.052314.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Quantum and classical algorithms for the multiple query version of the uniform multiple occurrences shortest common superstring problem

K. R. Khadiev, R. I. Kapralov, A. R. Ilikaev

We consider the SUM-SCS problem: given a dictionary of n strings, construct a shortest string containing at least k occurrences of dictionary strings. We study the multiple query version (MSUM-SCS): for a fixed dictionary, find the lengths of shortest superstrings for m values $k_1, \ldots, k_m$. We consider the factor-free case when non of the strings can be substring of any another. We present a quantum algorithm with $O^*(mn^{1.5} \log k_{\max} + n^{2.5} \log k_{\max} + L)$ complexity, a classical one with $O^*(mn^2 \log k_{\max} + n^3 \log k_{\max} + L)$ complexity. Here L is the total length of the strings, $k_{\max} = \max_{1 \le r \le m} k_r$, and O^* notation hides not only a constant, but also polylogarithmic multiple, i.e. a polynomial on $\log m, \log n, \log \log k_{\max}, \log L$.

Keywords: strings, quantum algorithms, query complexity, shortest common superstring.

Received on November 9, 2026

Остаточная запутанность после локальных проективных измерений

И. А. Чадов*

Исследуется устранение остаточной запутанности локальными проективными измерениями. Для четырёхкубитной GHZ–W-суперпозиции построен адаптивный протокол измерения двух кубитов, оставляющий сепарабельную пару при каждом исходе. Для любых фиксированных локальных базисов доказана положительная нижняя оценка энтропийного индекса робастности.

Ключевые слова: квантовая запутанность, проективные измерения, GHZ, W.

1. Постановка задачи

В работе исследуется влияние ограничений на измерительный протокол для чистой N-кубитной системы. Измеряется набор K из $m = 1, 2$ кубитов; R — остальные $r = N - m \geq 2$ кубитов. Выбор локальных базисов P задаёт ансамбль условных состояний $\{p_\mu, |\psi_\mu\rangle\}$; учитываются все исходы с $p_\mu > 0$. Положим $\rho_A = \mathrm{Tr}_{R\setminus A}|\psi\rangle\langle\psi|$, $\mathcal{A} = \{A \subset R : 1 \leq |A| \leq \lfloor r/2 \rfloor\}$ и

$$F(\psi) = \frac{\sum_{A\in\mathcal{A}} S(\rho_A)}{\sum_{A\in\mathcal{A}} |A|}, \qquad S(\rho) = -\,\mathrm{Tr}\,\rho \log_2 \rho,$$
$$R_S = \binom{N}{m}^{-1} \sum_{|K|=m} \min_P \sum_\mu p_\mu F(\psi_\mu). \tag{1}$$

Минимум берётся по достижимым ансамблям для каждого K, затем усредняется по K. Для сравнения Negativity индекс [2] усредняет по тем же K величину $\mathcal{N}_{\mathrm{loss}}(K) = |\mathcal{A}|^{-1} \sum_A (\|\rho_R^{T_A}\|_1 - 1)/2$, где $\rho_R = \mathrm{Tr}_K|\Psi\rangle\langle\Psi|$, T_A — частичное транспонирование, $\|\cdot\|_1$ — следовая норма.

2. Измерение одного кубита

Объект исследования — семейство $|\Psi_N(\alpha)\rangle = \alpha|\mathrm{GHZ}_N\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|W_N\rangle$, $0 \leq \alpha \leq 1$, где $|\mathrm{GHZ}_N\rangle = (|0^N\rangle + |1^N\rangle)/\sqrt{2}$,

* *Чадов Иван Алексеевич* — аспирант, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Москва, Россия; научный руководитель — Чернявский Андрей Юрьевич, e-mail: i.chadov@mail.ru, ORCID: 0009-0000-4347-7333.

Chadov Ivan Alekseevich — PhD student, National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russia; supervisor: Andrey Yu. Chernyavskiy.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

$|W_N\rangle = N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}|0\ldots1_j\ldots0\rangle$. По перестановочной симметрии все наборы K одного размера эквивалентны. Для $N=3$ минимум средней меры запутанности Concurrence достижим проективным измерением с равными значениями в обеих ветвях [4]. Выпуклость и возрастание функции Вуттерса [1] дают следствие известного результата:

$$R_S = \mathcal{E}(C_3), \quad C_3 = \left|\frac{2(1-\alpha^2)}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\right|. \tag{2}$$

Здесь C_3 — Concurrence редукции, $\mathcal{E}(c) = h_2((1+\sqrt{1-c^2})/2)$, $h_2(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ — бинарная энтропия Шеннона в битах. Оба индекса равны нулю при $\alpha = \sqrt{2/5}$ и 1; при внутреннем нуле исходное состояние запутанно, а условные пары могут быть сепарабельны. Для $N = 4, 5$ $R_S > 0$ при $\alpha < 1$ [3]: ненулевая W-компонента препятствует полному устранению запутанности одним измерением.

3. Два последовательных измерения

При $N = 4, m = 2$ фиксированный протокол задаёт базисы заранее, адаптивный выбирает второй по первому исходу; допускаются оба порядка измерений. Для максимизации средней Concurrence адаптация не улучшает оптимум локальных проективных измерений [5]. Ниже доказано её строгое преимущество при минимизации.

Бра-векторы u, v задают ненормированную матрицу амплитуд пары:

$$M(u,v) = \begin{pmatrix} au_0v_0 + b(u_0v_1 + u_1v_0) & bu_0v_0 \\ bu_0v_0 & au_1v_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $a = \alpha/\sqrt{2}$, $b = \sqrt{1-\alpha^2}/2$, $p_\mu = \mathrm{Tr}(M_\mu M_\mu^\dagger)$, $C_\mu = 2|\det M_\mu|/p_\mu$; минимизируется $J = \sum_\mu p_\mu \mathcal{E}(C_\mu)$.

Фиксированные базисы. При $\alpha = \alpha_* = 1/\sqrt{3}$ пусть n, m — единичные оси Блоха двух измерений, $D_\mu = \det M_\mu$ и $x = (n_x m_x, (n_x m_z + n_z m_x)/\sqrt{2}, n_y m_y, n_z m_z)^T$. Раскрытие определителей даёт тождество

$$288\sum_\mu |D_\mu|^2 = x^T B x + 6(1-\|x\|^2) + Q,\ B = \begin{pmatrix} 8 & -4\sqrt{2} & -1 & -1 \\ -4\sqrt{2} & 9 & 3\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 3\sqrt{2} & 8 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

где остаток явно неотрицателен:

$$\begin{aligned} Q = {} & \tfrac{1}{2}(n_x m_z - n_z m_x)^2 + [m_y(n_x+n_z) + n_y(m_x+m_z)]^2 \\ & + m_y^2(n_x-n_z)^2 + n_y^2(m_x-m_z)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Вектор x содержит ортогональные компоненты единичного тензора $n \otimes m$, поэтому $\|x\| \le 1$. По критерию Сильвестра $B - \frac{4}{3} I \succ 0$, откуда $288 \sum_\mu |D_\mu|^2 \ge \frac{4}{3}\|x\|^2 + 6(1 - \|x\|^2) \ge \frac{4}{3}$. Выпуклость и возрастание $\mathcal{E}$ дают

$$J \ge \mathcal{E}\left(2 \sum_\mu |D_\mu|\right) \ge \mathcal{E}\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) \approx 0{,}04. \tag{4}$$

Граница для $R_S^{\mathrm{fix}}(\alpha_*)$ охватывает все комплексные базисы.

Адаптивный протокол. При α_* первый базис равен $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$. После + второй базис задают $q_0 = (c, s)^T$, $q_1 = (-s, c)^T$, где $c = \cos(\pi/8)$, $s = \sin(\pi/8)$. После − используются $y_\pm = (1, \pm i)^T/\sqrt{2}$. По (3) конечные состояния равны $q_0^{\otimes 2}, q_1^{\otimes 2}, y_+^{\otimes 2}, y_-^{\otimes 2}$ с вероятностями $(2 + \sqrt{2})/6, (2 - \sqrt{2})/6, 1/6, 1/6$. Все они сепарабельны, поэтому $R_S^{\mathrm{adapt}}(\alpha_*) = 0$.

Численные оценки. Базис $\{(\sqrt{5}|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{6}, (|0\rangle - \sqrt{5}|1\rangle)/\sqrt{6}\}$ на обоих кубитах даёт $R_S^{\mathrm{fix}}(\alpha_*) \le U \approx 0{,}23$, где U вычисляется по (3). Для рис. 1б использован метод Пауэлла (SciPy): четыре/шесть углов фиксированного/адаптивного протокола, сетка $\{k/999 : k = 0, \ldots, 999\} \cup \{\alpha_*\}$, `xtol`$= 10^{-9}$, `ftol`$= 10^{-11}$. До шести стартов, до 18 каждые 40 узлов и в начале каждого из четырёх блоков; решение переносится внутри блока.

Ось базиса задаётся $n = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$; исходы $0, 1$ соответствуют $\pm n$.

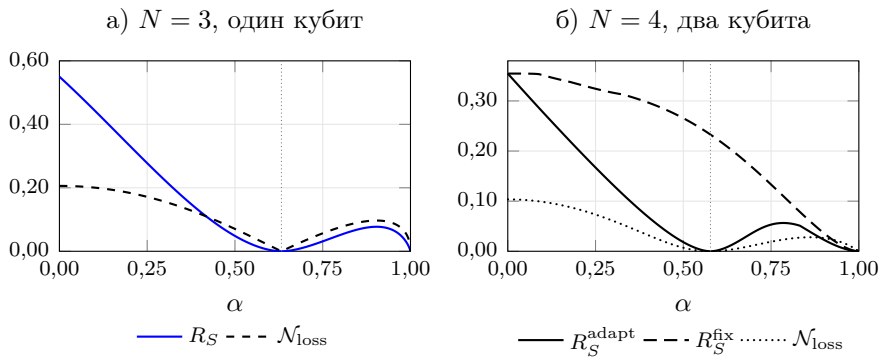


Рис. 1: Энтропийный индекс робастности и Negativity индекс при измерении: а) одного кубита ($N = 3$); б) двух кубитов ($N = 4$), фиксированный и адаптивный протоколы.

Список литературы

[1] W. K. Wootters, “Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:10 (1998), 2245–2248. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.2245.

[2] G. Vidal, R. F. Werner, “Computable measure of entanglement”, *Phys. Rev. A*, **65**:3 (2002), 032314. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.032314.

[3] A. Neven, J. Martin, T. Bastin, “Entanglement robustness against particle loss in multiqubit systems”, *Phys. Rev. A*, **98**:6 (2018), 062335. DOI: 10.1103/PhysRevA.98.062335.

[4] L. Roa, A. Muñoz, C. Muñoz, A. B. Klimov, “Deterministic entanglement extraction”, *Phys. Rev. A*, **99**:5 (2019), 052344. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.052344.

[5] T. Laustsen, F. Verstraete, S. J. van Enk, “Local vs. Joint Measurements for the Entanglement of Assistance”, *Quantum Inf. Comput.*, **3**:1 (2003), 64–83. DOI: 10.26421/QIC3.1-6 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Residual entanglement after local projective measurements

I. A. Chadov

For a four-qubit GHZ–W superposition, adaptive local projective measurements of two qubits yield a separable pair for every outcome. For all fixed local bases, we prove a strictly positive lower bound on its entropic robustness index.

Keywords: quantum entanglement, projective measurements, GHZ, W.

Received on October 24, 2026

Оценка количества n-квазигрупп на выходе алгоритма изотопного преобразования, гарантирующего криптографические свойства

С. С. Чаплыгина*

В работе рассматриваются n-квазигруппы в контексте свойств, важных для криптографических приложений. Для параметризованного семейства изотопных преобразований приводится оценка числа различных n-квазигрупп, получаемых из данной n-квазигруппы применением различных преобразований семейства.

Ключевые слова: n-квазигруппа, изотопия, полиномиальная полнота, простота, неаффинность, подквазигруппа.

1. Введение

Квазигруппы и их многомерные обобщения (n-квазигруппы) являются перспективным направлением в современной криптографии. Обзор алгоритмов на основе квазигрупп приведен, например, в работе [1]. Структуры большей арности, то есть n-квазигруппы, также востребованы исследователями, в качестве примера можно привести работу [2].

Для исследователей зачастую интересны квазигруппы и n-квазигруппы, обладающие определенным набором свойств, помогающим обеспечить стойкость для криптографических алгоритмов. Одним из важнейших свойств является полиномиальная полнота квазигрупп, предложенная В.А. Артамоновым и соавторами в работе [3]. Данное понятие переносится и на случай n-квазигрупп. Как было показано в работе [4], полиномиальная полнота эквивалентна одновременной простоте и неаффинности n-квазигруппы порядка $k \geq 5$. Еще одним примечательным свойством является отсутствие собственных подквазигрупп у n-квазигруппы. Данное свойство также рассматривалось В.А. Артамоновым и соавторами [5].

* *Чаплыгина Светлана Сергеевна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: svetlana.chaplygina@math.msu.ru, ORCID: 0009-0002-4355-6706.

Chaplygina Svetlana Sergeevna — Postgraduate Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Для практических применений необходимо уметь получать n-квазигруппы, обладающие описанными выше свойствами. Одним из способов является преобразование данной n-квазигруппы в n-квазигруппу, обладающую особыми свойствами. В работе [6] было анонсировано семейство алгоритмов изотопного преобразования данной n-квазигруппы в полиномиально полную, простую и неаффинную n-квазигруппу без собственных подквазигрупп. Выбор конкретного алгоритма из семейства осуществлялся за счет параметризации.

В данной работе приводится оценка числа попарно различных n-квазигрупп на выходе семейства изотопных преобразований при варьировании параметров алгоритма.

2. Основные определения и результаты

Определение 1. Назовем конечной n-квазигруппой порядка $k \in \mathbb{N}$ такое множество $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ с n-арной операцией $f\colon Q^n \to Q$, что для любых элементов $x_1, \ldots, x_n, y \in Q$ для любого i уравнение

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) = y$$

однозначно разрешимо. Другими словами, операция f обратима по каждому аргументу.

В дальнейшем речь в работе пойдёт об исследовании случая конечных n-квазигрупп, поэтому здесь и далее под термином "n-квазигруппа" будет подразумеваться "конечная n-квазигруппа", если не сказано иное.

Определение 2. Будем называть n-квазигруппы (Q, f) и (Q, g) порядка k изотопными, если существуют перестановки $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ на Q, для которых выполнено тождество

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma(g(\sigma_1(x_1), \ldots, \sigma_n(x_n))).$$

В терминах таблиц умножения изотопия означает перестановку $(n-1)$-мерных слоёв и переименование элементов.

Без ограничения общности можно считать, что $Q = E_k$. Рассмотрим n-квазигрупповую операцию f как функцию k-значной логики. Обозначим через P_k множество всех функций k-значной логики, а через P_k^0 множество всех констант. Обозначим через $[A]$ для множества функций $A \subseteq P_k$ множество всех функций из P_k, которые можно получить из множества A с помощью операций суперпозиции.

Определение 3. Назовем n-квазигруппу (E_k, f) полиномиально полной, если выполнено равенство $\left[\{f\} \cup P_k^0\right] = P_k$.

Определение 4. Собственной подквазигруппой n-квазигруппы (E_k, f) называется пара (Q', f'), где Q' — собственное подмножество E_k, замкнутое относительно квазигрупповой операции f, а операция f' является сужением f на множество $Q' \times \ldots \times Q'$.

Определение 5. Назовём n-квазигруппу простой, если она не сохраняет ни одного нетривиального отношения эквивалентности.

Определение 6. Квазигруппа называется аффинной, если найдётся абелева группа $(E_k, +)$, автоморфизмы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ этой группы и константа $c \in E_k$, для которых выполнено тождество $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \alpha_1(x_1) + \ldots + \alpha_n(x_n) + c$.

В работе [6] было анонсировано семейство изотопных преобразований, гарантирующее выполнение приведенных выше свойств для выходной n-квазигруппы порядка $k \geq 5$ для $n \geq 3$. Данный алгоритм можно представить как последовательное применение трех шагов, каждый из которых является изотопией. Первые два шага определяют перестановки из множества $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ перестановок из определения изотопии. Третий шаг определяет перестановку-переименование σ.

Было показано, что для фиксированной n-квазигруппы и для произвольной фиксированной параметризации первых двух шагов при варьировании перестановки σ в рамках алгоритма n-квазигруппы на выходе преобразования будут попарно различны. Была получена следующая оценка числа n-квазигрупп после применения алгоритма:

Утверждение 1. *Пусть (E_k, f) n-квазигруппа порядка $k \geq 5$ для $n \geq 3$. Количество попарно различных n-квазигрупп после применения алгоритма изотопного преобразования к n-квазигруппе (E_k, f) при различном выборе параметров алгоритма не меньше $\left(\frac{k-1}{6}\right)^{\frac{k-1}{2}}$.*

Список литературы

[1] V. A. Shcherbacov, “Quasigroups in cryptology”, *Computer Science Journal of Moldova*, **17**:2(50) (2009), 193–228.

[2] Y. Cheng, Y. Xu, “Stream cipher based on Latin cubes”, *Proceedings of the First International Conference on Information Science and Electronic Technology*, 2015, 137–140. DOI: 10.2991/iset-15.2015.35.

[3] V. A. Artamonov, S. Chakrabarti, S. K. Pal, “Characterizations of highly non-associative quasigroups and associative triples”, *Quasigroups and Related Systems*, **25**:1 (2017), 1–19.

[4] S. S. Chaplygina, A. V. Galatenko, “Polynomial completeness and completeness of finite n-quasigroups”, *Quasigroups and Related Systems*, **32**:2 (2024), 207–223.

[5] В. А. Артамонов, С. Чакрабарти, Ш. К. Тивари, В. Т. Марков, "Алгебраические свойства подквазигрупп и построение конечных квазигрупп", *Алгебра и логика*, **61**:4 (2022), 375–400.

[6] С. С. Чаплыгина, "Изотопные преобразования n-квазигрупп, улучшающие криптографические свойства", принято к публикации, *Международная конференция Мальцевские чтения. Тезисы докладов*, 2026.

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

An estimate for the number of n-quasigroups at the output of the isotopic transformation algorithm, which guarantees cryptographic properties

S. S. Chaplygina

The paper considers n-quasigroups in the context of properties relevant to cryptographic applications. For a parameterized family of isotopic transformations, an estimate is given for the number of distinct n-quasigroups obtained from a given n-quasigroup by applying different transformations of the family.

Keywords: n-quasigroup, isotopy, polynomial completeness, simplicity, non-affineness, subquasigroup.

References

[1] V. A. Shcherbacov, "Quasigroups in cryptology", *Computer Science Journal of Moldova*, **17**:2(50) (2009), 193–228.

[2] Y. Cheng, Y. Xu, "Stream cipher based on Latin cubes", *Proceedings of the First International Conference on Information Science and Electronic Technology*, 2015, 137–140. DOI: 10.2991/iset-15.2015.35.

[3] V. A. Artamonov, S. Chakrabarti, S. K. Pal, "Characterizations of highly non-associative quasigroups and associative triples", *Quasigroups and Related Systems*, **25**:1 (2017), 1–19.

[4] S. S. Chaplygina, A. V. Galatenko, "Polynomial completeness and completeness of finite n-quasigroups", *Quasigroups and Related Systems*, **32**:2 (2024), 207–223.

[5] V. A. Artamonov, S. Chakrabarti, S. K. Tiwari, V. T. Markov, "Algebraic Properties of Subquasigroups and Construction of Finite Quasigroups", *Algebra and Logic*, **61**:4 (2022), 251–270. DOI: 10.1007/s10469-023-09695-1.

[6] S. S. Chaplygina, "Isotopic transformations of n-quasigroups improving cryptographic properties", accepted for publication, *International Conference "Mal'tsev Readings". Book of Abstracts*, 2026 (In Russian).

Received on November 6, 2026

О решении задач бинарной оптимизации с использованием алгоритма QAOA

А. Ю. Чернявский*, Б. И. Бантыш‡, Д. А. Куликов§, Е. О. Киктенко¶

Рассматривается решение задачи QUBO с использованием QAOA с фиксированными параметрами и числом слоев, линейно растущим с размером задачи. Результаты численного эксперимента показывают, что при увеличении размера задачи медианное число запусков схемы, необходимое для получения решения с заданным коэффициентом аппроксимации, вопреки ожиданию не возрастает. В ходе анализа запутанности обнаружено неожиданное убывание её пикового значения с ростом глубины. На основе этого наблюдения построен полностью классический квантово-вдохновлённый алгоритм, в котором запутанность отсутствует. На тестовых наборах GSet MaxCut размером до 20 000 переменных отношение найденного разреза к наилучшему известному превышает 0.95 в подавляющем большинстве случаев.

Ключевые слова: QAOA, QUBO, MaxCut, фиксированные параметры, запутанность.

Многие задачи дискретной оптимизации — включая поиск максимального разреза графа, задачи размещения и планирования — сводятся к задаче оптимизации квадратичной бинарной функции без ограничений (QUBO):

$$z^* = \arg\min_{z\in\{\pm1\}^n} C(z), \qquad C(z) = \sum_{i<j} s_{ij} z_i z_j + \sum_i s_{ii} z_i. \tag{1}$$

* *Чернявский Андрей Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Российский квантовый центр, e-mail: a.chernyavskii@rqc.ru, ORCID: 0000-0001-8768-5855.

Chernyavskiy Andrey Yurievich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Russian Quantum Center.

‡ *Бантыш Борис Игоревич* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Российский квантовый центр, e-mail: b.bantysh@rqc.ru, ORCID: 0000-0003-3533-787X.

Bantysh Boris Igorevich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Russian Quantum Center.

§ *Куликов Денис Александрович* — младший научный сотрудник, Российский квантовый центр, e-mail: d.kulikov@rqc.ru, ORCID: 0009-0007-9700-9683.

Kulikov Denis Alexandrovich — Junior Researcher, Russian Quantum Center.

¶ *Киктенко Евгений Олегович* — канд. физ.-мат. наук, мл. рук. науч. группы, Российский квантовый центр, e-mail: e.kiktenko@rqc.ru, ORCID: 0000-0001-5760-441X.

Kiktenko Evgeniy Olegovich — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Junior Principal Investigator, Russian Quantum Center.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Здесь $s_{ij} \in \mathbb{R}$ — коэффициенты задачи, n — число бинарных переменных.

Один из подходов к решению таких задач — квантовый алгоритм приближённой оптимизации (QAOA) [1]. Он формирует параметризованное квантовое состояние

$$|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\rangle = \prod_{\ell=1}^{p} e^{-i\beta_\ell H_M} e^{-i\gamma_\ell H_P} |+\rangle^{\otimes n}, \tag{2}$$

где H_P — диагональный гамильтониан задачи, такой что $H_P|z\rangle = C(z)|z\rangle$, $H_M = \sum_i \sigma_x^{(i)}$ — смешивающий гамильтониан, p — число слоев схемы, а $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^p$ — вариационные параметры.

Наиболее распространённая реализация QAOA предполагает гибридную квантово-классическую оптимизацию: схема запускается многократно, по результатам измерений оценивается целевая функция, а параметры обновляются классическим оптимизатором. С ростом глубины ландшафт оптимизации усложняется, а бесплодные плато и статистический шум существенно затрудняют настройку параметров [2]. Альтернатива — QAOA с фиксированными параметрами (fpQAOA) [3]: параметры подбираются один раз на малых задачах, а затем применяются к задачам произвольного размера.

Рассматривается режим fpQAOA с глубиной $p = n$ и тремя ключевыми элементами [4]: обучение по вероятности достижения заданного коэффициента аппроксимации α; sin-cos параметризация углов

$$\gamma_\ell = u \sin\Big[\big(\ell - \tfrac{1}{2}\big)\tfrac{\pi}{2n}\Big], \qquad \beta_\ell = v \cos\Big[\big(\ell - \tfrac{1}{2}\big)\tfrac{\pi}{2n}\Big], \tag{3}$$

где u и v — всего два скалярных параметра; нормировка матрицы задачи $S = \{s_{ij}\}$ на норму Фробениуса, $\|S\|_F = 1$, которая выравнивает характерные масштабы разных задач. Качество работы измеряется ожидаемым числом независимых прогонов схемы до получения решения требуемого качества: $\mathrm{STS}_\alpha = 1/P_\alpha(u, v)$, где P_α — вероятность измерить битовую строку, для которой $(C(z) - c_{\min})/(c_{\max} - c_{\min}) \le 1 - \alpha$, а $c_{\min}$ и $c_{\max}$ — минимальное и максимальное значения целевой функции.

Результаты численного эксперимента на шести ансамблях случайных задач QUBO, суммарно более 150 000 экземпляров, показали, что при увеличении n медианное значение $\mathrm{STS}_{0.95}$ вопреки ожиданию не возрастает, а в большинстве случаев убывает.

Чтобы понять причину такого поведения, мы исследовали запутанность в динамике fpQAOA методом матричных произведений состояний (MPS) [5]. Параметр χ задаёт предельный объём запутанности, который может быть представлен в этом формате, и определяет стоимость

вычислений. Расчёты для n до 50 кубитов и p до 100 показали, что пиковое значение χ неожиданно убывает с ростом глубины и выходит на насыщение.

Убывание запутанности с ростом глубины мотивирует радикальное упрощение: зафиксировать $\chi = 1$ и после каждого двухчастичного взаимодействия проецировать состояние на многообразие факторизованных состояний. Это приводит к нелинейному классическому алгоритму. В блоховском представлении состояние каждой переменной описывается единичным вектором, а обновление пары переменных сводится к элементарным операциям — вычислению синуса, косинуса и нормировке, — без сингулярного разложения, что даёт линейные затраты памяти и численную устойчивость.

На стандартных тестовых наборах GSet MaxCut размером до 20 000 переменных алгоритм находит разрезы, отношение которых к наилучшим известным значениям превышает 0.95, а в ряде случаев достигает единицы. Существенно, что эти результаты получены при едином фиксированном расписании для всех задач, без подбора параметров под конкретный экземпляр.

Полученные результаты не означают, что запутанность не нужна для квантовой оптимизации вообще. Они говорят о том, что в рассматриваемом режиме значительная часть оптимизационного потенциала QAOA сохраняется и без неё.

Список литературы

[1] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, “A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, arXiv: 1411.4028.

[2] G. Scriva, N. Astrakhantsev, S. Pilati, G. Mazzola, “Challenges of variational quantum optimization with measurement shot noise”, *Physical Review A*, **109** (2024), 032408. DOI: 10.1103/PhysRevA.109.032408.

[3] F. G. S. L. Brandao, M. Broughton, E. Farhi, S. Gutmann, H. Neven, “For Fixed Control Parameters the Quantum Approximate Optimization Algorithm’s Objective Function Value Concentrates for Typical Instances”, arXiv: 1812.04170.

[4] A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, B. I. Bantysh, Yu. I. Bogdanov, A. K. Fedorov, E. O. Kiktenko, “Evidence for effectively constant shot complexity in the quantum approximate optimization algorithm without per-instance optimization”, *Physical Review A*, **114** (2026), 032405. DOI: 10.1103/PhysRevA.114.032405.

[5] B. I. Bantysh, A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, M. A. Gavreev, E. O. Kiktenko, “Disentangling QAOA: From Weakly Entangled Circuits to a Classical QUBO Solver”, arXiv: 2609.15738 .

Статья поступила 9 октября 2026 г.

On solving binary optimization problems using QAOA

A. Y. Chernyavskiy, B. I. Bantysh, D. A. Kulikov, E. O. Kiktenko

We consider solving QUBO problems using QAOA with fixed parameters and a circuit number of layers that grows linearly with problem size. Numerical results show that, contrary to expectations, the median number of circuit runs required to obtain a solution with a prescribed approximation ratio does not increase with problem size. The analysis of entanglement reveals an unexpected decrease of its peak value with the number of layers. Guided by this observation, we constructed a fully classical quantum-inspired algorithm without entanglement. On GSet MaxCut benchmarks with up to 20,000 variables, the ratio of the found cut to the best known value exceeds 0.95 in the vast majority of cases.

Keywords: QAOA, QUBO, MaxCut, fixed parameters, entanglement.

References

[1] E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, "A Quantum Approximate Optimization Algorithm", arXiv: 1411.4028.

[2] G. Scriva, N. Astrakhantsev, S. Pilati, G. Mazzola, "Challenges of variational quantum optimization with measurement shot noise", *Physical Review A*, **109** (2024), 032408. DOI: 10.1103/PhysRevA.109.032408.

[3] F. G. S. L. Brandao, M. Broughton, E. Farhi, S. Gutmann, H. Neven, "For Fixed Control Parameters the Quantum Approximate Optimization Algorithm's Objective Function Value Concentrates for Typical Instances", arXiv: 1812.04170.

[4] A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, B. I. Bantysh, Yu. I. Bogdanov, A. K. Fedorov, E. O. Kiktenko, "Evidence for effectively constant shot complexity in the quantum approximate optimization algorithm without per-instance optimization", *Physical Review A*, **114** (2026), 032405. DOI: 10.1103/PhysRevA.114.032405.

[5] B. I. Bantysh, A. Yu. Chernyavskiy, D. A. Kulikov, M. A. Gavreev, E. O. Kiktenko, "Disentangling QAOA: From Weakly Entangled Circuits to a Classical QUBO Solver", arXiv: 2609.15738.

Received on October 9, 2026

Ортогональность обратимой тернарной операции и двух ее термальных операций

Н. А. Щучкин*

В работе рассматриваются обратимые справа тернарные операции. Для каждой такой операции строятся две ее термальные операции и утверждается ортогональность полученных трех операций. С помощью так построенных трех ортогональных операций преобразуются слова.

Ключевые слова: Тернарный группоид, ортогональность, обратимость, преобразование .

1. Введение

Мы используем тернарные ортогональные операции f, g, t для создания алгоритма шифрования, причем операция f однозначно разрешима справа, а операции g и t построены как термальные операции с использованием операции f. Процесс построения операций g и t описан в параграфе 3, там же приведена эквивалентность однозначной разрешимости справа операции f и ортогональности операций f, g, t в теореме 1. В параграфе 4 указаны два алгоритма шифрования с использованием тернарных ортогональных операций f, g, t, и найдены обратные к ним преобразования.

2. Предварительные сведения

Тернарная операция f на множестве Q называется i-обратимой для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$, если одно из трех уравнений (для $i = 1$ первое, для $i = 2$ второе, для $i = 3$ третье)

$$f(x, a, b) = c, f(a, y, b) = c, f(a, b, z) = c$$

имеет единственное решение для любых элементов a, b, c из Q.

Для i-обратимой тернарной операции f, $i = 1, 2, 3$, существует i-обратная тернарная операция ${}^{(i)}f$, определенная следующим образом:

$${}^{(1)}f(d, b, c) = a \Leftrightarrow f(a, b, c) = d;$$

* *Щучкин Николай Алексеевич* — профессор, ВГСПУ, г. Волгоград, e-mail: nikolaj_shchuchkin@mail.ru.

Shchuchkin Nikolai Alekseevich — Professor, VGSPU, Volgograd.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

$$^{(2)}f(a,d,c)=b \Leftrightarrow f(a,b,c)=d;$$
$$^{(3)}f(a,b,d)=c \Leftrightarrow f(a,b,c)=d.$$

3. Ортогональность тернарных операций

Определим ортогональность тернарных операций f,g,t, как это сделано С.К.Стейном в [1] для определения ортогональности бинарных операций. Тернарные операции f,g,t, определенные на одном и том же множестве Q, называются ортогональными, если отображение σ декартова произведения $Q\times Q\times Q$ на само себя, заданное по правилу $\sigma(x,y,z)=(f(x,y,z),g(x,y,z),t(x,y,z))$, является биективным.

Теорема 1. *Пусть (Q,f) – тернарный группоид. Определим еще две тернарные операции:*

1) $g(x,y,z)=f(f(x,y,z),x,y)$, $t(x,y,z)=f(f(x,y,z),g(x,y,z),x)$;
2) $g(x,y,z)=f(x,f(x,y,z),y)$, $t(x,y,z)=f(f(x,y,z),g(x,y,z),x)$;
3) $g(x,y,z)=f(f(x,y,z),x,y)$, $t(x,y,z)=f(g(x,y,z),f(x,y,z),x)$;
4) $g(x,y,z)=f(x,f(x,y,z),y)$, $t(x,y,z)=f(g(x,y,z),f(x,y,z),x)$;
5) $g(x,y,z)=f(f(x,y,z),y,x)$, $t(x,y,z)=f(f(x,y,z),g(x,y,z),y)$;
6) $g(x,y,z)=f(y,f(x,y,z),x)$, $t(x,y,z)=f(f(x,y,z),g(x,y,z),y)$;
7) $g(x,y,z)=f(f(x,y,z),y,x)$, $t(x,y,z)=f(g(x,y,z),f(x,y,z),y)$;
8) $g(x,y,z)=f(y,f(x,y,z),x)$, $t(x,y,z)=f(g(x,y,z),f(x,y,z),y)$.

Тернарная операция f является 3-обратимой тогда и только тогда, когда операции f,g,t ортогональны.

4. Преобразования слов

Выбираем конечное множество Q порядка m, на котором определены указанные операции f,g,t. Множество всех слов в алфавите Q обозначим

$$Q^{+}=\{x_1\dots x_s | x_i\in Q, s\geq 1\}.$$

Из множестве Q^{+} выбираем слово $x_1\dots x_s$. Предполагаем, что это слово содержит количество s символов, кратное трем, из алфавита Q. Если это не так, то добавляем в конец этого слова два пробела в случае, когда s при делении на 3 дает остаток 1, или один пробел в случае, когда s при делении на 3 дает остаток 2 (предполагается, что алфавит Q содержит символ "пробел"). Перед началом шифрования передается первоначальная длина слова, а затем отображается слово с дополнением нужного количества пробелов. Расшифровывать будем измененное слово, а затем, с учетом переданной информации о длине слова, восстановим исходное слово.

Случай 1. Преобразуем слова с помощью ортогональных тернарных операций f, g, t: f – 3-обратимая тернарная операция, $g(x,y,z) = f(\alpha(f(x,y,z)), \alpha(x), y)$, $t(x,y,z) = f(\beta(f(x,y,z)), \beta(g(x,y,z)), x)$, где α и β – перестановки на множествах $\{f(x,y,z), x\}$ и $\{f(x,y,z), g(x,y,z)\}$ соответственно, выбранные по одному из четырех вариантов: 1) α и β – диагонали; 2) α – транспозиция, β – диагональ; 3) α – диагональ, β – транспозиция; 4) α и β – транспозиции. Эти операции описывают 1)–4) из теоремы 1.

Отображаем слово $x_1 \dots x_s$ по правилу $\tau_1(x_1 \dots x_s) = y_1 \dots y_s$,

$$\text{где} \quad \begin{cases} y_i = f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), \\ y_{i+1} = g(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = f(\alpha(y_i), \alpha(x_i), x_{i+1}), \\ y_{i+2} = t(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = f(\beta(y_i), \beta(y_{i+1}), x_i) \end{cases} \tag{1}$$

для всех $i = 3j - 2$ при $j = 1, 2, \dots, s/3$.

Отображение τ_1, построенное по правилу (1), является биективным в силу ортогональности операций f, g, t.

На множестве слов, у которых длина кратна трем, строим отображение $\mu_1(y_1 \dots y_s) = z_1 \dots z_s$,

$$\text{где} \quad \begin{cases} z_i = {}^{(3)}f(\beta(y_i), \beta(y_{i+1}), y_{i+2}), \\ z_{i+1} = {}^{(3)}f(\alpha(y_i), \alpha(z_i), y_{i+1}), \\ z_{i+2} = {}^{(3)}f(z_i, z_{i+1}, y_i) \end{cases} \tag{2}$$

для всех $i = 3j - 2$ при $j = 1, 2, \dots, s/3$.

Теорема 2. *Отображение μ_1, построенное по правилу (2), является обратным для отображения τ_1.*

Случай 2. Преобразуем слова с помощью ортогональных тернарных операций f, g, t: f – 3-обратимая тернарная операция, $g(x,y,z) = f(\alpha(f(x,y,z)), \alpha(y), x)$, $t(x,y,z) = f(\beta(f(x,y,z)), \beta(g(x,y,z)), y)$, где α и β – перестановки на множествах $\{f(x,y,z), y\}$ и $\{f(x,y,z), g(x,y,z)\}$ соответственно, выбранные по одному из четырех вариантов: 1) α и β – диагонали; 2) α – транспозиция, β – диагональ; 3) α – диагональ, β – транспозиция; 4) α и β – транспозиции. Эти операции описывают 5)–8) из теоремы 1.

Отображаем слово $x_1 \dots x_s$ по правилу $\tau_2(x_1 \dots x_s) = y_1 \dots y_s$,

$$\text{где} \quad \begin{cases} y_i = f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}), \\ y_{i+1} = g(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = f(\alpha(y_i), \alpha(x_{i+1}), x_i), \\ y_{i+2} = t(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = f(\beta(y_i), \beta(y_{i+1}), x_{i+1}) \end{cases} \tag{3}$$

для всех $i = 3j - 2$ при $j = 1, 2, \ldots, s/3$.

Отображение τ_2, построенное по правилу (3), является биективным в силу ортогональности операций f, g, t.

На множестве слов, у которых длина кратна трем, строим отображение $\mu_2(y_1 \ldots y_s) = z_1 \ldots z_s$,

$$\text{где} \quad \begin{cases} z_{i+1} = {}^{(3)}f(\beta(y_i), \beta(y_{i+1}), y_{i+2}), \\ z_i = {}^{(3)}f(\alpha(y_i), \alpha(z_{i+1}), y_{i+1}), \\ z_{i+2} = {}^{(3)}f(z_i, z_{i+1}, y_i) \end{cases} \tag{4}$$

для всех $i = 3j - 2$ при $j = 1, 2, \ldots, s/3$.

Непосредственной проверкой, как в теореме 2, доказывается, что отображение μ_2, построенное по правилу (4), является обратным для отображения τ_2.

5. Заключение

Для тернарной операции f по анлалогии, как описано выше, найдены по восемь пар тернарных операций g,t, с помощью которых устанавливается эквивалентность 1- и 2-обратимости операции f и ортогональности трех операций f,g,t. Имеются преобразования слов с помощью этих трех ортогональных операций и обратные к ним преобразования.

Список литературы

[1] S. K. Stein, “On the foundations of quasigroups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85**, 1957, 228–256.

Статья поступила 5 октября 2026 г.

The orthogonality of an invertible ternary operation and its two term operations

N. A. Shchuchkin

The paper deals with ternary operations that are right-invertible. For each such operation, two term operations are constructed, and the three resulting operations are shown to be orthogonal. These three orthogonal operations are then used to transform words.

Keywords: Ternary groupoid, orthogonality, reversibility, transformation .

Received on October 5, 2026

Нижняя граница расширения произведения линейных кодов

А. А. Юсуфова*, Г. В. Калачев‡

Работа посвящена исследованию коэффициента расширения произведения (product expansion) линейных кодов — параметра, возникающего при изучении когранічного расширения и конструкций локально тестируемых и квантовых кодов. Для m-мерного произведения линейных кодов одинаковой длины n получена общая нижняя оценка $\rho \geq 1/(\lceil m/2 \rceil n^{\lceil m/2 \rceil})$. Кроме того, для трёхмерного случая построено семейство кодов на основе кодов Рида–Соломона, для которого коэффициент расширения имеет порядок $1/n^2$. Тем самым полученная нижняя оценка при $m = 3$ является точной по порядку.

Ключевые слова: линейные коды, произведение кодов, расширение произведения, когранічное расширение.

1. Введение

Произведения линейных кодов и связанные с ними конструкции возникают при изучении локально тестируемых и квантовых кодов [1–3]. Одной из характеристик таких конструкций является расширение произведения (product expansion), тесно связанное с когранічным расширением комплексов, соответствующих произведениям линейных кодов.

Для пары кодов свойство расширения произведения связано с робастной тестируемостью (robust testability) и тестируемостью на согласованность (agreement testability) [4, 5]. Однако в многомерном случае приведённые свойства уже не совпадают [5].

Естественным образом возникает вопрос о том, какие нижние оценки на коэффициент ρ можно получить для произвольного набора линей-

Юсуфова Алина Алмасовна — студентка факультета прикладной математики и информатики филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: yusufova.alinochka@mail.ru, ORCID: 0009-0007-4090-8215.

Yusufova Alina Almasovna — Student, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Tashkent Branch of Lomonosov Moscow State University.

‡*Калачев Глеб Вячеславович* — канд. физ.-мат. наук, с. н. с. лаборатории проблем теоретической кибернетики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.kalachev@yandex.ru, ORCID: 0000-0003-2695-3179.

Kalachev Gleb Vyacheslavovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Problems of Theoretical Cybernetics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

ных кодов. В настоящей работе этот вопрос исследуется для m-мерного произведения кодов одинаковой длины.

2. Основные определения

Приведём основные определения, следуя [4]. Пусть заданы линейные коды $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ над $\mathbb{F}_q$, где $\mathcal{C}_i \subseteq \mathbb{F}_q^{n_i}$. Здесь и далее $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Через $\mathcal{L}_i$ обозначим множество линий, параллельных i-й координатной оси в m-мерной решётке $[n_1] \times \cdots \times [n_m]$, то есть

$$\mathcal{L}_i := \{A_1 \times \cdots \times A_m \subseteq [n_1] \times \cdots \times [n_m] \mid A_i = [n_i], \forall j \neq i : |A_j| = 1\}.$$

Для набора $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i\in[m]}$ линейных кодов над $\mathbb{F}_q$ будет удобно использовать обозначение $\otimes\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_m$. Для каждого $i \in [m]$ положим

$$\mathcal{C}^{(i)} := \mathbb{F}_q^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_i \otimes \cdots \otimes \mathbb{F}_q^{n_m} = \left\{c \in \mathbb{F}_q^{n_1\times\cdots\times n_m} \;\middle|\; \forall \ell \in \mathcal{L}_i : c|_\ell \in \mathcal{C}_i\right\}.$$

Тогда *тензорным произведением кодов* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ называется код

$$\otimes\mathcal{C} = \bigcap_{i\in[m]} \mathcal{C}^{(i)}.$$

Как и в [4], определим код

$$\boxplus\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \boxplus \cdots \boxplus \mathcal{C}_m := \left(\mathcal{C}_1^\perp \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_m^\perp\right)^\perp = \sum_{i\in[m]} \mathcal{C}^{(i)}.$$

Для $x \in \mathbb{F}_q^{n_1\times\cdots\times n_m}$ обозначим $|x|_i$ количество линий $\ell \in \mathcal{L}_i$, для которых $x|_\ell \neq 0$. Здесь $|x|$ обозначает *вес Хэмминга* (то есть количество ненулевых элементов). Легко видеть, что введённые нормы связаны неравенством $|x| \leq n_i|x|_i$, $i \in [m]$.

Определение 1 (Коэффициент расширения произведения кодов)**.** Набор $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i\in[m]}$ называется ρ-расширяющим, если для каждого $c \in \boxplus\mathcal{C}$ существует представление

$$c = \sum_{i\in[m]} a_i, \qquad a_i \in \mathcal{C}^{(i)},$$

такое, что

$$\rho \sum_{i\in[m]} n_i|a_i|_i \leq |c|.$$

Коэффициентом расширения набора кодов $\mathcal{C}$ называется величина

$$\rho(\mathcal{C}) := \max\{\rho \in [0,1] \colon \mathcal{C} \text{ является } \rho\text{-расширяющим}\}.$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Существует семейство линейных* $\{\mathcal{C}_n\}_{n=2}^{\infty}$, *где* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathbb{F}_{q_n}^n$, $q_n = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$, *размерности* $\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$, *такое, что*

$$\rho(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_n) \leq \frac{6}{n^2}$$

для всех $n \geq 2$.

Замечание. Коды в теореме изоморфны укороченным кодам Рида-Соломона.

В двумерном случае полезно иметь в виду следующий простой пример. Пусть рассматривается пара кодов $(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\perp})$. Поскольку $(\mathcal{C}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{C}$, для этой пары выполнено условие $\mathcal{C}_2^{\perp} \subseteq \mathcal{C}_1$. Поэтому, если H_1 и H_2 — соответствующие проверочные матрицы, то $H_1 H_2^T = 0$, а значит $H_1 I_n H_2^T = 0$. Тогда единичная матрица I_n принадлежит коду $\mathcal{C} \boxplus \mathcal{C}^{\perp}$. При этом $|I_n| = n$, но для её разложения через строки и столбцы требуется не менее n линий. Отсюда следует оценка

$$\rho(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\perp}) \leq \frac{1}{n}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_i)_{i \in [m]}$, *где* $\mathcal{C}_i \subseteq \mathbb{F}_q^n$ *и* $m \geq 2$. *Тогда*

$$\rho(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{\lceil m/2 \rceil \, n^{\lceil m/2 \rceil}}.$$

При $m = 3$ эта оценка даёт $\rho(\mathcal{C}) = \Omega(n^{-2})$. В силу первой теоремы для трёхмерного случая порядок $1/n^2$ является точным.

Список литературы

[1] I. Dinur, S. Liu, R. Y. Zhang, “New Codes on High Dimensional Expanders”, *40th Computational Complexity Conference (CCC 2025)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), **339**, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2025, 27:1–27:42.

[2] G. Kalachev, P. Panteleev, “Maximally Extendable Product Codes are Good Coboundary Expanders”, *66th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS 2025. DOI: 10.1109/focs63196.2025.00079, 2025, 1512–1524.

[3] Г. В. Калачев, П. А. Пантелеев, “Семейство асимптотически хороших квантовых и локально тестируемых классических LDPC-кодов”, *Математические вопросы кибернетики*, **21**, ФИЗМАТЛИТ, Москва. DOI: 10.20948/mvk-2023-111, 2023, 111–155.

[4] G. Kalachev, P. Panteleev, “Two-sided Robustly Testable Codes”, arXiv: 2206.09973.

[5] Г. В. Калачев, “Многомерное расширение произведений кодов сильнее робастной тестируемости и тестируемости на согласованность”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:2 (2026), 101–119.

Статья поступила 15 сентября 2026 г.

A lower bound on the expansion of product codes

A. A. Yusufova, G. V. Kalachev

The paper is devoted to the study of the product expansion coefficient of linear codes — a parameter arising in the study of coboundary expansion and constructions of locally testable and quantum codes. For an m-dimensional product of linear codes of the same length n, we obtain the general lower bound $\rho \geq 1/(\lceil m/2 \rceil n^{\lceil m/2 \rceil})$. In addition, in the three-dimensional case, we construct a family of codes based on Reed–Solomon codes for which the expansion coefficient is of order $1/n^2$. Thus, for $m = 3$, the obtained lower bound is asymptotically tight.

Keywords: linear codes, product codes, product expansion, coboundary expansion.

References

[1] I. Dinur, S. Liu, R. Y. Zhang, “New Codes on High Dimensional Expanders”, *40th Computational Complexity Conference (CCC 2025)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), **339**, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum fuer Informatik, Dagstuhl, Germany, 2025, 27:1–27:42.

[2] G. Kalachev, P. Panteleev, “Maximally Extendable Product Codes are Good Coboundary Expanders”, *66th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS 2025. DOI: 10.1109/focs63196.2025.00079, 2025, 1512–1524.

[3] G. V. Kalachev, P. A. Panteleev, “Asymptotically Good Quantum and Locally Testable Classical LDPC Codes”, *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki*, **21**, FIZMATLIT, Moscow. DOI: 10.20948/mvk-2023-111, 2023, 111–155 (In Russian).

[4] G. Kalachev, P. Panteleev, “Two-sided Robustly Testable Codes”, arXiv: 2206.09973.

[5] G. V. Kalachev, “High-Dimensional Expansion of Product Codes is Stronger than Robust and Agreement Testability”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:2 (2026), 101–119 (In Russian).

Received on September 15, 2026

Часть 6
Нейронные сети, большие языковые модели, машинное обучение и нечеткая математика

Spectral Content Ranking Method Based on Heterogeneous Hypergraph Models

P. A. Reshetarov*, E. V. Khvorostukhina‡

A content ranking method based on heterogeneous hypergraph models is proposed. A 5-partite hypergraph is constructed on music listening data. Latent behavioral clusters, serving as proxy representations of genre and mood characteristics, are extracted from the interaction matrix using SVD and the k-means method. Ranking is performed by a generalized spectral operator. In experiments on the Yambda-50M dataset, an NDCG@10 value of 0.469 is achieved, outperforming PureSVD by 7.1 % and ItemKNN by 23.6 %.

Keywords: hypergraph, recommender systems, spectral methods, music recommendation, Yambda.

1. Introduction

Hypergraph models describe relationships of arbitrary arity and find applications in recommender systems [1]. The ability of a hyperedge to combine an arbitrary number of entities makes it possible to model complex interactions in content consumption without loss of context. Previously, the authors proposed a model based on a 4-partite hypergraph (user, artist, genre, mood) on Last.fm data [2]. However, that approach operated on macro-level artist characteristics and did not distinguish individual tracks. In this work, the construction is generalized to a 5-partite listening hypergraph (hereafter LH), where tracks are explicitly included as independent vertices. The experimental study is conducted on the open Yambda dataset [3].

The goal of this work is to develop and evaluate a track ranking method based on the spectral operator of the LH. Let five pairwise disjoint base vertex sets be given: users V_U, tracks V_T, artists V_A, and two sets of latent behavioral clusters V_G and V_M serving as proxy representations of genre and mood attributes, along with listening counts n_{ut} ($u \in V_U$, $t \in V_T$). Integration of additional information channels is permitted. For each user, a ranked list of unheard tracks must be generated in decreasing order of predicted interest.

* *Reshetarov Platon Aleksandrovich* — Master's student, SSTU, Dep. of Information and Communication Systems and Software Engineering, e-mail: grecc10@bk.ru

‡ *Khvorostukhina Ekaterina Vladimirovna* — PhD, Associate professor, SSTU, Dep. of Inform. and Commun. Systems and Software Engineering; SSU, Dep. of Geometry, e-mail: katyanew2007@rambler.ru, ORCID: 0000-0002-2775-5732

Published under CC-BY 4.0

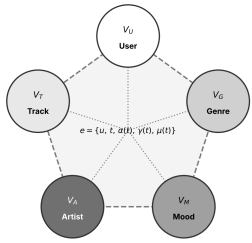


Figure 1: 5-partite listening hypergraph

2. Proposed approach

The listening hypergraph (LH) is defined as a 5-partite hypergraph $\mathcal{H} = (V, E)$ with vertex set $V = V_U \sqcup V_T \sqcup V_A \sqcup V_G \sqcup V_M$. Each hyperedge $e = \{u, t, \alpha(t), \gamma(t), \mu(t)\} \in E$ is formed when $n_{ut} > 0$ and contains exactly one vertex of each type, where $\alpha\colon V_T \to V_A$, $\gamma\colon V_T \to V_G$, $\mu\colon V_T \to V_M$ are mappings that associate a track with its artist and two latent behavioral clusters, respectively. Removing the track vertex (reverting to the previously proposed [2] 4-partite hypergraph) makes tracks with identical triples (α, γ, μ) indistinguishable. In the dataset used, approximately 70 % of tracks fall into this situation. Explicit inclusion of the track in the hyperedge structure fully eliminates this drawback. An example of the LH structure is shown in Figure 1.

Latent feature extraction. Since the Yambda dataset [3] does not contain explicit genre or mood annotations, the mappings γ and μ are constructed from behavioral data in four steps: 1) a sparse interaction matrix $L \in \mathbb{R}^{|V_U| \times |V_T|}$ with entries $L_{ut} = \ln(1 + n_{ut})$ is formed from training interactions only; 2) truncated SVD is computed: $L \approx U_r \Sigma_r V_r^\top$ with rank $r = 64$ to obtain dense latent profiles; 3) the rows of $V_r \in \mathbb{R}^{|V_T| \times r}$ are ℓ_2-normalized to produce track feature vectors; 4) `MiniBatchKMeans` with $k = 20$ and $k = 15$ (with different random seeds) determines the clusters γ and μ. The two clusterings capture distinct latent groupings of tracks based on co-listening patterns; the labels "genre" and "mood" are conventional designations reflecting the intended proxy role of these clusters, not verified semantic categories.

For each type of relationship in the LH structure, a local incidence matrix $H_\tau \in \{0, 1\}^{n \times m_\tau}$ is defined, where $n = |V_T|$ and m_τ is the cardinality of the vertex set of type τ. The approach permits integration of additional information channels beyond the original LH structure. The following blocks are considered: H_U — the transposed binary user–track interaction matrix constructed from training data, H_A — the track–artist membership matrix, H_G and H_M — matrices encoding track membership in genre and mood clusters.

Additionally, through the supplementary block H_L, the external structure of track–album membership from the dataset metadata is incorporated. The generalized spectral operator of the LH Θ, aggregating incidence blocks with weights $w_\tau > 0$, extends hypergraph-based collaborative filtering [1] to spectral aggregation: $\Theta = \sum_\tau w_\tau H_\tau D_{e_\tau}^{-1} H_\tau^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, where $D_{e_\tau} = \mathrm{diag}(H_\tau^\top \mathbf{1}) \in \mathbb{R}^{m_\tau \times m_\tau}$ is the diagonal hyperedge degree matrix of block τ. The entry Θ_{ij} is proportional to the intensity of co-occurrence of tracks i and j in shared contextual hyperedges. To approximate the operator without computing the dense matrix, a block matrix M is formed from vertically stacked blocks of the form $\sqrt{w_\tau}\, D_{e_\tau}^{-1/2} H_\tau^\top$, so that $\Theta = M^\top M$. Let $V_k \in \mathbb{R}^{n\times k}$ be the matrix of k right singular vectors of M corresponding to the largest singular values. For user u, a listening history vector $x_u = (\ln(1 + n_{ut}))_t \in \mathbb{R}^n$ is formed from training interactions. The final predicted score vector is computed by projection onto the constructed basis: $s_u = x_u V_k V_k^\top \in \mathbb{R}^n$, after which unheard tracks are ranked in decreasing order of $s_u[t]$. The proposed method does not involve gradient-based optimization or supervised learning; all components (SVD, clustering, spectral decomposition) are computed in a single pass over the training data. When using a single block H_U, the operator reduces to a hyperedge-degree-normalized variant of collaborative filtering; integration of additional contextual blocks (H_A, H_L, H_G, H_M) enriches the spectral basis with information about entity relationships absent from the original sparse listening matrix. The approach is implemented in Python 3 (`TruncatedSVD`, `MiniBatchKMeans`). In the experiments, the block weights are fixed at $w_U = w_A = w_L = 1.0$, $w_G = w_M = 0.5$, and the basis rank is $k = 256$.

3. Experimental results and conclusions

From the Yambda-50M dataset [3], listening events with a playback fraction $\geq$50 % were selected for 30,000 popular tracks and 2,000 active users (2,841,958 interactions, 29,973 tracks, 8,396 artists, albums extracted from metadata, density 4.7 %). The baselines are Random, Pop (by popularity), ItemKNN (cosine similarity over the full item co-occurrence matrix without neighbor truncation), and PureSVD ($k = 128$). Unique user–track interaction pairs were split globally into training, validation, and test sets in a 64/16/20 ratio by uniform random assignment, repeated for three random seeds. Top-10 metrics were computed over the full catalog excluding training items (standard deviation ≤ 0.004).

Analysis of the results (Table 1) shows that the single-block model LH(U) achieves NDCG@10 comparable to PureSVD (0.437), establishing a collabo-

Table 1: Ranking metrics on the test set

Metric	Random	Pop	ItemKNN	PureSVD	LH(U)	LH(U,A)	LH(U,A,L,G,M)
P@10	0.011	0.175	0.367	0.429	0.427	0.459	**0.461**
NDCG@10	0.011	0.185	0.379	0.437	0.437	0.467	**0.469**
HR@10	0.102	0.699	0.952	0.980	0.981	0.990	**0.993**

rative filtering baseline for the operator framework. Integration of the artist block (LH(U,A)) increases NDCG@10 by 6.9 % relative to PureSVD. The full contextual model LH(U,A,L,G,M) achieves the best NDCG@10 = 0.469 (+7.1 % over PureSVD) and HR@10 = 0.993. The most significant metric improvement is provided by adding the artist relationship structure. Thus, the 5-partite LH with a spectral operator effectively combines heterogeneous content information and outperforms classical approaches. The spectral basis constructed here can serve as input features for hypergraph neural network (HGNN) architectures, enabling end-to-end trainable models that leverage both the structural advantages of the proposed hypergraph and the representational power of deep learning. Promising research directions include joint optimization of operator block weights on the validation set and integration of the spectral operator into HGNN-based pipelines for further improvement of ranking quality.

References

[1] L. Xia, C. Huang, Y. Xu, J. Zhao, D. Yin, J. Huang, "Hypergraph contrastive collaborative filtering", *Proceedings of the 45th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 2022, 70–79. DOI: 10.1145/3477495.3532058.

[2] P. A. Reshetarov, "Description of a graph neural network for a music recommender system", *Mathematical and Computer Modelling: Proceedings of the XII Scientific Conference (Omsk, 2025)*, OSU, Omsk, 2025, 297–299, (In Russian).

[3] A. Ploshkin, V. Tytskiy, A. Pismenny, V. Baikalov, E. Taychinov, A. Permiakov, D. Burlakov, E. Krofto, N. Savushkin, "Yambda-5B – A Large-Scale Multi-modal Dataset for Ranking And Retrieval", 2025, arXiv: 2505.22238.

Received on November 9, 2026

О возможной персонализации взаимодействия пользователя с большими лингвистическими моделями

А. А. Агазарян*, А. П. Рыжов‡

На двух LLM (DeepSeek, MiMo) исследуются два типа персонализации, эффект которых сравнивается с уровнем шума. Пассивная персонализация (история пользователя в запросе) на LaMP дает устойчивый средний выигрыш (16–50%), но доля «пострадавших» пользователей не превышает уровня шума. Для активной персонализации предложено переранжирование выдачи по оценкам пользователя, имитируемым LLM-персонами: персоны сдвигают оценки сильнее шума, но лучший из реальных ответов меняют не чаще шума (DeepSeek) или ненамного чаще (MiMo, +12 п.п.).

Ключевые слова: большие лингвистические модели, персонализация, переранжирование, LLM-персоны.

1. Постановка задачи

Различают *пассивную* персонализацию (по истории пользователя) и *активную* (по его обратной связи) [1]; для больших лингвистических моделей (LLM) активная используется лишь в последовательном режиме [2]. Пусть M — LLM, u — пользователь, q — запрос, $m(\cdot)$ — мера качества ответа (больше — лучше). Эффект сравнивается с *уровнем шума* — той же статистикой для двух эквивалентных по построению условий.

Пассивная. $y_u(q) = M(q, H_u^k(q))$, где $H_u^k(q)$ — k ближайших к q элементов истории H_u. Эффект d_u — среднее по n_u запросам u разности $m(y_u(q)) - m(M(q))$; $d_u = \theta_u + \varepsilon_u$, где $\theta_u \sim N(\mu, \tau^2)$ — истинный эффект для u, $\varepsilon_u \sim N(0, \sigma^2/n_u)$, σ^2 — дисперсия разностей по запросам. Задачи: (З1) верно ли $\mu > 0$ и помогает ли *своя* история? (З2) есть ли пользователи с $\theta_u < 0$ и можно ли их выявить? (З3) сколько для этого нужно запросов?

Агазарян Александр Анастасович — студент магистратуры, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: st02220002@gse.cs.msu.ru.

Agazaryan Alexander Anastasovich — Master's student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics.

‡*Рыжов Александр Павлович* — д-р техн. наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: alexander.ryjov@gmail.com.

Ryzhov Alexander Pavlovich — Doctor of Technical Sciences, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Активная (алгоритм). Пользователь оценивает кандидатов выдачи $c_1, \ldots, c_K$: $s_u(c) \in \{1, \ldots, 5\}$; выдача сортируется по s_u (при равенстве — по исходному рангу), показывается top-1. В эксперименте $s_u(c)$ заменяется оценкой M от лица роли (LLM-персоны). Задачи: (З4) расходятся ли персоны сильнее шума? (З5) меняется ли показываемый ответ? Модели: `deepseek-chat` и `mimo-v2.6-flash` (запросы 28–29.09.2026).

2. Пассивная персонализация

LaMP [3]: LaMP-2 (теги фильмов, точность), LaMP-3 (оценка товара, $m = -\text{MAE}$, средняя абсолютная ошибка), LaMP-4 (заголовки, ROUGE-L); по 100 пользователей, всего 3418 запросов; отбор BM25, $k = 5$; температура 0. Плацебо — история *другого* пользователя (случайная перестановка без неподвижных точек); *уровень шума* — доля «пострадавших» ($d_u < 0$) между двумя случайными выборками из истории. Средний эффект проверяется бутстрепом по пользователям, вред для пользователя — односторонним перестановочным тестом с поправкой Бенджамини–Хохберга по 100 пользователям. $n^* = (z_{0,95} + z_{0,80})^2 \hat{\sigma}^2 / \delta^2$ (z — квантили $N(0,1)$) — число запросов на пользователя для выявления вреда $\delta = |\hat{\mu}|$.

Таблица 1: Пассивная персонализация (DeepSeek / MiMo)

	LaMP-2	LaMP-3	LaMP-4
Без персонализации	0,446 / 0,421	−0,288 / −0,304	0,160 / 0,153
Выигрыш BM25 ($\hat{\mu}$)	+0,084 / +0,076	+0,055 / +0,049	+0,068 / +0,077
Своя − чужая история	+0,068 / +0,062	+0,076 / +0,085	+0,058 / +0,065
Доля «пострадавших»	18% / 15%	23% / 27%	17% / 9%
Уровень шума	31% / 27%	29% / 29%	51% / 54%
n^*	278 / 281	2831 / 1119	42 / 32

Результаты. (З1) Да: выигрыш значим во всех шести постановках — 16–19% от уровня без персонализации на LaMP-2/3 (для LaMP-3 — снижение MAE) и 42–50% на LaMP-4; своя история значимо лучше чужой. (З2) Доля «пострадавших» не выше уровня шума, после поправки значимо пострадавших 0–1 из 100: такие пользователи не исключены, но не выявимы. (З3) Нужны сотни–тысячи запросов на человека (на LaMP-4 — десятки) при доступных 5–20.

3. Активная персонализация

Персоны [4] — пять ролей-задач и нейтральный судья, предваряющие общий шаблон оценки 1–5 (температура 0; шум — 5 повторов судьи при 0,8). Пулы кандидатов ($K = 5$): пилот (12 вопросов, ответы в разных стилях) и SE-PQA [5] (146 вопросов, ответы пяти людей). R — средняя по кандидатам и вопросам дисперсия оценок 5 ролей и судьи, деленная на такую же у 5 повторов. Доли вопросов с разным top-1 у ролей и повторов сравниваются тестом Мак-Немара.

Таблица 2: Персоны (top-1: роли / шум; [95%-й бутстреп-интервал])

	Пилот DeepSeek	Пилот MiMo	SE-PQA DeepSeek	SE-PQA MiMo
R	7,6 [5,6; 11,6]	7,8 [6,6; 9,4]	1,34 [1,20; 1,50]	1,57 [1,42; 1,74]
Разный top-1	100% / 50%	100% / 67%	73% / 73%	77% / 64%
Разность, п.п.	+50 [25; 75]	+33 [8; 58]	0 [−9; 9]	+12 [3; 21]

Результаты. (З4) $R > 1$; на SE-PQA — в 5–6 раз меньше, чем на пилоте. (З5) На SE-PQA top-1 меняется у DeepSeek не чаще шума, у MiMo — на 12 п.п. чаще ($p = 0{,}01$).

4. Выводы

Эффект следует оценивать на фоне шума: пассивная дает средний выигрыш, но вред отдельному пользователю неотличим от шума; активная сдвигает оценки сильнее шума, но ответ меняет на 0–12 п.п. чаще шума.

Список литературы

[1] A. Ryjov, “Personalization of social networks: adaptive semantic layer approach”, *Social Networks: A Framework of Computational Intelligence*, Springer, 2014, 21–39. DOI: 10.1007/978-3-319-02993-1_2.

[2] A. P. Ryjov, A. A. Egorova, “A note on semantic diffusion”, arXiv: 2505.09283.

[3] A. Salemi, S. Mysore, M. Bendersky, H. Zamani, “LaMP: when large language models meet personalization”, *Proc. ACL 2024*, ACL, 2024, 7370–7392. DOI: 10.18653/v1/2024.acl-long.399.

[4] S. Mohtadi, P. Bernardelle, J. Mackenzie, G. Demartini, “Persona conditioning as an assessor-sensitivity probe for LLM-based IR evaluation”, arXiv: 2608.10385.

[5] P. Kasela, M. Braga, G. Pasi, R. Perego, “SE-PQA: personalized community question answering”, *Companion Proc. ACM Web Conference 2024*, ACM, 2024, 1095–1098. DOI: 10.1145/3589335.3651445.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

On Possible Personalization of User Interaction with Large Language Models

A. A. Agazaryan, A. P. Ryzhov

On two LLMs (DeepSeek, MiMo) we study two types of personalization, comparing their effect with the noise level. Passive personalization (user history in the prompt) on LaMP gives a robust average gain (16–50%), but the share of "harmed" users does not exceed the noise level. For active personalization we propose reranking results by user ratings, simulated by LLM personas: personas shift ratings beyond the noise, but change the top real answer no more often than noise (DeepSeek) or only slightly more often (MiMo, +12 pp).

Keywords: large language models, personalization, reranking, LLM personas.

References

[1] A. Ryjov, "Personalization of social networks: adaptive semantic layer approach", *Social Networks: A Framework of Computational Intelligence*, Springer, 2014, 21–39. DOI: 10.1007/978-3-319-02993-1_2.

[2] A. P. Ryjov, A. A. Egorova, "A note on semantic diffusion", arXiv: 2505.09283.

[3] A. Salemi, S. Mysore, M. Bendersky, H. Zamani, "LaMP: when large language models meet personalization", *Proc. ACL 2024*, ACL, 2024, 7370–7392. DOI: 10.18653/v1/2024.acl-long.399.

[4] S. Mohtadi, P. Bernardelle, J. Mackenzie, G. Demartini, "Persona conditioning as an assessor-sensitivity probe for LLM-based IR evaluation", arXiv: 2608.10385.

[5] P. Kasela, M. Braga, G. Pasi, R. Perego, "SE-PQA: personalized community question answering", *Companion Proc. ACM Web Conference 2024*, ACM, 2024, 1095–1098. DOI: 10.1145/3589335.3651445.

Received on October 10, 2026

Сравнительный анализ нейронных сетей с комплексными функциями активации

Н. Ф. Алексиадис*, А. А. Сет‡

В докладе рассматривается сравнительный анализ нейронных сетей с разными комплексными функциями активации (CReLU, zReLU, ModReLU, Cardioid и ModTanh). Результаты анализа показали, что функция ModTanh обеспечивает наиболее высокую эффективность обучения.

Ключевые слова: нейронные сети, функции активации, скорость обучения, устойчивость модели.

1. Постановка задачи

Целью настоящего исследования является сравнительный анализ влияния комплексных функций активации на эффективность обучения при использовании одной и той же архитектуры комплексной многослойной нейронной сети.

Для достижения поставленной цели рассматриваем следующие вопросы: построение архитектуры изучаемой нейронной сети, анализ трёх методов инициализации комплексных весов, сравнение результатов различных комплексных функций активации по точности, скорости, устойчивости и выбору наилучшей функции активации.

Для эксперимента мы используем FFT преобразование данных из MNIST (см. https://www.kaggle.com/datasets/hojjatk/mnist-dataset, дата обращения: 10.09.2026).

Для сравнительного анализа комплексных функций активации был выбран комплексный многослойный персептрон [1, 2]. Общая структура

* *Алексиадис Никос Филиппович* — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта института информационных и вычислительных технологий Национального исследовательского университета «МЭИ», e-mail: aleksiadis@yandex.ru, ORCID: 0009-0006-2863-1148.

Aleksiadis Nikos Philippovich — PhD, associate professor, National Research University «MPEI», Institute of Information and Computation technologies, Chair of applied mathematics and artificial intelligence.

‡ *Сет Аунг Айар* — аспирант кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта института информационных и вычислительных технологий Национального исследовательского университета «МЭИ», e-mail: aiara@mpei.ru.

Ayar Aung Set — PhD student, National Research University «MPEI», Institute of Information and Computation technologies, Chair of applied mathematics and artificial intelligence.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

построенной комплексной нейронной сети представлена на рис. 1.

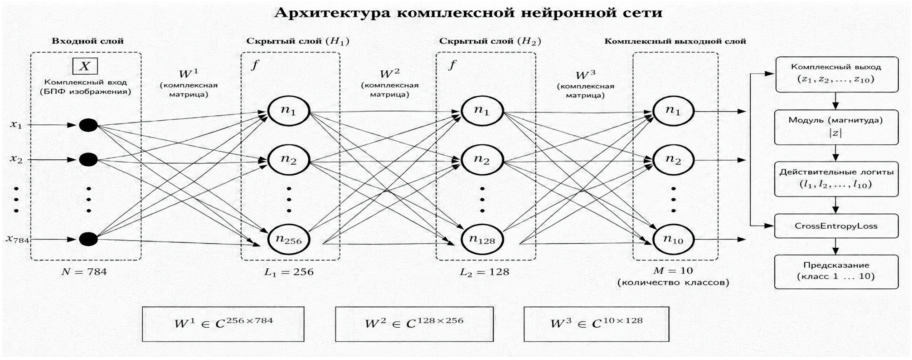


Рис. 1. Архитектура комплексной нейронной сети

В рамках настоящего исследования в качестве f рассматриваем 5 комплексных функций [3, 4] (где $ReLU(x) = max(0, x)$):

$CReLU = ReLU(Re(z)) + iReLU(Im(z)), ModTanh = \tanh(|z|)(z/|z|)$ при $z \neq 0$ и $ModTanh(0) = 0$, $ModReLU = ReLU(|z|+b)(z/|z|)$, при $z \neq 0$, $ModReLU(0) = 0$, где b – обучаемый параметр, $Cardioid = (1/2)(1 + \cos(\arg(z)))z$, $zReUL(z) = z$, если$Re(z) > 0$ и $Im(z) > 0$, иначе 0.

В выходном слое формируется комплексный вектор логитов $Z \in \mathbb{C}^{10}$.

Для перехода к пространству действительных чисел, необходимому для вычисления функции потерь, выполняется операция взятия модуля ($magnitudeoperation$) для каждого комплексного логита. В итоге комплексные логиты преобразуются в действительный вектор логитов. Полученный вектор логитов передаётся в функцию потерь $CrossEntropyLoss$, значения которой используются для вычисления градиентов методом обратного распространения ошибок.

2. Экспериментальная часть исследования

Экспериментальная часть исследования была выполнена с использованием языка программирования Python и библиотеки PyTorch, а обучение комплексной нейронной сети осуществлялось с использованием алгоритма обратного распространения ошибки (Backpropagation). Размер минипакета (batch size) установлен равным 64, что обеспечило оптимальный баланс между скоростью сходимости и вычислительной эффективностью. В процессе обучения эксперименты проводились на протяжении 100 эпох. В качестве функции потерь применялась перекрестная энтропия

(CrossEntropyLoss). Обновление весов выполнялось на основе градиентного метода оптимизации Adam.

3. Сравнительный анализ результатов

Первый этап экспериментального исследования был посвящен анализу влияния скорости обучения на эффективность и устойчивость комплексной нейронной сети.

Второй этап экспериментального исследования был посвящен анализу влияния различных методов инициализации весов на эффективность обучения комплексной нейронной сети.

Третий этап эксперимента был посвящен сравнительному анализу эффективности разных комплексных функций активации. Целью данного эксперимента являлось определение наиболее эффективной функции активации при одинаковой архитектуре сети и неизменных параметрах обучения. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Табл.1. Сравнение эффективности функций активации

Функция активации	Тестовая точность (%)	Стандартное отклонение (%)	Потери на валидации
ModReLU	98.06	0.07	0.0622
ModTanh	98.14	0.02	0.0608
CReLU	97.97	0.05	0.0688
Cardioid	97.84	0.02	0.0728
zReLU	97.46	0.29	0.0989

4. Заключение

Исследование показало, что ModTanh демонстрирует наилучшие результаты из всех рассмотренных комплексных функций активации.

Список литературы

[1] C. Y. Lee, H. Hasegawa, S. C. Gao, “Complex-Valued Neural Networks: A Comprehensive Survey”, *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, **9** (2022), 1406–1426. DOI: 10.1109/JAS.2022.105743.

[2] C. Trabelsi, O. Bilaniuk, Y. Zhang, et al., “Deep Complex Networks”, International Conference on Learning Representations (ICLR) (Vancouver), 2018.

[3] M. Arjovsky, A. Shah, Y. Bengio, “Unitary Evolution Recurrent Neural Networks”, Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning (ICML), 2016, 1120–1128.

[4] E. K. Cole, J. Y. Cheng, J. M. Pauly, S. S. Vasanawala, “Analysis of Deep Complex-Valued Convolutional Neural Networks for MRI Reconstruction and Phase-Focused Applications”, *Magnetic Resonance in Medicine*, **86** (2021), 1093–1109. DOI: 10.1002/mrm.28733.

Статья поступила 18 октября 2026 г.

Comparative analysis of neural networks with complex activation functions

N. P. Aleksiadis, A. S. Ayar

The report examines a comparative analysis of neural networks with different complex activation functions (CReLU, zReLU, ModReLU, Cardioid, and ModTanh). The analysis results showed that the ModTanh function provides the highest training efficiency.

Keywords: neural networks, activation functions, learning rate, model stability.

References

[1] C. Y. Lee, H. Hasegawa, S. C. Gao, “Complex-Valued Neural Networks: A Comprehensive Survey”, *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, **9** (2022), 1406–1426. DOI: 10.1109/JAS.2022.105743.

[2] C. Trabelsi, O. Bilaniuk, Y. Zhang, et al., “Deep Complex Networks”, International Conference on Learning Representations (ICLR) (Vancouver), 2018.

[3] M. Arjovsky, A. Shah, Y. Bengio, “Unitary Evolution Recurrent Neural Networks”, Proceedings of the 33rd International Conference on Machine Learning (ICML), 2016, 1120–1128.

[4] E. K. Cole, J. Y. Cheng, J. M. Pauly, S. S. Vasanawala, “Analysis of Deep Complex-Valued Convolutional Neural Networks for MRI Reconstruction and Phase-Focused Applications”, *Magnetic Resonance in Medicine*, **86** (2021), 1093–1109. DOI: 10.1002/mrm.28733.

Received on October 18, 2026

Применимость линейных методов снижения размерности для приближенного поиска ближайших соседей на запросах вне исходного распределения

П. А. Алисейчик*, Е. А. Снегова‡

Исследуется применение линейных методов снижения размерности и квантования для ускорения приближённого поиска ближайших соседей (ANNS) при различии распределений индексируемых векторов и запросов. Показано, что отбрасывание компонент, малых для индексируемых векторов, может приводить к существенной ошибке скалярного произведения на запросах вне исходного распределения (OOD). Предлагается последовательное разложение пространства на ортогональные подпространства, позволяющее учитывать компоненты, значимые для OOD-запросов. На базе Text-to-Image размерности 200 предложенный подход сокращает объём хранения векторов в 1,67 раза и ускоряет поиск в 1,14 раза по сравнению с PCA-квантованием.

Ключевые слова: приближённый поиск ближайших соседей, снижение размерности, запросы вне исходного распределения, линейные преобразования, квантование.

1. Введение

Приближённый поиск ближайших соседей (Approximate Nearest Neighbor Search, ANNS) широко применяется в векторных поисковых системах и мультимодальных приложениях. Для ускорения поиска используются методы снижения размерности, позволяющие сократить объём хранимых данных и вычислительную сложность. К ним относятся метод главных компонент (Principal Component Analysis, PCA) и другие линейные преобразования; обзор и сравнительная оценка таких методов представлены в работе [1]. Ограничения методов оптимизации операций сравнения расстояний (Distance Comparison Operations, DCO) исследуются в [2].

* *Алисейчик Павел Александрович* — к. ф.-м. н., в. н. с. кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: paa.idea@mail.ru.

Aliseychik Pavel A. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Снегова Елена Александровна* — к. ф.-м. н., e-mail: lenasnegova@gmail.com.

Snegova Elena A. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Важной проблемой является различие распределений индексируемых векторов и запросов (Out-of-Distribution, OOD). В методе LeanVec [3] для их обработки применяются отдельные линейные проекции запросов и ключей.

2. Постановка задачи и анализ линейного снижения размерности

Рассматривается поиск k ближайших векторов из базы $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^D$, для запроса $y \in \mathbb{R}^D$. В данной работе рассматриваются поиск по скалярному произведению (IP) и евклидову расстоянию (L2).

Как правило, рассматриваются центрированные векторы. Пусть x_0 и y_0 — математические ожидания распределений ключей и запросов. После представления $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$ получаем

$$x^T y = x_1^T y_1 + x_1^T y_0 + x_0^T y. \tag{1}$$

Слагаемое $x_1^T y_0$ предварительно вычисляется для ключей, а $x_0^T y$ — один раз для запроса. Далее рассматриваются центрированные векторы x_1 и y_1, обозначаемые x и y.

Снижение размерности обычно строится по распределению индексируемых векторов, например с помощью PCA [1] и обучаемых преобразований [3]. Рассмотрим ортогональное разложение $V = V_2 \oplus V_3$, где V_2 соответствует значимым для ключей координатам:

$$x = P_2(x) + P_3(x). \tag{2}$$

Если $\|P_3(x)\|_2$ мала, соответствующие координаты можно отбросить. Однако для OOD-запросов $\|P_3(y)\|_2$ может быть значительной. В силу ортогональности

$$x^T y = P_2(x)^T P_2(y) + P_3(x)^T P_3(y). \tag{3}$$

Поэтому малая проекция ключа не гарантирует малой ошибки скалярного произведения.

Для учёта компонент, значимых для запросов, повторно разделим $V_3 = V_4 \oplus V_5$, выбрав V_5 так, чтобы проекции запросов на него имели малую норму. Тогда

$$P_3(x)^T P_3(y) = P_4(x)^T P_4(y) + P_5(x)^T P_5(y), \tag{4}$$

откуда

$$x^T y = P_2(x)^T P_2(y) + P_4(x)^T P_4(y) + P_5(x)^T P_5(y). \tag{5}$$

При малой $\|P_3(x)\|_2$ последнее слагаемое можно отбросить, если его вклад для запросов также невелик. Ошибка зависит от норм проекций и их взаимной ориентации.

Квантование позволяет дополнительно сократить объём хранения и ускорить вычисление скалярных произведений за счёт уменьшения числа бит на координату.

Эксперименты проведены на Yandex Text-to-Image (10^6 векторов размерности 200 и 10^5 текстовых запросов из стандартного публичного набора) с использованием графа Vamana и оптимизаций для OOD.

Таблица 1: Результаты поиска на Text-to-Image (IP, recall@10 $\approx 0{,}95$)

Способ квантования	Размер вектора, байт	Запросов в секунду
Без квантования, float32	800	5500
PCA, uint8	200	12300
Предлагаемый метод: 40 значений uint8 и 160 значений по 4 бита	120	14000

При сопоставимом качестве поиска (recall@10 $\approx 0{,}95$) предложенный метод по сравнению с PCA-квантованием сокращает объём хранения векторов в 1,67 раза и ускоряет поиск в 1,14 раза.

Дополнительно проведены эксперименты на базе SIFT-1M (10^6 векторов размерности 128, метрика L2). Для моделирования OOD случайный поворот и смещение применялись к запросам. Поиск также выполнялся по графу Vamana с оптимизациями для OOD.

Таблица 2: Результаты поиска на базе SIFT-1M (L2, OOD, recall $\approx 0{,}95$)

Метод	Размер вектора, байт	Запросов в секунду
float32, полная размерность	512	~ 8500
PCA, dim=64	260	~ 3800
Предлагаемый метод, dim=64	260	~ 12400

Список литературы

[1] Z. Wang, H. Xiong, Q. Wang, Z. He, P. Wang, T. Palpanas, W. Wang, “Dimensionality-Reduction Techniques for Approximate Nearest Neighbor Search: A Survey and Evaluation”, *IEEE Data Engineering Bulletin*, **48**:3 (2024), 63–80.

[2] Z. Zheng, Y. Zeng, C. Liu, Y. Chi, B. Yang, Y. Tong, “Distance Comparison Operations Are Not Silver Bullets in Vector Similarity Search: A Benchmark Study on Their Merits and Limits”, *Proceedings of the IEEE 42nd International*

Conference on Data Engineering, 2026, 2063–2076. DOI: 10.1109/ICDE65706.2026.00156.

[3] M. Tepper, I. S. Bhati, C. Aguerrebere, M. Hildebrand, T. L. Willke, "LeanVec: Searching Vectors Faster by Making Them Fit", *Transactions on Machine Learning Research*, **2024** (2024).

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Applicability of Linear Dimensionality Reduction Methods to Approximate Nearest Neighbor Search with Out-of-Distribution Queries

P. A. Aliseychik, E. A. Snegova

We study linear dimensionality reduction and quantization for approximate nearest neighbor search (ANNS) when the distributions of indexed vectors and queries differ. We show that discarding components that are small for indexed vectors may cause significant dot-product errors for out-of-distribution (OOD) queries. We propose a sequential decomposition into orthogonal subspaces to account for components important to OOD queries. On the 200-dimensional Text-to-Image dataset, the proposed approach reduces vector storage by a factor of 1.67 and accelerates search by a factor of 1.14 compared with PCA-based quantization.

Keywords: approximate nearest neighbor search, dimensionality reduction, out-of-distribution queries, linear transformations, quantization.

References

[1] Z. Wang, H. Xiong, Q. Wang, Z. He, P. Wang, T. Palpanas, W. Wang, "Dimensionality-Reduction Techniques for Approximate Nearest Neighbor Search: A Survey and Evaluation", *IEEE Data Engineering Bulletin*, **48**:3 (2024), 63–80.

[2] Z. Zheng, Y. Zeng, C. Liu, Y. Chi, B. Yang, Y. Tong, "Distance Comparison Operations Are Not Silver Bullets in Vector Similarity Search: A Benchmark Study on Their Merits and Limits", *Proceedings of the IEEE 42nd International Conference on Data Engineering*, 2026, 2063–2076. DOI: 10.1109/ICDE65706.2026.00156.

[3] M. Tepper, I. S. Bhati, C. Aguerrebere, M. Hildebrand, T. L. Willke, "LeanVec: Searching Vectors Faster by Making Them Fit", *Transactions on Machine Learning Research*, **2024** (2024).

Received on November 9, 2026

Временная локализация технических действий в видеозаписях сумо с использованием различных представлений видеоданных

Г. И. Балтаев*, А. П. Рыжов‡

Исследуется временная локализация двух приёмов в полных видеозаписях сумо. Для ActionFormer сравниваются признаки YOLO-Pose, RGB-I3D и VideoMAE. Совместное дообучение VideoMAE-H и временных адаптеров даёт лучший результат: mAP 83.57% при tIoU 0.50 и 57.43% в среднем по пяти порогам.

Ключевые слова: временная локализация действий, сумо, компьютерное зрение, ActionFormer, VideoMAE, AdaTAD.

1. Введение

Методы интеллектуального анализа данных успешно применяются в спорте высших достижений: обзор описывает обработку изображений и сигналов, моделирование и планирование [3]. Задачи и специфика вида спорта определяют выбор технологий. Одна из распространённых задач видеоанализа — временная локализация значимых событий, то есть определение типа и границ действия в непрерывной записи.

Цель работы — сопоставить представления видеоданных и способы их адаптации при общем детекторе ActionFormer [1], оценивая распознавание и точность временных границ для выбора наилучшего инструмента для временной локализации приемов в сумо.

Для видео $V = (I_t)_{t=1}^{T}$, где I_t — кадр с номером t, а T — общее число кадров, требуется найти обнаружения

$$\widehat{Y} = \{(s_i, e_i, c_i, p_i)\}_{i=1}^{N},$$

* *Балтаев Глеб Иркинович* — студент факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: st02220065@gse.cs.msu.ru.

Baltaev Gleb Irkinovich — Student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Рыжов Александр Павлович* — д. т. н., профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: ryjov@cs.msu.ru.

Ryzhov Alexander Pavlovich — Professor, Doctor of Engineering, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

где $[s_i, e_i)$ — интервал, c_i — класс действия, p_i — уверенность. Целевые классы — `cosinage` и `csuciminage`; остальные кадры относятся к фону.

2. Данные и методы

Используются восемь записей: четыре обучающие с повторениями приёмов и изменением ориентации борцов и четыре тестовые с полноценными схватками. В обучающих записях около 40000 кадров, в тестовых — около 10000; съёмка ведётся двумя камерами. Размечены интервалы целевых действий. Для ActionFormer сравниваются три представления.

YOLO-Pose. Сравниваются исходные и нормализованные относительно общей области координаты ключевых точек. Проверяются окна 200–500 кадров с разными перекрытиями и смесь фрагментов 50–1000 кадров.

RGB-I3D. Предобученная на Kinetics-400 модель ResNet-50 извлекает признаки размерности 2048. Сравниваются исходный и дообученный на видео сумо кодировщики; детектор обучается на сохранённых признаках.

VideoMAE и AdaTAD. Сравниваются VideoMAE-S и VideoMAE-H с адаптацией через TIA (Temporal-Informative Adapter, темпорально-информативный адаптер) [2]: обучение только адаптеров, совместное обучение адаптеров и кодировщика и полное дообучение без адаптеров. VideoMAE-S обучался совместно с обучением адаптера. Применяется Soft-NMS.

3. Полученные результаты

Для каждого класса вычисляется AP (Average Precision, средняя точность) — площадь под интерполированной кривой «точность–полнота»; mAP (mean Average Precision) — среднее AP по двум классам. Обнаружение засчитывается при совпадении класса и достаточном временном пересечении:

$$\mathrm{tIoU}(S_p, S_g) = \frac{|S_p \cap S_g|}{|S_p \cup S_g|}.$$

Здесь S_p и S_g — предсказанный и размеченный интервалы, $|S|$ — длительность в кадрах; tIoU — temporal intersection over union. Сопоставление однозначное. Среднее mAP считается по порогам $\mathcal{T} = \{0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90\}$ и обозначается mAP_5.

Для нормализованных YOLO-Pose-признаков лучшее окно — 500 кадров с перекрытием 25 кадров (табл. 1): mAP_5 равна 48.76% против 42.40% на исходных координатах. Обучение на смеси длин даёт 40.52%.

Таблица 1: Результаты с общим детектором ActionFormer, %

Представление и режим обучения	mAP@0.50	mAP_5
YOLO-Pose, исходные координаты	65.42	42.40
YOLO-Pose, норм., окно 500 кадров	70.18	48.76
YOLO-Pose, норм., разные длины	66.75	40.52
RGB-I3D, фиксированный кодировщик	52.16	31.94
RGB-I3D, предварительное дообучение	60.49	31.20
VideoMAE-S	69.07	33.23
VideoMAE-H, только адаптеры	82.89	53.72
VideoMAE-H, веса и адаптеры	**83.57**	**57.43**
VideoMAE-H, без адаптеров	59.34	32.09

Поскольку меняются признаки и фрагментация, эффект нельзя приписать только нормализации.

Дообучение RGB-I3D повышает mAP@0.50 с 52.16 до 60.49%, но снижает mAP_5 с 31.94 до 31.20%: точность границ при строгих порогах не улучшается.

Лучшая конфигурация — совместное дообучение VideoMAE-H и адаптеров: $mAP_5 = 57.43\%$, на 8.67 пункта выше YOLO-Pose и на 3.71 пункта выше обучения только адаптеров. mAP при порогах 0.50–0.90 составляет 83.57, 81.11, 72.52, 42.05 и 7.88%, что показывает сохраняющуюся проблему точного определения границ.

4. Заключение

Лучшее качество показывает совместное дообучение VideoMAE-H с адаптерами, тогда как YOLO-Pose остаётся более компактной альтернативой. Дальнейшая работа связана с уточнением границ и различением сходных приёмов.

Список литературы

[1] C.-L. Zhang, J. Wu, Y. Li, “ActionFormer: Localizing Moments of Actions with Transformers”, *Computer Vision – ECCV*, 2022, 492–510. DOI: 10.1007/978-3-031-19772-7_29.

[2] S. Liu, C.-L. Zhang, C. Zhao, B. Ghanem, “End-to-End Temporal Action Detection with 1B Parameters Across 1000 Frames”, *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2024, 18591–18601. DOI: 10.1109/CVPR52733.2024.01759.

[3] F. Hammes, A. Hagg, A. Asteroth, D. Link, “Artificial Intelligence in Elite Sports—A Narrative Review of Success Stories and Challenges”, *Frontiers in Sports and Active Living*, **4** (2022), 861466. DOI: 10.3389/fspor.2022.861466 .

Статья поступила 8 октября 2026 г.

Temporal Localization of Technical Actions in Sumo Videos Using Different Video Data Representations

G. I. Baltaev, A. P. Ryzhov

We study temporal localization of two actions in untrimmed sumo videos, comparing YOLO-Pose, RGB-I3D, and VideoMAE features for ActionFormer. Joint fine-tuning of VideoMAE-H and temporal adapters yields the best result: 83.57% mAP at tIoU 0.50 and 57.43% averaged over five thresholds.

Keywords: temporal action detection, sumo, computer vision, ActionFormer, VideoMAE, AdaTAD.

References

[1] C.-L. Zhang, J. Wu, Y. Li, “ActionFormer: Localizing Moments of Actions with Transformers”, *Computer Vision – ECCV*, 2022, 492–510. DOI: 10.1007/978-3-031-19772-7_29.

[2] S. Liu, C.-L. Zhang, C. Zhao, B. Ghanem, “End-to-End Temporal Action Detection with 1B Parameters Across 1000 Frames”, *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2024, 18591–18601. DOI: 10.1109/CVPR52733.2024.01759.

[3] F. Hammes, A. Hagg, A. Asteroth, D. Link, “Artificial Intelligence in Elite Sports—A Narrative Review of Success Stories and Challenges”, *Frontiers in Sports and Active Living*, **4** (2022), 861466. DOI: 10.3389/fspor.2022.861466.

Received on October 8, 2026

Миграция крупных программных проектов с использованием генеративного ИИ на современные кроссплатформенные технологии

А. А. Беляев*

Исследуются LLM-миграции двух C#-систем: EnergyCalc с Xamarin.Forms на Uno Platform и HouseBuilder с Xamarin.Forms и WPF/OpenTK на Godot. Схема оценки разделяет переиспользование ядра, создание хоста, участие LLM и сценарный паритет. В EnergyCalc сохранено 40–55% кода и пройдено 260 из 300 сценариев за 200 человеко-часов; в HouseBuilder переиспользовано 70–80% продуктового кода и пройдено 450 из 600 сценариев за 330 человеко-часов.

Ключевые слова: большие языковые модели, ИИ-агенты, миграция ПО, C#, Uno Platform, Godot.

1. Введение

При миграции системы требуется сохранить предметное ядро, заменив платформенный слой. Агент формирует изменения и использует сборку и тесты как обратную связь. Работы рассматривают взаимодействие с LLM [2] и крупномасштабные изменения [3], но не сопоставляют C#-миграции между UI/графическими платформами с разными границами ядра. В отличие от стандартного реинжиниринга [1], новизна работы — раздельный учёт ядра, нового хоста, участия LLM и паритета сценариев.

2. Методика

Строки кода, разметки, сцен и шейдеров подсчитаны в снимках от 05.10.2026. Сохранённым считался код библиотек и файлов с малыми адаптациями; диапазоны получены автоматическим сравнением и экспертной классификацией. Паритет — доля полностью пройденных равновесных

* *Беляев Артем Александрович* — Старший преподаватель, Кыргызско-Российский Славянский университет имени первого Президента Российской Федерации Б. Н. Ельцина, e-mail: a.a.beliaev@krsu.kg, ORCID: 0009-0004-2071-952X.

Beliaev Artem — Senior Lecturer, Kyrgyz-Russian Slavic University named after the First President of the Russian Federation B. N. Yeltsin.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

сценариев. Итерация — цикл “задача — изменение — сборка/тест — анализ”, иногда без полного теста; 30% циклов завершались автономно, 45% требовали подтверждения, 25% — исправления. Использовался Cursor с Grok 4.5/4.6; Claude Opus 5.x — для анализа и документации. Агенту были доступны репозиторий, терминал, сборка, тесты, приложение, скриншоты и Git без `push`. Токены не учитывались. Человеко-часы включают только труд участников: задачи и промпты 20%, контролируемое ожидание до 10%, анализ 20%, исправления 30%, тестирование 20%.

3. Миграция EnergyCalc на Uno Platform

Клиент EnergyCalc на Xamarin.Forms содержал 129 тыс. строк; решение на Uno Platform 6 [4] и .NET 9 — 119 тыс. Сохранены модель плана, расчётные библиотеки и API-клиент; 40–55% кода перенесено с сохранением логики. Разработчик/BA и QA за 1,5 месяца затратили 200 человеко-часов. Пройдено 260 из 300 сценариев (86,7%). Две подписки Cursor стоили 120 долл. при использовании около 80% лимитов.

4. Миграция HouseBuilder на Godot

В HouseBuilder Xamarin.Forms- и WPF/OpenTK-хосты заменены хостом Godot 4.7 .NET [5]. Доменный слой содержит 229 797 строк, исходный UI — 121 058, новый хост — 23 838. Контур 250–280 тыс. строк включает сохраняемые библиотеки и хост. Переиспользовано 70–80% продуктовых строк, но 5–15% UI/render; сходство переработанного GUI не превышает 55%. Back-разработчик, QA и BA за два месяца затратили 330 человеко-часов. Пройдено 450 из 600 сценариев (75%). Три подписки Cursor стоили 240 долл. при использовании около 80% лимитов.

5. Сравнение результатов

HouseBuilder сохранил ядро, но переработал GUI, тогда как Uno ближе к Xamarin.Forms. До работ команды оценили ручное достижение 80% функциональности при полной занятости. Это не контрольный эксперимент: состав и загрузка команд различались, поэтому коэффициент ускорения не вычислялся.

Таблица 1: Сравнительные показатели миграции

Показатель	EnergyCalc: Xamarin.Forms → Uno	HouseBuilder: Xamarin.Forms, WPF/OpenTK → Godot
Код	129 тыс. → 119 тыс.	контур 250–280 тыс.; хост 24 тыс.
Сохранено	40–55%	70–80% продукта; 5–15% UI/render
Команда; срок	2 человека; 1,5 мес.	3 человека; 2 мес.
Трудоёмкость	200 чел.-ч	330 чел.-ч
Сценарии	260/300 (86,7%)	450/600 (75%)
Подписки Cursor	120 долл.	240 долл.
Ручная оценка до работ	4 чел. × 6 мес.	6 чел. × 6–7 мес.

6. Ограничения и заключение

Исследование ограничено двумя проектами без контрольной ручной миграции и учёта токенов. Оно описывает практический результат, но не доказывает количественную эффективность LLM. Для такого вывода требуются одинаковые подвыборки задач, журнал времени и токенов и параллельное ручное выполнение. Полученные данные подтверждают применимость процесса с выделением ядра и обратной связью от сборки и тестов.

Список литературы

[1] E. J. Chikofsky, J. H. Cross II, “Reverse engineering and design recovery: A taxonomy”, *IEEE Software*, **7**:1 (1990), 13–17. DOI: 10.1109/52.43044.

[2] I. M, B. Omidvar-Tehrani, A. Anubhai, “Evaluating human–AI partnership for LLM-based code migration”, *CHI EA ’24*, 2024, 1–8. DOI: 10.1145/3613905.3650896.

[3] C. Ziftci et al., “Migrating code at scale with LLMs at Google”, *Companion Proceedings of the 33rd ACM International Conference on the Foundations of Software Engineering (FSE Companion ’25)*, ACM, New York, 2025, 162–173. DOI: 10.1145/3696630.3728542.

[4] Uno Platform, *Uno Platform documentation*, accessed 07.10.2026, https://platform.uno/docs/.

[5] Godot Engine, *Godot Engine documentation*, accessed 07.10.2026, https://docs.godotengine.org/ .

Статья поступила 8 октября 2026 г.

Generative AI-Assisted Migration of Large Software Projects to Modern Cross-Platform Technologies

A. Beliaev

Two LLM-assisted C# migrations are studied: EnergyCalc from Xamarin.Forms to Uno Platform and HouseBuilder from Xamarin.Forms and WPF/OpenTK to Godot. The assessment separates core reuse, host creation, LLM participation, and scenario parity. EnergyCalc retained 40–55% of code and passed 260 of 300 scenarios in 200 person-hours. HouseBuilder reused 70–80% of product code and passed 450 of 600 scenarios in 330 person-hours.

Keywords: large language models, AI agents, software migration, C#, Uno Platform, Godot.

References

[1] E. J. Chikofsky, J. H. Cross II, "Reverse engineering and design recovery: A taxonomy", *IEEE Software*, **7**:1 (1990), 13–17. DOI: 10.1109/52.43044.

[2] I. M, B. Omidvar-Tehrani, A. Anubhai, "Evaluating human–AI partnership for LLM-based code migration", *CHI EA '24*, 2024, 1–8. DOI: 10.1145/3613905.3650896.

[3] C. Ziftci et al., "Migrating code at scale with LLMs at Google", *Companion Proceedings of the 33rd ACM International Conference on the Foundations of Software Engineering (FSE Companion '25)*, ACM, New York, 2025, 162–173. DOI: 10.1145/3696630.3728542.

[4] Uno Platform, *Uno Platform documentation*, accessed 07.10.2026, https://platform.uno/docs/.

[5] Godot Engine, *Godot Engine documentation*, accessed 07.10.2026, https://docs.godotengine.org/.

Received on October 8, 2026

Применение больших языковых моделей для построения графов трудных жизненных ситуаций

И. О. Бергер*, Е. В. Битюцкая‡, Э. Э. Гасанов§, А. А. Херувимова¶, А. А. Хлебникова‖

Проведено сопоставление возможностей двух больших языковых моделей (DeepSeek и GPT-6) при автоматическом построении направленных графов трудной жизненной ситуации (ТЖС) по ее текстовому описанию. На материале 10 описаний ТЖС получены 20 графов, оценивание которых проводилось по формальным и содержательным критериям с использованием метода LLM-as-a-Judge. Обе модели показали высокую формальную корректность, однако это не обеспечило содержательной адекватности.

Ключевые слова: трудная жизненная ситуация, большая языковая модель, графовое моделирование.

Финансирование. Исследование выполнено по междисциплинарному фундаментальному проекту «Анализ и синтез траекторий преодоле-

* *Бергер Ирина Олеговна* — м. н. с. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ioberger@ya.ru, ORCID: 0000-0003-0123-1014.

Berger Irina Olegovna — Junior Researcher, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Битюцкая Екатерина Владиславовна* — канд. психол. наук, доцент кафедры общей психологии ф. психологии МГУ, e-mail: bityutskaya_ew@mail.ru, ORCID: 0000-0001-6117-1063.

Bityutskaya Ekaterina Vladislavovna — Candidate of Psychological Sciences, Associate Professor, Department of General Psychology, Faculty of Psychology, Lomonosov Moscow State University.

§ *Гасанов Эльяр Эльдарович* — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

¶ *Херувимова Анна Алексеевна* — инженер кафедры общей психологии ф. психологии МГУ, e-mail: kheruvimova.a.a@gmail.com, ORCID: 0009-0003-8058-7728.

Kheruvimova Anna Alexeevna — Staff member, Department of General Psychology, Lomonosov Moscow State University.

‖ *Хлебникова Алёна Андреевна* — аспирант каф. общей психологии ф. психологии МГУ, e-mail: alena.epochta@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7427-8844.

Khlebnikova Alena Andreevna — PhD Student, Department of General Psychology, Faculty of Psychology, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

ния трудных жизненных ситуаций», поддержанному в рамках Конкурса научных проектов по перспективным междисциплинарным практико-ориентированным тематикам МГУ имени М.В.Ломоносова (2026 г.).

Введение. Необходимость системного изучения ТЖС предполагает учет состояний субъекта, его действий и возможных исходов ситуации. В связи с этим особую значимость приобретает разработка методов формализации, позволяющих создавать модели ТЖС: их компонентов и взаимосвязей. Мы полагаем, что одним из перспективных способов такой формализации является графовое моделирование. Представление ТЖС в виде направленного графа позволяет обозначить состояния, события, действия, ресурсы и цели в качестве вершин, а допустимые переходы между ними – в виде направленных ребер.

Развитие больших языковых моделей (LLM) открывает возможности для автоматизации такого преобразования, однако формально корректное построение графа еще не гарантирует содержательной адекватности полученной репрезентации. Таким образом, проблема исследования заключается в недостаточной изученности способности LLM преобразовывать текстовые описания ТЖС в направленные графы, одновременно удовлетворяющие формальным требованиям и сохраняющие содержательную логику исходной ситуации.

Цель исследования — выявить особенности формальной корректности и содержательной адекватности направленных графов ТЖС, созданных большими языковыми моделями DeepSeek и GPT-6 на основе исходных описаний ТЖС.

Гипотеза: формальная корректность графов ТЖС не гарантирует содержательной адекватности их репрезентации; различия между графами, построенными разными LLM, могут проявляться прежде всего в полноте моделирования существенных компонентов ситуации и логической организации направленных переходов между ними.

Определения. Направленный граф ТЖС — структура, в которой вершины обозначают события, состояния, действия, ресурсы или цели, а направленные ребра – допустимые переходы между ними. Обязательными условиями являлись наличие единственной стартовой вершины, обозначение целей и запрещенных вершин, классификация терминальных исходов и содержательная обоснованность всех элементов графа. Формальная корректность — соблюдение требований исходной инструкции к структуре и визуализации графа. Содержательная адекватность — соответствие графа исходному описанию ТЖС и согласованность представленных в нем направленных переходов. Логическая связность — согласованность переходов и возможность интерпретации графа как целостной структуры траекторий от начального состояния к альтернативным исходам.

Процедура. Материал составили 20 направленных графов, созданных DeepSeek и GPT-6 на основе десяти описаний ТЖС. Описания были получены с использованием методики структурированного описания ситуации [1]. Ситуации относились преимущественно к учебной и учебно-профессиональной деятельности (подготовка и защита выпускной квалификационной работы, сдача экзаменов, завершение обучения, практика и стажировка).

Обе модели получали идентичные запросы с описанием ТЖС, определениями элементов графа, правилами построения и требованиями к визуализации в формате SVG. Исследование имело пилотный сравнительный дизайн с парным сопоставлением: единицей сравнения выступала пара графов, созданных для одного и того же описания в одинаковых условиях генерации. Сравнение проводилось по формальным и содержательным критериям с использованием метода LLM-as-a-Judge: модель-эксперт (GPT-6) получала исходное описание и два обезличенных графа (А и Б) без сведений об авторстве; порядок предъявления был постоянным (DeepSeek — А, GPT-6 — В), что рассматривалось как возможный источник смещения.

Формальная корректность оценивалась по восьми бинарным параметрам (0/1): наличие единственной стартовой вершины; корректность направлений ребер и их соединений; определение и классификация терминальных вершин; выделение целей и запрещенных вершин; отсутствие дублирующихся элементов; соблюдение формата идентификаторов; соответствие подписей, легенды и визуальных обозначений; синтаксическая корректность SVG-кода и размеров изображения. Суммарная оценка от 0 до 8 баллов; достижимость вершин и согласованность траекторий анализировались отдельно, в рамках логической связности.

Содержательная оценка включала четыре критерия с трехбалльной шкалой (0–2): С1 — семантическая обоснованность (соответствие вершин и переходов описанию, корректность интерпретации компонентов); С2 — полнота моделирования (представленность значимых компонентов ситуации и промежуточных действий); С3 — логическая связность (достижимость вершин из старта, последовательность действий, согласованность переходов к исходам; единственная правильная траектория не предполагалась); С4 — отсутствие необоснованной избыточности (оправданность сложности структуры, дублирование, лишние элементы; меньшее количество вершин не считалось преимуществом). Максимальная суммарная содержательная оценка — 8 баллов. Анализ данных проводился с помощью описательной статистики. С учетом малого объема выборки основное внимание уделялось качественному характеру различий, а не статистической значимости.

Результаты. Формальная проверка показала высокий уровень соблюдения требований обеими моделями: в девяти из десяти пар оба графа получили максимальные 8 баллов, в одной паре DeepSeek получила 6 баллов, GPT-6 — 8. Суммарно это составило 78 из 80 баллов для DeepSeek и 80 из 80 для GPT-6; нарушения касались классификации максимального неуспеха и отсутствия запрещенной вершины. При этом в ряде графов DeepSeek с максимальной формальной оценкой обнаруживались недостижимые вершины и неоднозначные траектории, что указывает на необходимость разграничения формального соответствия и логической согласованности.

По содержательным оценкам графы GPT-6 превзошли графы DeepSeek в девяти из десяти пар (в одной паре преимущество было у DeepSeek — 8 против 7). Медианные оценки составили 4 балла для DeepSeek и 8 баллов для GPT-6, медиана парных различий — 3,5 балла, средние — 4,5 и 7,7 соответственно. По критериям суммарно (из 20 возможных баллов за 10 графов) DeepSeek и GPT-6 получили следующие оценки: по семантической обоснованности — 11 и 17, по полноте — 12 и 20, по логической связности — 8 и 20, по отсутствию избыточности — 14 и 20; итого 45 и 77. Наиболее выражены различия по логической связности: GPT-6 получила максимум во всех десяти ситуациях, DeepSeek — 8 баллов из 20.

Качественный анализ выявил повторяющиеся особенности: неполное отражение значимых компонентов ситуации (пропуск упоминавшихся в описании действий и событий); нарушения логики траектории; недостижимость отдельных вершин, ограничивающая интерпретацию графа как целостной системы траекторий; неоднозначная интерпретация исходной информации (представление предположительных обстоятельств как фактов, а возможных состояний — как обязательных этапов).

Обсуждение. Формальная корректность не гарантирует содержательной адекватности: даже графы с максимальными формальными оценками содержали смысловые недостатки, что требует различать техническое соответствие формату и качество смысловой организации. Логическая связность выступает ключевой характеристикой качества: наибольшие различия выявлены именно по этому критерию, причем они не всегда сопровождались различиями в полноте (например, в шестой паре обе модели получили максимум за полноту, но различались по организации переходов). Это позволяет предположить, что выделение релевантных элементов и построение согласованной структуры отношений – разные задачи формализации: модель может корректно определить компоненты, но связать их противоречиво.

Заключение. Обе исследованные языковые модели — DeepSeek и GPT-6 — продемонстрировали высокий уровень формального соответствия графов инструкции, однако формальная корректность не во всех случаях сопровождалась содержательной адекватностью. По результатам автоматизированного оценивания графы GPT-6 получили более высокие суммарные содержательные оценки в девяти из десяти пар. Наиболее выраженные различия выявлены по критерию логической связности. Результаты подтверждают перспективность применения LLM для графовой формализации ТЖС. Вместе с тем выявленные различия между моделями носят предварительный характер и требуют независимой экспертной проверки.

Список литературы

[1] Bityutskaya E. V., Gasanov E. E., Khazova K. V., Patrashkin N. A., "Classifying the perception of difficult life tasks: Machine learning and/or modeling of logical processes", *Psychology in Russia: State of the Art*, **17**:2 (2024), 64–84.. DOI: 10.11621/pir.2024.0205 .

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

Using Large Language Models to Construct Graphs of Difficult Life Situations

I. O. Berger, E. V. Bityutskaya, E. E. Gasanov, A. A. Kheruvimova, A. A. Khlebnikova

We compared the capabilities of two large language models (DeepSeek and GPT-6) in the automated construction of directed graphs representing "difficult life situations" (DLS) based on their textual descriptions. Using 10 such descriptions, we generated 20 graphs and evaluated them according to both formal and content-related criteria, employing an "LLM-as-a-Judge" approach. While both models demonstrated a high degree of formal correctness, this did not guarantee the adequacy of their content.

Keywords: difficult life situation, large language model, graph modeling.

Received on November 8, 2026

Восстановление данных на основе ассоциативных правил

А. Д. Богданов*, А. П. Рыжов‡

Предложен интерпретируемый метод импутации категориальных данных на основе ассоциативных правил. Эксперименты на Car Evaluation, Nursery и Mushrooms показали его конкурентоспособность с MissForest и превосходство над импутацией модой.

Ключевые слова: качество данных, пропущенные значения, импутация, ассоциативные правила, категориальные признаки, Apriori.

1. Введение

Проблема качества данных является определяющим фактором успешности прикладных систем машинного обучения. Ежегодные мировые издержки от использования некачественных данных исчисляются триллионами долларов [1], при этом ценность представляют исключительно очищенные и верифицированные выборки [2]. Критичность этой проблемы подтверждается высокой уязвимостью алгоритмов к зашумлению: искажение или «отравление» всего лишь 0,5% обучающих данных способно более чем вдвое снизить качество работы моделей [3–5].

В то же время в реальных прикладных задачах качество данных радикально отличается от нормативных требований. Так, в медицинских информационных системах доля пропусков в сырых выборках может достигать 58% [6], а пренебрежение этапом предобработки приводит к провалу подавляющего большинства индустриальных ИИ-проектов [7]. Среди дефектов данных пропуски являются наиболее массовыми. Настоящая работа посвящена исследованию проблемы импутации пропущенных категориальных значений в табличных наборах данных на основе интерпретируемого аппарата ассоциативных правил.

В докладе рассмотрены 5 основных подходов к обработке пропущенных значений [8]: **удаление данных** (попарное и списочное) с риском

* *Богданов Арсений Денисович* — студент, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: bogdanov.arseny.2005@gmail.com.

Bogdanov Arseny Denisovich — Student, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Рыжов Александр Павлович* — д. т. н., профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, e-mail: ryjov@cs.msu.ru.

Ryzhov Alexander Pavlovich — D.Sc. in Engineering, Professor, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

смещения и потери информации; **заполнение статистическими оценками** (мода, среднее), часто игнорирующее межпризнаковые корреляции; **методы машинного обучения** со вспомогательной моделью, чувствительные к гиперпараметрам и выбросам; **нейронные сети**, требующие больших объемов обучающих данных; **обработка на основе обучения** с извлечением латентных представлений, характеризующаяся высокой сложностью и низкой прозрачностью.

Большинство подходов обладают высокой вычислительной сложностью или низкой интерпретируемостью. Особый интерес представляют данные с категориальными признаками, требующими предварительной кодировки. Целью данной работы является разработка и сравнение с имеющимися методами (импутация модой и MissForest [9]) алгоритма по интерпретируемому заполнению пропущенных категориальных значений на основе ассоциативных правил вида «Если ..., то ...».

2. Алгоритм импутации пропущенных значений

Предлагаемый алгоритм включает следующие этапы: 1) перевод строк таблицы в транзакции приписыванием префикса-названия колонки к значению для исключения коллизий одинаковых значений в разных колонках; 2) поиск ассоциативных правил с единичным термом в правой части алгоритмом Apriori: $\text{supp} = 0.01$ при малом числе признаков, иначе $\text{supp} = 0.1$; $\text{conf} = 0.5$ (данные пороги подобраны эвристически); 3) для каждого пропуска сопоставление заполненных признаков строки с левыми частями правил и импутация правой частью наиболее подходящего правила; 4) при отсутствии подходящего правила — импутация модой как частным случаем правила длины 1 с наибольшей поддержкой; 5) обратное преобразование данных в табличный вид с удалением служебных префиксов.

3. Экспериментальное исследование

Эксперименты проводились на наборах данных Car Evaluation, Nursery и Mushrooms с искусственно внесенными полностью случайными (MCAR) пропусками в объеме 15%, 20% и 30% от всех значений. Сравнивались предложенный алгоритм, MissForest и импутация модой. Оценка качества выполнена по метрикам Accuracy weighted и Precision weighted (табл. 1).

4. Результаты и выводы

При 15–20% пропусков на данных Car Evaluation и Nursery предложенный алгоритм превосходит MissForest по Accuracy, а на Car Evaluation —

Таблица 1: Сравнение методов по метрикам Accuracy и Precision (weighted)

		Accuracy			**Precision**		
Датасет	Пропуск	Acc. прав.	MissForest	Мода	Acc. прав.	MissForest	Мода
Car Evaluation	15%	0.3672	0.3222	0.3211	0.3575	0.3251	0.1703
	20%	0.3608	0.3369	0.3292	0.4614	0.3299	0.1633
	30%	0.3360	0.3565	0.3360	0.2107	0.3487	0.2107
Mushrooms	15%	0.6623	0.7718	0.5755	0.7060	0.7707	0.5322
	20%	0.6694	0.7854	0.5798	0.6888	0.7839	0.5356
	30%	0.6288	0.7932	0.5749	0.6495	0.7920	0.5329
Nursery	15%	0.4207	0.3468	0.3105	0.3266	0.3467	0.1283
	20%	0.3999	0.3637	0.3107	0.3092	0.3678	0.1454
	30%	0.3635	0.3803	0.3136	0.2331	0.3933	0.1150

также по Precision, подтверждая способность правил улавливать межпризнаковые связи. Экспериментально метод показывает нижнюю границу точности на уровне моды (например, при 30% на Car Evaluation). Восстановление логически обосновано импликациями с метриками supp и conf, формируя базу знаний о структуре данных. Минимальный порог $\text{supp}_{\min}$ отсекает шумовые транзакции, обеспечивая устойчивость к выбросам, при этом алгоритм работает напрямую с категориальными значениями без предварительного кодирования.

Список литературы

[1] Redman T. C., *Bad Data Costs the U.S. $3 Trillion Per Year*, Harvard Business Review, 2016.

[2] Chahal H., Fedasiuk R., Flynn C., *Messier than Oil: Assessing Data Advantage in Military AI*, CSET, 2020.

[3] Rando J., Tramèr F., *Universal Jailbreak Backdoors from Poisoned Human Feedback*, 2024, arXiv: 2311.14455.

[4] Wan A., Wallace E., Shen S., Klein D., *Poisoning Language Models During Instruction Tuning*, 2023, arXiv: 2305.00944.

[5] Souly A., Rando J., Chapman E. et al., *Poisoning Attacks on LLMs Require a Near-Constant Number of Poison Samples*, 2025, arXiv: 2510.07192.

[6] Горный Б. Э., Рыжов А. П., Строгалов А. С. и др., "Оценка риска неблагоприятного клинического исхода методами углубленного анализа данных", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **25**:2 (2021), 23–45.

[7] Nanda MIT, *The GenAI Divide: State of AI in Business*, 2025 `https://mlq.ai/media/quarterly_decks/v0.1_State_of_AI_in_Business_2025_Report.pdf`.

[8] Zhou Y., Aryal S., Bouadjenek M. R., *A Comprehensive Review of Handling Missing Data*, 2024, arXiv: 2404.04905.

[9] Stekhoven D. J., Bühlmann P., "MissForest—non-parametric missing value imputation for mixed-type data", *Bioinformatics*, **28**:1 (2012), 112–118, arXiv: 1105.0828.

Статья поступила 26 сентября 2026 г.

Data Imputation Based on Association Rules

A. D. Bogdanov, A. P. Ryzhov

An interpretable method for categorical data imputation based on association rules is proposed. Experiments on Car Evaluation, Nursery, and Mushrooms benchmarks demonstrate its competitiveness with MissForest and superiority over mode imputation.

Keywords: data quality, missing values, data imputation, association rules, categorical features, Apriori.

References

[1] Redman T. C., *Bad Data Costs the U.S. $3 Trillion Per Year*, Harvard Business Review, 2016.

[2] Chahal H., Fedasiuk R., Flynn C., *Messier than Oil: Assessing Data Advantage in Military AI*, CSET, 2020.

[3] Rando J., Tramèr F., *Universal Jailbreak Backdoors from Poisoned Human Feedback*, 2024, arXiv: 2311.14455.

[4] Wan A., Wallace E., Shen S., Klein D., *Poisoning Language Models During Instruction Tuning*, 2023, arXiv: 2305.00944.

[5] Souly A., Rando J., Chapman E. et al., *Poisoning Attacks on LLMs Require a Near-Constant Number of Poison Samples*, 2025, arXiv: 2510.07192.

[6] Gornyi B. E., Ryjov A. P., Strogalov A. S. et al., "Assessment of Adverse Clinical Outcome Risk via In-Depth Data Analysis Methods", *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **25**:2 (2021), 23–45 (In Russian).

[7] Nanda MIT, *The GenAI Divide: State of AI in Business*, 2025 `https://mlq.ai/media/quarterly_decks/v0.1_State_of_AI_in_Business_2025_Report.pdf`.

[8] Zhou Y., Aryal S., Bouadjenek M. R., *A Comprehensive Review of Handling Missing Data*, 2024, arXiv: 2404.04905.

[9] Stekhoven D. J., Bühlmann P., "MissForest—non-parametric missing value imputation for mixed-type data", *Bioinformatics*, **28**:1 (2012), 112–118, arXiv: 1105.0828.

Received on September 26, 2026

ComNetX: локальная иерархическая адаптация методов обнаружения сообществ в динамических графах

Г. В. Боков*, А. Ю. Коновалов‡, А. С. Упорова§, А. С. Дробышев¶, Я. Г. Егоров‖

Представлен алгоритм ComNetX, адаптирующий статические методы обнаружения сообществ к динамическим графам посредством локального обновления иерархии разбиений. Поддерживаются топологические и нейросетевые методы, в том числе использующие признаки вершин. Установлены условия сохранения вложенности разбиений и модулярности; получены оценки времени и памяти. На пяти графах ускорение относительно повторного запуска Leiden составляет 6,60–98,72 раза при абсолютной разности итоговых модулярностей 0,0035–0,0213.

Ключевые слова: динамический граф, обнаружение сообществ, иерархия разбиений, модулярность.

Постановка задачи. Задача обнаружения сообществ заключается в разбиении вершин графа на группы с более высокой плотностью связей внутри групп, чем между ними. В динамическом графе разбиение необходимо обновлять после каждого пакета изменений ребер. Требуется сократить вычислительные затраты по сравнению с полным пересчетом разбиения без существенной потери качества.

Пусть $V = \{1, \ldots, n\}$ — фиксированное множество вершин, $A_t \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\geq 0}$ — матрица смежности после t-го пакета изменений, $\Delta_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ —

* *Боков Григорий Владимирович* — Исследовательский центр в сфере ИИ МГУ, e-mail: grigoriy.bokov@math.msu.ru.

Bokov Grigoriy — AI Research Center, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Коновалов Александр Юрьевич* — Исследовательский центр в сфере ИИ МГУ, e-mail: alexandr.konoval@gmail.com.

Konovalov Aleksandr — AI Research Center, Lomonosov Moscow State University.

§ *Упорова Анна Сергеевна* — Исследовательский центр в сфере ИИ МГУ, e-mail: annuporova2003@gmail.com.

Uporova Anna — AI Research Center, Lomonosov Moscow State University.

¶ *Дробышев Александр Сергеевич* — Исследовательский центр в сфере ИИ МГУ, e-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru.

Drobyshev Alexander — AI Research Center, Lomonosov Moscow State University.

‖ *Егоров Ярослав Григорьевич* — Исследовательский центр в сфере ИИ МГУ, e-mail: egorovyg@my.msu.ru.

Egorov Iaroslav — AI Research Center, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

матрица приращений, тогда $A_t = A_{t-1} + \Delta_t$. Допускаются отрицательные приращения при неотрицательности итоговых весов. Признаки вершин, если они используются, задаются неизменяемой матрицей $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$, где d — число признаков.

Качество разбиения оценивается модулярностью [1]. Для графа на h вершинах с матрицей смежности $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{h \times h}$ и метками сообществ $c \in \{1, \ldots, h\}^h$ она задается формулой:

$$Q_\gamma(A, c) = \frac{1}{m} \sum_{i,j=1}^{h} \left(A_{ij} - \gamma \frac{k_i^{\text{out}} k_j^{\text{in}}}{m} \right) \mathbf{1}\{c_i = c_j\}, \tag{1}$$

где $m = \sum_{i,j} A_{ij} > 0$, $k_i^{\text{out}} = \sum_j A_{ij}$, $k_j^{\text{in}} = \sum_i A_{ij}$ — исходящие и входящие взвешенные степени, $\gamma > 0$ — параметр резолюции, $\mathbf{1}\{\cdot\}$ — индикатор.

Алгоритм ComNetX. ComNetX вызывает статический метод $\mathcal{B}$ на сжатом подграфе и хранит $L \in \mathbb{N}$ разбиений $\mathcal{P}_t^\ell$, где t — номер пакета обновлений, $\ell = 0, \ldots, L-1$ — уровень. Результатом служит разбиение $\mathcal{P}_t^0$. Leiden [2] строит начальное разбиение $\mathcal{P}_0^0$. Для получения каждого из следующих $L-1$ уровней он применяется к графу сообществ предыдущего уровня, после чего найденные метки переносятся на V. Метки $C_t^\ell \in \mathbb{Z}^n$ равны минимальным номерам вершин сообществ: $\mathcal{P}_t^\ell = \big\{\{v \in V : C_t^\ell(v) = a\} : a \in \mathbb{Z}\big\} \setminus \{\varnothing\}$. Пакет обновлений обрабатывается в 4 этапа:

1. Выбор областей. Множества $S_t = \bigcup_{i,j \in V : (\Delta_t)_{ij} \neq 0} \{i, j\}$ и $B_t = \{v \in V : \operatorname{dist}(v, S_t) \leq r\}$ задают концы измененных ребер и их окрестность радиуса $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ в A_t без учета весов и направлений. Области пересчета $U_t^\ell = \bigcup_{H \in \mathcal{P}_{t-1}^\ell : H \cap B_t \neq \varnothing} H$ фиксируются на весь обрабатываемый пакет; этапы 2–4 выполняются от уровня 0 к $L-1$.

2. Выделение атомов сжатия. Атомами называются непустые множества вершин, сжимаемые в одну вершину. При $\ell = 0$ строится $\mathcal{G}_t^0 = \big\{\{v\} : v \in B_t\big\} \cup \big\{(H \cap U_t^0) \setminus B_t : H \in \mathcal{P}_{t-1}^{L-1}\big\} \setminus \{\varnothing\}$, причем вершины B_t не сжимаются. При $\ell > 0$ обновленные сообщества сжимаются: $\mathcal{G}_t^\ell = \{H \in \mathcal{P}_t^{\ell-1} : H \subseteq U_t^\ell\}$.

3. Построение сжатого графа. Пусть $\mathcal{G}_t^\ell = \{G_1^\ell, \ldots, G_{k_\ell}^\ell\}$, $k_\ell = |\mathcal{G}_t^\ell|$, а $P_\ell \in \{0,1\}^{k_\ell \times n}$ — матрица принадлежности, $(P_\ell)_{ai} = \mathbf{1}\{i \in G_a^\ell\}$. Матрица смежности $\bar{A}_\ell = P_\ell A_t P_\ell^\top \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{k_\ell \times k_\ell}$ и, при наличии X, матрица признаков $\bar{X}_\ell \in \mathbb{R}^{k_\ell \times d}$ задают сжатый граф на уровне ℓ. Внутренние ребра образуют петли, а признаки вершин усредняются по атомам.

4. Пересчет и перенос меток. Метод $\mathcal{B}$ находит сообщества в сжатом графе. Все исходные вершины атомов одного сообщества получают метку, равную минимальному номеру среди этих вершин. Вне области пересчета U_t^ℓ метки сохраняются.

Теоретические свойства. Сохраняется вложенность $\mathcal{P}_t^0 \preceq \cdots \preceq \mathcal{P}_t^{L-1}$, поскольку области удовлетворяют $U_t^{\ell-1} \subseteq U_t^{\ell}$ при $\ell > 0$, обновленные сообщества сжимаются целиком и не разделяются на следующем уровне, а вне областей пересчета метки не меняются. Подграф на U_t^{ℓ} содержит все ребра между его вершинами. Сохранение внутренних ребер атомов в виде петель обеспечивает неизменность суммарного веса, а входящие и исходящие степени суммируются по атомам. Поэтому при положительном суммарном весе и одинаковом γ из формулы (1) следует равенство модулярностей разбиения сжатого графа и его переноса на U_t^{ℓ}.

Оценки времени и памяти. Для заданной A_t время обработки пакета без учета вызовов $\mathcal{B}$ составляет $O(r(n+s_t)+L[(n+s_t)\log(2+n+s_t)+F])$, где s_t — число ненулевых элементов A_t, $F = nd$ при наличии X и 0 иначе. Для хранения графа, меток и признаков требуется $O(s_t + Ln + F)$ памяти.

Экспериментальные результаты. Полный пересчет и ComNetX сравнивались с Leiden на графах Cora, ACM, CiteSeer, PubMed и ArxivMath[1] и с S^{2}CAG [3] на графах PubMed и ArxivMath ($L = 3$, $r = 1$, $\gamma = 1$)[2].

Сначала загружался граф из 99,9% перемешанных записей ребер, затем оставшиеся 0,1% подавались обоим методам за 5–10 непустых последовательных пакетов обновлений примерно равного размера.

Ускорение вычислялось как отношение суммарных времен полного пересчета и ComNetX без учета времени, затраченного на добавление ребер, преобразование форматов и оценку качества. Итоговая модулярность вычислялась после обработки последнего пакета. Leiden запускался на всем графе с предыдущим разбиением.

	Итоговая модулярность Leiden		Ускорение, раз		
Граф	Полный	ComNetX	Leiden	S^{2}CAG, 5 пак.	S^{2}CAG, 10 пак.
Cora	0,8240	0,8141	6,60	—	—
ACM	0,8255	0,8042	7,54	—	—
CiteSeer	0,8932	0,8897	8,43	—	—
PubMed	0,7872	0,7822	30,12	3,44	3,37
ArxivMath	0,8858	0,8812	98,72	37,63	70,40

Leiden обрабатывал 8 непустых пакетов на CiteSeer и 10 на остальных графах. Для S^{2}CAG указана медиана ускорений пяти пар запусков с фиксированными случайными признаками: $X_{ij} \sim N(0,1)$, $d = 64$, $seed = 42$.

Благодарности. Работа поддержана Минэкономразвития России (соглашение № 139-15-2025-012, идентификатор 000000C313925P4H0002). Вычисления выполнены на суперкомпьютере МГУ-270.

[1] Графы взяты из следующих библиотек: Cora, ACM, CiteSeer — Awesome Deep Graph Clustering; PubMed — PyTorch Geometric; ArxivMath — Data4TGC.

[2] Реализация: `https://github.com/mpailab/comnetx`.

Список литературы

[1] M. E. J. Newman, M. Girvan, “Finding and evaluating community structure in networks”, *Physical Review E*, **69**:2 (2004), 026113. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.026113.

[2] V. A. Traag, L. Waltman, N. J. van Eck, “From Louvain to Leiden: guaranteeing well-connected communities”, *Scientific Reports*, **9** (2019), 5233. DOI: 10.1038/s41598-019-41695-z.

[3] X. Lin, R. Yang, H. Zheng, X. Ke, “Spectral Subspace Clustering for Attributed Graphs”, *Proceedings of the 31st ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, **1**, ACM, 2025, 789–799. DOI: 10.1145/3690624.3709207 .

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

ComNetX: Local Hierarchical Adaptation for Batched Dynamic Community Detection

G. Bokov, A. Konovalov, A. Uporova, A. Drobyshev, I. Egorov

We present ComNetX, an algorithm that adapts static community detection methods to dynamic graphs through local updates of a partition hierarchy. It supports topology-based and neural methods, including those using node features. We establish preservation of hierarchy nesting, conditions for modularity preservation under graph contraction, and time and memory bounds. On five graphs, speedups over repeated Leiden runs range from 6.60 to 98.72, with absolute final modularity differences of 0.0035–0.0213.

Keywords: dynamic graph, community detection, partition hierarchy, modularity.

References

[1] M. E. J. Newman, M. Girvan, “Finding and evaluating community structure in networks”, *Physical Review E*, **69**:2 (2004), 026113. DOI: 10.1103/PhysRevE.69.026113.

[2] V. A. Traag, L. Waltman, N. J. van Eck, “From Louvain to Leiden: guaranteeing well-connected communities”, *Scientific Reports*, **9** (2019), 5233. DOI: 10.1038/s41598-019-41695-z.

[3] X. Lin, R. Yang, H. Zheng, X. Ke, “Spectral Subspace Clustering for Attributed Graphs”, *Proceedings of the 31st ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, **1**, ACM, 2025, 789–799. DOI: 10.1145/3690624.3709207.

Received on November 10, 2026

Кодирование замкнутых ломаных локальными отношениями площадей

Ван Сыжэнь*

Предложен способ кодирования, основанный на ориентированных площадях треугольников, для проверки аффинной эквивалентности замкнутых ломаных на плоскости. Нормированные разности ориентированных площадей, задаваемые вершинами ломаной и соседними с ними точками, объединяются в матрицу. Для двух замкнутых ломаных с одинаковым числом вершин, вершины каждой из которых не лежат все на одной прямой, доказано: эквивалентность кодов равносильна существованию обратимого аффинного преобразования, сопоставляющего вершины с точностью до циклического сдвига или обращения порядка.

Ключевые слова: замкнутые ломаные, ориентированная площадь, аффинные инварианты, полнота.

1. Введение

Одна из основных задач распознавания изображений, представленных конечными множествами точек, — проверка их геометрической эквивалентности. Координаты меняются при преобразованиях, поэтому геометрическое кодирование даёт числовое представление для сравнения; при полноте кода задача сводится к проверке эквивалентности кодов. В. Н. Козлов [1] доказал аффинную полноту кода из индексированных отношений площадей треугольников с точностью до перенумерации для множеств, не покрываемых двумя параллельными прямыми.

П. Г. Агниашвили [2] дал критерий однозначного восстановления по отношениям объёмов без знаков с точностью до аффинной эквивалентности с сохранением нумерации для конечных множеств, аффинно порождающих пространство произвольной конечной размерности. Д. В. Алексеев [3] предложил алгоритм восстановления по отношениям площадей со стёртыми индексами при общем положении треугольников с оценкой $O(n^9)$ для целочисленных координат (n — число точек).

* *Ван Сыжэнь* — аспирант каф. МаТИС мех.-мат. факультета МГУ; науч. руководители: Вадим Никитович Козлов и Дмитрий Владимирович Алексеев, e-mail: sirenexcelsior@gmail.com, ORCID: 0009-0002-9775-4003.

Wang Siren — PhD student, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, MSU; supervisors: Vadim Nikitovich Kozlov and Dmitry Vladimirovich Alekseev.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Рассмотрим замкнутую плоскую ломаную $P = (p_0, \dots, p_{n-1})$ с заданным циклическим соседством вершин, $p_n = p_0$, $n \geq 3$, вершины которой не лежат все на одной прямой. Индексы берутся по модулю n. При сохранении циклического соседства достаточно рассмотреть $2n$ соответствий, задаваемых начальной вершиной и направлением обхода. Построим код из нормированных разностей ориентированных площадей и докажем, что эквивалентность кодов равносильна аффинной эквивалентности.

2. Построение матрицы отношений площадей

Д. В. Ронжин [4] с помощью спектральной нормировки матриц разброса свёл рассматриваемую задачу аффинного совмещения множеств точек к ортогональному совмещению. Аналогично, для устранения влияния переноса выберем начало координат в центре масс вершин $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} p_i$ и положим $y_i = p_i - \mu$. Далее, для устранения изменения масштаба площадей при аффинном преобразовании введём ковариационную матрицу $\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i y_i^\top$. Из неравенства Коши–Буняковского и условия, что вершины не лежат все на одной прямой, следует $\det\Sigma > 0$. Положим $g = \sqrt{\det\Sigma} > 0$. В стандартной прямоугольной системе координат обозначим ориентированную площадь треугольника с вершинами p, q, r через $\mathcal{A}(p, q, r) = \frac{1}{2}\det(q - p, r - p)$.

При $p_{i-1} \neq p_{i+1}$ соседние с p_i вершины задают ориентированное основание $p_{i-1}p_{i+1}$. Для сравнения ориентированных высот p_i, p_j относительно него введём разность площадей

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= \mathcal{A}(p_{i-1}, p_{i+1}, p_j) - \mathcal{A}(p_{i-1}, p_{i+1}, p_i)\\ &= \mathcal{A}(p_i, p_{i+1}, p_j) - \mathcal{A}(p_i, p_{i-1}, p_j), \qquad 0 \leq i, j < n.\end{aligned}$$

Знак Δ_{ij} определяет направление изменения ориентированной высоты, а модуль — величину изменения площади. Если $p_{i-1} = p_{i+1}$, формула остаётся корректной и даёт $\Delta_{ij} = 0$. Таким образом, локальное соседство задаёт сравнение положения p_j с p_i. Нормируя площади, определим код $S(P) = (S_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$S_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{g}, \qquad 0 \leq i, j < n. \tag{1}$$

При обратимом аффинном преобразовании $x' = Ax + b$ обозначим штрихом преобразованные величины. Тогда $\Delta'_{ij} = (\det A)\Delta_{ij}$, $\Sigma' = A\Sigma A^\top$, $g' = |\det A| g$. Следовательно, $S' = \operatorname{sgn}(\det A) S$: при сохранении ориентации плоскости матрица не меняется, а при изменении ориентации вся матрица умножается на -1.

3. Эквивалентность кодов и аффинная полнота

Определение (эквивалентность кодов). Матрица $S(P)$ из (1) служит кодом ломаной. Для другой такой ломаной $Q = (q_0, \dots, q_{n-1})$ положим $Q^{(k,\varepsilon)} = (q_k, q_{k+\varepsilon}, \dots, q_{k+\varepsilon(n-1)})$, $0 \le k < n$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Коды эквивалентны, если для некоторых k, ε

$$S(Q^{(k,\varepsilon)}) = S(P) \qquad \text{или} \qquad S(Q^{(k,\varepsilon)}) = -S(P). \tag{2}$$

Определение (аффинная эквивалентность). Ломаные P, Q аффинно эквивалентны, если обратимое аффинное преобразование сопоставляет их вершины с точностью до циклического сдвига или обращения порядка.

Теорема 1 (Аффинная полнота)**.** *Пусть P, Q — две замкнутые ломаные на плоскости с одинаковым числом вершин $n \ge 3$, вершины каждой из которых не лежат все на одной прямой. Они аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда их коды эквивалентны.*

Идея доказательства. Необходимость следует из закона преобразования ориентированных площадей при обратимом аффинном преобразовании.

Обратно, пусть коды эквивалентны; обозначим соответствующие вершины через p_i, q_i. Матрица нормированных ориентированных площадей с элементами $C_{ij}(P) = \mathcal{A}(\mu_P, p_i, p_j)/g_P$ восстанавливается по системе $C_{i+1,j} - C_{i-1,j} = S_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} S_{i\ell}$ при условиях $C^\top = -C$, $C\mathbf{1} = 0$, где $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$. Существование решения следует из геометрического определения C. Разность H любых двух решений удовлетворяет $H_{i+2,j} = H_{ij}$, $H^\top = -H$, $H\mathbf{1} = 0$. Поэтому диагональные элементы и суммы столбцов равны нулю. При нечётном n каждый столбец постоянен и потому нулевой. При чётном n он постоянен на строках каждой чётности: класс с диагональным элементом нулевой, другой — также в силу нулевой суммы столбца. Значит, $H = 0$. Таким образом, решение единственно, и эквивалентность кодов влечёт $C(Q) = \sigma C(P)$, $\sigma \in \{1, -1\}$.

Положим $u_i = p_i - \mu_P$, $v_i = q_i - \mu_Q$ и выберем r, s с $C_{rs}(P) \ne 0$. Тогда (u_r, u_s) и (v_r, v_s) — базисы. Координаты u_i и v_i в соответствующих базисах совпадают, поскольку выражаются отношениями элементов C, в которых множитель σ сокращается. Следовательно, обратимое аффинное преобразование с $A = (v_r\ v_s)(u_r\ u_s)^{-1}$, $b = \mu_Q - A\mu_P$ переводит p_i в q_i для всех i.

Сложность проверки. В модели вещественных вычислений для каждого из $2n$ вариантов соответствия построение и сравнение матриц кодов требуют $O(n^2)$ времени. Поэтому проверка по коду занимает $O(n^3)$ времени в худшем случае.

Список литературы

[1] В. Н. Козлов, “Распознавание изображений, представляемых конечным множеством точек”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **15**:5 (2009), 95–110.

[2] П. Г. Агниашвили, “Однозначность восстановления изображения по его коду в n-мерном случае”, *Интеллектуальные системы*, **15**:1–4 (2011), 293–332.

[3] Д. В. Алексеев, “К вопросу о восстановлении изображения по стертому коду”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **27**:2 (2023), 49–67.

[4] Д. В. Ронжин, “Распознавание динамики особых точек в видеоряде”, *Интеллектуальные системы*, **18**:2 (2014), 267–276 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Encoding closed polygonal chains using local area relations

Wang Siren

An encoding method based on oriented triangle areas is proposed for deciding affine equivalence of closed planar polygonal chains. The method arranges normalized oriented-area differences generated by the vertices of the chain and their neighbors into a matrix. For two closed polygonal chains with the same number of vertices, with the vertices of each chain not all collinear, equivalence of their codes is proved equivalent to the existence of an invertible affine transformation matching their vertices up to a cyclic shift or a reversal of order.

Keywords: closed polygonal chains, oriented area, affine invariants, completeness.

References

[1] V. N. Kozlov, “Recognition of images represented by a finite set of points”, (In Russian), *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika*, **15**:5 (2009), 95–110.

[2] P. G. Agniashvili, “Uniqueness of image reconstruction from its code in the n-dimensional case”, (In Russian), *Intelligent Systems*, **15**:1–4 (2011), 293–332.

[3] D. V. Alekseev, “On image reconstruction from an erased code”, (In Russian), *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **27**:2 (2023), 49–67.

[4] D. V. Ronzhin, “Recognition of the dynamics of keypoints in a video sequence”, (In Russian), *Intelligent Systems*, **18**:2 (2014), 267–276.

Received on October 24, 2026

Символьные, численные и свёрточные методы анализа временных рядов: качество и время вычислений

Г. В. Журавлёв*, М. И. Кумсков‡

На восьми наборах UCR сопоставлены семь классификаторов временных рядов: ROCKET, MiniRocket и BOSS вошли в верхнюю группу по средним рангам (1,63, 1,81 и 2,56) без различий внутри неё по критерию Неменьи, а суммарное время MiniRocket и BOSS в CPU-прогонах составило 2,4 мин и 11,6 ч. Пять моделей прогнозирования цен BTC и ETH имели больший RMSE, чем Naive, во всех восьми сочетаниях актива и горизонта.

Ключевые слова: временные ряды, классификация, символьное представление, BOSS, ROCKET, MiniRocket, вычислительная сложность, прогнозирование.

1. Введение

В словарных методах окна ряда переводятся в символьные слова, по встречаемости которых строятся признаки (BOSS [1]); методы на случайных свёртках (ROCKET [2], MiniRocket [3]) отображают ряд набором свёрточных признаков с линейным классификатором. Цель работы — на восьми выбранных наборах UCR сопоставить качество семи классификаторов и измерить время полного цикла BOSS, ROCKET и MiniRocket в проведённых прогонах, а также сравнить по RMSE пять моделей многошагового прогнозирования цен BTC и ETH с прогнозом Naive.

* *Журавлёв Георгий Валерьевич* — студент кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: georgii.zhuravlev@math.msu.ru.

Zhuravlev Georgy Valerievich — Student, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Кумсков Михаил Иванович* — д.ф.-м.н., заведующий лабораторией вычислительных методов, профессор кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: mikhail.kumskov@math.msu.ru.

Kumskov Mikhail Ivanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Computational Methods, Professor, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Данные и протокол

Классификация. Восемь наборов UCR [4] (23–8926 обучающих рядов, стандартные разбиения), не случайная выборка архива. BOSS, ROCKET и MiniRocket — классы `BOSSEnsemble`, `RocketClassifier` и `MiniRocketClassifier` библиотеки aeon (версия не зафиксирована) с параметрами по умолчанию и `random_state=42`, один запуск. SAX-BoW — мешок SAX-слов (pyts; окно 4, слово 4, алфавит 8) с логистической регрессией ($C = 1$); SAX+Tr. — SAX-код ряда (16 сегментов, алфавит 8), эмбеддинг размерности 32 и Transformer-энкодер; PatchTST — собственная реализация для классификации (патчи 16, шаг 8). Оба энкодера: $d = 64$, 4 головы, 2 слоя, AdamW (шаг 10^{-3}), 30–50 эпох с ранней остановкой по 15 % обучающей выборки; для этих трёх методов accuracy усреднена по 2–3 значениям seed. Ранги сравниваются тестом Фридмана с критерием Неменьи [5]. Время цикла «обучение + предсказание» измерено на CPU сред Kaggle и Colab без фиксации среды и числа потоков каждого запуска, поэтому отношения времён ориентировочные.

Прогнозирование. Часовые цены закрытия BTCUSDT и ETHUSDT (Binance) за 730 дней до выгрузки; дата выгрузки не сохранилась, и тестовые участки разных моделей могут быть сдвинуты на время между запусками. Модели DLinear, TiDE, TimesNet, PatchTST и NHITS (neuralforecast 1.7.5, параметры по умолчанию, вход 168 ч, 600 шагов, один запуск) обучаются на первых 85 % ряда логарифмических доходностей r и без переобучения прогнозируют неперекрывающиеся окна последних 15 % с горизонтами $H \in \{5, 10, 15, 24\}$. Прогноз цены на k-м шаге окна равен $P_0 \exp(\hat{r}_1 + \cdots + \hat{r}_k)$, где P_0 — последняя известная цена; Naive повторяет P_0.

3. Результаты

Тест Фридмана выявляет различия рангов семи методов ($\chi^2 = 42{,}1$, $p = 1{,}7 \cdot 10^{-7}$). Лучшие средние ранги у ROCKET, MiniRocket и BOSS (табл. 1); их попарные разности не превышают 0,94 при критической разности Неменьи CD = 3,185 ($\alpha = 0{,}05$), т. е. внутри тройки различия не установлены, тогда как ROCKET и MiniRocket превосходят по этому критерию каждый метод нижней группы (разности не менее 3,19).

Суммарно по восьми наборам MiniRocket потребовалось 143,6 с, ROCKET — 736,3 с, BOSS — 41 672,7 с (11,6 ч), т. е. примерно в 5 и 290 раз больше, хотя на семи наборах из восьми MiniRocket не уступил BOSS.

Таблица 1: Accuracy на UCR и средний ранг (Major. — мажоритарный класс; при равенстве — средний ранг)

Набор	ROCKET	MiniR.	BOSS	SAX+Tr.	SAX-BoW	PatchTST	Major.
Coffee	1,000	1,000	1,000	0,893	0,643	0,488	0,536
GunPoint	1,000	0,993	1,000	0,904	0,833	0,684	0,493
Trace	1,000	1,000	1,000	0,837	0,540	0,713	0,190
TwoLeadECG	0,999	0,998	0,983	0,668	0,669	0,572	0,500
ECG5000	0,947	0,944	0,940	0,920	0,794	0,937	0,584
FordA	0,941	0,951	0,919	0,619	0,721	0,892	0,516
Wafer	0,999	0,999	0,995	0,979	0,994	0,993	0,892
ElectricDevices	0,726	0,753	0,715	0,608	0,627	0,640	0,242
Средний ранг	1,63	1,81	2,56	5,00	5,00	5,13	6,88

В опыте с прогнозированием RMSE каждой из пяти моделей оказался выше RMSE Naive во всех восьми сочетаниях актива (BTC, ETH) и горизонта H. Медиана величины $100(\mathrm{RMSE}/\mathrm{RMSE}_{\mathrm{Naive}} - 1)\,\%$ по восьми сочетаниям для отдельных моделей — от 1,27 (TiDE) до 5,19 (NHITS).

4. Заключение

На восьми выбранных наборах UCR ROCKET, MiniRocket и BOSS получили лучшие средние ранги; различия внутри этой тройки по критерию Неменьи не установлены. Суммарное время обучения и предсказания MiniRocket и BOSS в проведённых CPU-прогонах составило 2,4 мин и 11,6 ч соответственно; измерения времени носят ориентировочный характер. В отдельном опыте пять моделей прогнозирования BTC и ETH имели больший RMSE, чем Naive, во всех восьми сочетаниях актива и горизонта; статистическая значимость этих различий не оценивалась.

Для проведения исследования авторами реализованы варианты классификации SAX-BoW, SAX+Transformer и PatchTST, выполнено их сопоставление с BOSS, ROCKET и MiniRocket и проведён статистический анализ результатов. Совместный анализ качества и вычислительных затрат показал, что в проведённых экспериментах MiniRocket не уступил BOSS по accuracy на семи из восьми наборов при меньшем суммарном времени обучения и предсказания. Полученные результаты характеризуют рассматриваемые алгоритмы при использованных настройках; влияние самого представления временного ряда отдельно не выделено, а выводы не распространяются на весь архив UCR.

Список литературы

[1] P. Schäfer, “The BOSS is concerned with time series classification in the presence of noise”, *Data Mining and Knowledge Discovery*, **29**:6 (2015), 1505–1530. DOI: 10.1007/s10618-014-0377-7.

[2] A. Dempster, F. Petitjean, G. I. Webb, “ROCKET: exceptionally fast and accurate time series classification using random convolutional kernels”, *Data Mining and Knowledge Discovery*, **34**:5 (2020), 1454–1495. DOI: 10.1007/s10618-020-00701-z.

[3] A. Dempster, D. F. Schmidt, G. I. Webb, “MiniRocket: A very fast (almost) deterministic transform for time series classification”, Proceedings of the 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2021, 248–257. DOI: 10.1145/3447548.3467231.

[4] H. A. Dau, A. Bagnall, K. Kamgar et al., “The UCR time series archive”, *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, **6**:6 (2019), 1293–1305. DOI: 10.1109/JAS.2019.1911747.

[5] J. Demšar, “Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets”, *Journal of Machine Learning Research*, **7** (2006), 1–30.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

Symbolic, Numeric and Convolutional Methods for Time Series: Accuracy and Computation Time

G. V. Zhuravlev, M. I. Kumskov

Seven time-series classifiers are compared on eight UCR datasets: ROCKET, MiniRocket and BOSS form the top group by mean rank (1.63, 1.81 and 2.56) with no significant differences within it by the Nemenyi test, and the total times of MiniRocket and BOSS in the CPU runs are 2.4 min and 11.6 h, respectively. Five models forecasting BTC and ETH prices had higher RMSE than Naive in all eight asset–horizon combinations.

Keywords: time series, classification, symbolic representation, BOSS, ROCKET, MiniRocket, computational cost, forecasting.

Received on October 10, 2026

Применение больших языковых моделей для выявления значений слов в задаче обнаружения лексико-семантических изменений

Д. В. Кокосинский*

Рассматривается обнаружение лексико-семантических изменений на основе кластеризации словоупотреблений по матрице их семантических близостей. Большие языковые модели оценивают близость точнее компактных специализированных моделей, но на порядки дороже, поэтому в предлагаемом методе QUEST-cluster они применяются точечно, в рамках байесовского подбора порога кластеризации. Система на основе QUEST-cluster повышает среднюю корреляцию Спирмена с эталоном до 0,85 против 0,755 у системы на основе компактной модели.

Ключевые слова: лексико-семантические изменения, выявление значений слов, большие языковые модели, байесовский подбор порога.

1. Введение

В задаче обнаружения лексико-семантических изменений [1] по словоупотреблениям целевых слов из двух временных периодов требуется ранжировать слова по степени изменения их значений. Качество измеряется корреляцией Спирмена с эталонным ранжированием.

В подходе на основе выявления значений словоупотребления слова из обоих периодов кластеризуются, каждый кластер считается значением, а степенью изменений служит расстояние Йенсена–Шеннона между распределениями словоупотреблений двух периодов по кластерам — стандартная мера расхождения распределений, принятая в эталонах задачи [1]. Подход реализован в системе CC+JSD [2], где компактная специализированная модель строит матрицу семантических близостей словоупотреблений, а корреляционная кластеризация разбивает её на кластеры.

При этом большие языковые модели оценивают семантическую близость точнее компактных специализированных моделей [3], но запрос

* *Кокосинский Денис Владиславович* — аспирант каф. алгоритмических языков ф-та ВМК МГУ, e-mail: deniskokossskappa@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5642-8725.

Kokosinskii Denis Vladislavovich — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

к ним требует приблизительно в 10^5 раз больше вычислений, и вычисление полной матрицы близостей обходится неприемлемо дорого.

2. Метод QUEST-cluster

Пусть $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ — словоупотребления целевого слова. *Слабый* оценщик семантической близости (компактная специализированная модель) вычисляет матрицу близостей r_{ij} для всех пар, а запрос к *сильному* оценщику (большой языковой модели) на несколько порядков дороже. Ответ сильного оценщика b бинарный и равен 1, если значение слова в паре одно и то же, и 0 иначе. Требуется построить разбиение U по матрице r и не более чем $B \ll n^2$ ответам сильного оценщика. Качество разбиения оценивается по недоступным методу ручным аннотациям метрикой AnnotRI [2] — долей аннотированных пар, на которых решение «один кластер или разные» совпадает с решением аннотаторов, в среднем по словам.

Значительную часть ошибок CC+JSD составляют ошибки гранулярности. Корреляционная кластеризация [2] штрафует на $|r_{ij} - \theta|$ пары, у которых знак $r_{ij} - \theta$ противоречит разбиению, так что порог θ задаёт гранулярность значений. Порог θ_0 системы CC+JSD един для всех целевых слов, но может не подходить отдельному слову, и тогда его значения дробятся или укрупняются. Оракульный выбор порога каждого слова по аннотациям повышает среднее согласие с ними с 0,796 до 0,862. Метод QUEST-cluster подбирает такой порог θ_w по ответам сильного оценщика как точку шкалы слабого оценщика, в которой сильный оценщик меняет ответ.

Вероятность ответа $b = 1$ сильного оценщика для пары со слабой близостью r описывается логистической моделью отклика

$$p(r) = \sigma\big((r - \theta_w)/\beta\big), \tag{1}$$

где θ_w — искомый порог ($p(\theta_w) = 1/2$), $\beta > 0$ — ширина переходной зоны. Параметры оцениваются байесовским выводом на сетке $\Theta \times \mathcal{B}$, где Θ и $\mathcal{B}$ — конечные множества кандидатов для θ_w и β, с априорным распределением $\pi(\theta, \beta) \propto \exp\big(-(\theta - \theta_0)^2/2\sigma_0^2\big)$. По ответам $(r_1, b_1), \ldots, (r_m, b_m)$ апостериорное распределение вычисляется с точностью до нормировки:

$$S_m(\theta, \beta) = \pi(\theta, \beta) \prod_{t=1}^{m} p_{\theta,\beta}(r_t)^{b_t} \big(1 - p_{\theta,\beta}(r_t)\big)^{1-b_t}, \qquad p_{\theta,\beta}(r) = \sigma\big((r-\theta)/\beta\big).$$

Подбор порога по маргинальному распределению $\sum_\beta S_m(\theta, \beta)$ выполняется в три шага.

1. Сильному оценщику предъявляются m пар с наименьшими $|r_{ij} - \theta_0|$. Если биномиальный критерий на уровне α не отвергает гипотезу $p(\theta_0) = 1/2$ по числу ответов $b = 1$, принимается $\theta_w = \theta_0$, и процедура завершается.
2. Иначе, пока центральный 90 %-интервал апостериорного распределения порога шире w и запрошено меньше K пакетов, предъявляются m неопрошенных пар с наименьшими $|r_{ij} - \theta_{\text{med}}|$, где θ_{med} — апостериорная медиана.
3. Если выборочная корреляция r и b по всем ответам отрицательна (при постоянных b — нулевая), принимается $\theta_w = \theta_0$, иначе $\theta_w = \theta_{\text{med}}$.

Результат метода — кластеризация матрицы r при пороге θ_w. Название отсылает к психофизическому методу QUEST [4].

3. Эксперименты

В системе QUEST-cluster+JSD, как и в CC+JSD [2], слабый оценщик — специализированная модель GlossReader, θ_0 — порог CC+JSD. Сильные оценщики — две конфигурации больших языковых моделей из [3]: Qwen3.5-9b в режиме рассуждения (ответ y по шкале 0–10, порог c подобран по обучающим выборкам CoMeDi) и GPT-5.3-Chat (шкала 1–4, $c = 2{,}5$). Параметры (B, m, K — по вычислительному бюджету, остальные — по гистограммам близостей GlossReader): $B = 100$ (менее 1 % пар, из них подбор порога расходует от m до Km), $m = 20$, $K = 3$, $\alpha = 0{,}115$ (отклонение числа единиц от $m/2$ не менее 4), $w = 0{,}05$, $\sigma_0 = 0{,}06$, $\mathcal{B} = \{0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}15;\ 0{,}25;\ 0{,}5\}$, Θ — 57 равноотстоящих значений между порогами грубой и тонкой гранулярности из [2]. Остаток бюджета система тратит на не входящую в метод правку близостей: пары у порога θ_w, пары слабосвязных словоупотреблений и случайные межкластерные пары получают близость $\theta_w + (y - c)/h$ (h — диапазон шкалы y).

Системы сравниваются на семи бенчмарках из [2] с эталоном по расстоянию Йенсена–Шеннона. Обе конфигурации повышают согласие с аннотациями на каждом бенчмарке, а корреляцию Спирмена — на всех семи с Qwen3.5-9b и на шести с GPT-5.3-Chat. В среднем согласие растёт с 0,796 у CC+JSD до 0,832 (Qwen3.5-9b) и 0,835 (GPT-5.3-Chat), корреляция Спирмена — с 0,755 до 0,845 и 0,847. Сам метод, без правки близостей, даёт 0,814 и 0,780, то есть около половины и четверти прироста.

Список литературы

[1] D. Schlechtweg, B. McGillivray, S. Hengchen, H. Dubossarsky, N. Tahmasebi, "SemEval-2020 Task 1: Unsupervised Lexical Semantic Change Detection", *Proceedings of SemEval-2020*, 2020, 1–23. DOI: 10.18653/v1/2020.semeval-1.1.

[2] D. V. Kokosinskii, N. V. Arefyev, "Automatic systems with word sense induction for lexical semantic change detection", *Numerical Methods and Programming*, **27**:3 (2026), 450–469. DOI: 10.26089/NumMet.v27r329.

[3] Д. В. Кокосинский, "Большие языковые модели в задаче оценки семантической близости словоупотреблений", *Электронные библиотеки*, **29**:4 (2026), 1133–1154. DOI: 10.26907/1562-5419-2026-29-4-1133-1154.

[4] A. B. Watson, D. G. Pelli, "QUEST: A Bayesian adaptive psychometric method", *Perception & Psychophysics*, **33**:2 (1983), 113–120. DOI: 10.3758/BF03202828.

Статья поступила 7 октября 2026 г.

Large language models for word sense induction in lexical semantic change detection

D. V. Kokosinskii

We consider lexical semantic change detection based on clustering word usages by the matrix of their semantic proximities. Large language models estimate proximity more accurately than compact specialized models but are orders of magnitude more expensive, so the proposed QUEST-cluster method uses them selectively, within Bayesian estimation of the clustering threshold. A system based on QUEST-cluster raises the average Spearman correlation with the gold ranking to 0.85, compared with 0.755 for a system based on a compact model.

Keywords: lexical semantic change, word sense induction, large language models, Bayesian threshold estimation.

References

[1] D. Schlechtweg, B. McGillivray, S. Hengchen, H. Dubossarsky, N. Tahmasebi, "SemEval-2020 Task 1: Unsupervised Lexical Semantic Change Detection", *Proceedings of SemEval-2020*, 2020, 1–23. DOI: 10.18653/v1/2020.semeval-1.1.

[2] D. V. Kokosinskii, N. V. Arefyev, "Automatic systems with word sense induction for lexical semantic change detection", *Numerical Methods and Programming*, **27**:3 (2026), 450–469. DOI: 10.26089/NumMet.v27r329.

[3] D. V. Kokosinskii, "Large Language Models for Word-in-Context", *Russian Digital Libraries Journal*, **29**:4 (2026), 1133–1154 (in Russian. DOI: 10.26907/1562-5419-2026-29-4-1133-1154).

[4] A. B. Watson, D. G. Pelli, "QUEST: A Bayesian adaptive psychometric method", *Perception & Psychophysics*, **33**:2 (1983), 113–120. DOI: 10.3758/BF03202828.

Received on October 7, 2026

Универсальная мультифрагментная разметка текстов методом попарной классификации

Н. А. Кукузей*, О. Ю. Седельникова‡, И. А. Цыбанов§, О. Л. Ринк¶, А. И. Майсурадзе‖

Предложен метод двухуровневой матричной классификации для выделения фрагментов текста и объединения их в элементы разметки. Метод допускает пересечение и вложенность фрагментов. Проведён анализ полученных результатов на 4 конфигурациях, включающих 3 различных кодировщика и большую языковую модель. Сравнение моделей производится с помощью критериев качества, вычисляемых на основе сопоставления разметок.

Ключевые слова: двухуровневая разметка текста, попарная классификация.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача структурированной разметки текста: выделение фрагментов и объединение их в элементы, причём оба уровня допускают несколько меток. Используется модель данных [1], применимая к извлечению информации и контент-анализу.

Документ состоит из L символов. *Помеченный фрагмент* — пара $f = (I_f, T_f)$, где $I_f = [b, e)$ — непустой полуинтервал, $0 \le b < e \le L$, $b, e \in \mathbb{Z}$, а $T_f \subseteq \mathcal{T}_F$ — набор меток. Множество фрагментов обозначим F.

* *Кукузей Никита Александрович* — Институт ИИ МГУ, e-mail: kukuzeyna@my.msu.ru, ORCID: 0009-0004-0420-9685.

Kukuzei Nikita Alexandrovich — Laboratory Assistant, IAI MSU.

‡ *Седельникова Ольга Юрьевна* — Институт ИИ МГУ, e-mail: sedelnikowaolia@yandex.ru, ORCID: 0009-0007-4923-3701.

Sedelnikova Olga Yuryevna — Laboratory Assistant, IAI MSU.

§ *Цыбанов Илья Антонович* — Стажер-исследователь Института ИИ МГУ, e-mail: tsybanovia@my.msu.ru, ORCID: 0009-0000-1845-464X.

Tsybanov Ilya Antonovich — Research Intern, IAI MSU.

¶ *Ринк Ольга Леонидовна* — н.с. Института ИИ МГУ, e-mail: rinkol@my.msu.ru, ORCID: 0000-0001-5977-6741.

Rink Olga Leonidovna — Researcher, IAI MSU.

‖ *Майсурадзе Арчил Ивериевич* — к. ф.-м. н., в. н. с. Института ИИ МГУ, e-mail: maysuradze@cs.msu.ru, ORCID: 0000-0002-1757-556X.

Maysuradze Archil Iverievich — Cand. of Phys. and Math. Sc., Principal Researcher, IAI MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Помеченный элемент — пара $e = (S_e, T_e)$, где $\varnothing \neq S_e \subseteq F$ — множество фрагментов, $T_e \subseteq \mathcal{T}_E$ — набор меток элемента. Словари $\mathcal{T}_F, \mathcal{T}_E$ задаются схемой. Выход модели — множества фрагментов F и элементов E.

2. Архитектура

W2NER [2] и T^2-NER [3] решают подзадачу извлечения сущностей; для полной двухуровневой разметки требуется их адаптация. Прямое сравнение не проводилось. В нашей схеме фрагменты и элементы переменного размера имеют независимые наборы меток. Для каждого набора данных обучаются два классификатора поверх замороженного кодировщика, строящего векторы $h_i \in \mathbb{R}^d$ токенов $x_1, \ldots, x_n$. Множество токенных позиций A_f, соответствующих интервалу I_f, определяется по смещениям токенизатора.

$$p_{ij}^{(\ell)} = \sigma(\mathrm{MLP}_\ell([u_i; u_j; u_i \odot u_j; q_{ij}])), \quad \ell \in \{F, E\}.$$

MLP содержит три линейных слоя с размерами выходов d, $d/2$ и числом меток. После первого применяются BatchNorm, GELU и Dropout 0.2, после второго — GELU.

На первом уровне $u_i = h_i$, $q_{ij} = |i - j|$; рассматриваются пары $i < j$, $j - i \leq 64$. На втором u_f — покомпонентный максимум $\{h_i : i \in A_f\}$. Для $b_f = \min A_f$, $r_f = \max A_f + 1$, $m_f = |A_f|$ используются признаки

$$q_{fg} = (|b_f - b_g|, |r_f - r_g|, |m_f - m_g|).$$

Целевая метка $y_{ij,t}^F = 1$, если токены i, j принадлежат одному эталонному фрагменту с меткой t; $y_{fg,t}^E = 1$, если фрагменты f, g входят в один эталонный элемент с меткой t, 0 иначе. Оптимизатор — AdamW с $lr = 10^{-4}$, функция потерь — бинарная кросс-энтропия. Второй уровень обучается на эталонных фрагментах, а применяется к предсказанным.

Пороги каналов максимизируют валидационный F1 на равномерных сетках: $[0.05, 0.95]$ (30 точек) и $[0.05, 0.8]$ (20 точек) для уровней 1 и 2.

Для каждой метки пары $i < j$ с вероятностью выше порога задают рёбра неориентированного графа. Компоненты связности образуют фрагменты или элементы; метки совпадающих компонент объединяются. На втором уровне рассматриваются только пары с $|b_f - b_g| \leq 128$.

3. Результаты

Предложенная архитектура исследована с кодировщиками mamba-1.4b-ru, mDeBERTa-v3-base и spanbert-base-cased. Для сравнения использована

генеративная модель Qwen3.5-397B-A17B-FP8 с примерами в запросе и выводом JSON. Эксперименты охватывают 21 набор данных (NEREL, SciERC, DDI, CoNLL-2012 и др.) и 15 типов задач, включая извлечение именованных сущностей и отношений.

Таблица 1: Качество разметки: точечные оценки, 95%-ные доверительные интервалы. Также дано число параметров модели.

модель	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	размер
Mamba	.110	.430	.783	.306	.778	1,4 млрд
	[.109;.110]	[.428;.432]	[.779;.788]	[.302;.310]	[.774;.783]	
mDeBERTa	.109	.570	.691	.293	.593	279 млн
	[.108;.110]	[.567;.573]	[.687;.695]	[.288;.297]	[.589;.598]	
SpanBERT	.116	.500	.597	.289	.561	110 млн
	[.116;.117]	[.496;.503]	[.593;.601]	[.285;.294]	[.556;.565]	
Qwen	.604	.750	.769	.533	.796	397 млрд
	[.597;.612]	[.741;.757]	[.760;.777]	[.525;.541]	[.787;.803]	

Примечание. (1) Критерии C_1–C_5 взяты из статьи [4]. C_1 характеризует согласованность сопоставления фрагментов; C_2 — согласованность выделенных текстовых интервалов; C_3 — согласованность меток фрагментов; C_4 — согласованность сопоставления элементов разметки; C_5 — согласованность меток элементов разметки. (2) Доверительные интервалы получены процентильным бутстрепом среднего по документам (5000 реплик). Все документы из наборов данных объединяются в один пул с равным весом. Для каждого документа учитывается только одна экспертная разметка.

Качество зависит от кодировщика, однако различия размеров, языков и предобучения не позволяют изолировать эффект архитектуры. Низкие C_1, C_4 указывают на необходимость улучшения выделения фрагментов и восстановления пересекающихся элементов.

Список литературы

[1] A. I. Maysuradze, A. M. Tabachenkov, O. L. Rink, K. V. Vorontsov, “Generalized Text Markup Structures to Organize Knowledge in AI Applications for Humanities and Social Sciences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **47**:6 (2026), 2861–2874. DOI: 10.1134/S1995080226619302.

[2] J. Li, H. Fei, J. Liu, S. Wu, M. Zhang, C. Teng, D. Ji, F. Li, “Unified Named Entity Recognition as Word-Word Relation Classification”, *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, **36**:10 (2022), 10965–10973. DOI: 10.1609/aaai.v36i10.21344.

[3] P. Huang, X. Zhao, M. Hu, Z. Tan, W. Xiao, “T^2-NER: A Two-Stage Span-Based Framework for Unified Named Entity Recognition with Templates”, *Transactions of the Association for Computational Linguistics*, **11** (2023), 1265–1282. DOI: 10.1162/tacl_a_00602.

[4] A. Levikin, I. Khabutdinov, A. Grabovoy, K. Vorontsov, “The methodology of multi-criteria evaluation of text markup models based on inconsistent expert markup”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Papers from the Annual International Conference “Dialogue” (2025). Issue 23, Supplementary volume*, 2025, 1066–1080. DOI: 10.28995/2075-7182-2025-23-1066-1080.

Статья поступила 23 октября 2026 г.

Universal Multi-Span Text Annotation through Pairwise Classification

N. A. Kukuzei, O. Y. Sedelnikova, I. A. Tsybanov, O. L. Rink, A. I. Maysuradze

We propose a two-level grid-tagging method for identifying text spans and grouping them into annotation elements. The method supports overlapping and nested spans. We provide an analysis of results obtained with four configurations comprising three different text representation models and a large language model. Performance is evaluated using metrics computed by annotation matching.

Keywords: two-level text annotation, pairwise classification.

References

[1] A. I. Maysuradze, A. M. Tabachenkov, O. L. Rink, K. V. Vorontsov, “Generalized Text Markup Structures to Organize Knowledge in AI Applications for Humanities and Social Sciences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **47**:6 (2026), 2861–2874. DOI: 10.1134/S1995080226619302.

[2] J. Li, H. Fei, J. Liu, S. Wu, M. Zhang, C. Teng, D. Ji, F. Li, “Unified Named Entity Recognition as Word-Word Relation Classification”, *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, **36**, 2022, 10965–10973. DOI: 10.1609/aaai.v36i10.21344.

[3] P. Huang, X. Zhao, M. Hu, Z. Tan, W. Xiao, “T^2-NER: A Two-Stage Span-Based Framework for Unified Named Entity Recognition with Templates”, *Transactions of the Association for Computational Linguistics*, **11** (2023), 1265–1282. DOI: 10.1162/tacl_a_00602.

[4] A. Levikin, I. Khabutdinov, A. Grabovoy, K. Vorontsov, “The methodology of multi-criteria evaluation of text markup models based on inconsistent expert markup”, *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Papers from the Annual International Conference “Dialogue” (2025). Issue 23, Supplementary volume*, 2025, 1066–1080. DOI: 10.28995/2075-7182-2025-23-1066-1080.

Received on October 23, 2026

FuzzyLSTM и представления финансовых временных рядов

М. И. Кумсков*, А. Г. Махова‡, П. А. Медведев§, Г. В. Журавлёв¶

Исследуется влияние представления финансового временного ряда на качество прогноза. Рассматривается FuzzyLSTM с вычисляемым по ценовой истории дополнительным признаком, параметрическими сигмоидами вентилей LSTM и смешиванием прогноза сети с последней наблюдаемой ценой. Для рекуррентной части сформулированы достаточные условия ISS-устойчивости и указаны предпосылки ограниченности итогового прогноза. На минутных, часовых и дневных данных BTC–USD отношение RMSE стандартной LSTM к RMSE FuzzyLSTM составило 1,24, 1,45 и 1,54. Добавление выбранных технических индикаторов не обеспечило систематического улучшения FuzzyLSTM, а в отдельном сравнении символьный вход Transformer не показал устойчивого преимущества над численным.

Ключевые слова: финансовые временные ряды, прогнозирование, LSTM, нечёткая логика, FuzzyLSTM, технические индикаторы, символьное представление.

* *Кумсков Михаил Иванович* — д.ф.-м.н., зав. лабораторией вычислительных методов, профессор кафедры вычислительной математики мех.-мат. факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: mikhail.kumskov@math.msu.ru.

Kumskov Mikhail Ivanovich — DSc, Head of the Laboratory of Computational Methods, Professor, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Махова Анастасия Геннадьевна* — аспирант кафедры вычислительной математики мех.-мат. факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: anastasiia.makhova@math.msu.ru.

Makhova Anastasia Gennadievna — PhD Student, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

§ *Медведев Пётр Алексеевич* — студент кафедры вычислительной математики мех.-мат. факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: petr.medvedev@math.msu.ru.

Medvedev Petr Alekseevich — Student, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

¶ *Журавлёв Георгий Валерьевич* — студент кафедры вычислительной математики мех.-мат. факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: georgii.zhuravlev@math.msu.ru.

Zhuravlev Georgy Valerievich — Student, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

1. Введение

В работе исследуется FuzzyLSTM с нечётким признаком и параметрическими функциями активации. Дополнительно проверяется, приводит ли расширение её входа техническими индикаторами и, в отдельном эксперименте, переход от численного к символьному описанию свечей к повышению качества прогноза.

2. Модель FuzzyLSTM

Пусть по нормированному окну истории цен $X_i = (x_{i-l}, \ldots, x_i)$ требуется спрогнозировать x_{i+1}. Текущему значению x_i сопоставляется нечеткое множество, задаваемое гауссовской функцией принадлежности $m_i(x) = \exp[-(x - x_i)^2/(2\sigma_{i-1}^2)]$, где σ_{i-1} — локальная волатильность окна. Вход дополняется величиной $m_i(x_{i-1}) \in [0, 1]$, характеризующей принадлежность предыдущей цены нечёткому множеству с центром в x_i.

В вентилях LSTM стандартная сигмоида заменяется функцией $\sigma_{\theta_1,\theta_2}(z) = [1 + \exp(-\theta_1(z - \theta_2))]^{-1}$, обучаемые параметры которой задают ее крутизну и смещение. Прогноз $\hat{x}_{i+1}$ смешивается с последней ценой: $y_{i+1} = \hat{m}_{i+1}x_i + (1 - \hat{m}_{i+1})\hat{x}_{i+1}$, где $\hat{m}_{i+1} \in [0, 1]$. Результат представляет собой адаптивную комбинацию последнего наблюдения и выхода сети [1].

2.1. Теоретические свойства

Рекуррентная часть рассматривается как дискретная система с состоянием (c_t, h_t), ISS-устойчивость которой исключает неограниченный рост состояний при ограниченном входе и ограниченном смещении кандидата ячейки $\bar{b}_c$. Здесь ρ_f, ρ_i, ρ_o — верхние оценки выходов вентилей забывания, входа и выхода LSTM, вычисленные по преобразованным параметрами θ весам и смещениям, а $\bar{U}_c$ — матрица рекуррентных весов кандидата состояния ячейки. Достаточными условиями служат $(1 + \rho_o)\rho_f < 1$ и $(1 + \rho_o)\rho_i\|\bar{U}_c\|_1 < 1$. Дополнительный признак лежит в $[0, 1]$, а выход смешивает ограниченные величины, поэтому при этих предпосылках прогноз FuzzyLSTM также ограничен [2]. Проверка обученной модели подтвердила выполнение достаточных условий ISS-устойчивости.

3. Вычислительные эксперименты

Сравнение с базовой LSTM и статистические свойства рядов. Данные BTC–USD получены из Yahoo Finance; использовано хронологическое разбиение на обучающую и тестовую выборки (75/25), обучение

Adam (MSE, 100 эпох, batch size 32). Подробности экспериментального протокола приведены в [2].

На минутных, часовых и дневных данных BTC–USD FuzzyLSTM превосходит стандартную LSTM по RMSE в 1,24, 1,45 и 1,54 раза соответственно. На десяти инструментах пяти классов улучшение составляло 1,0–1,5 раза. Множественная линейная регрессия выявила связь выигрыша со статистическими характеристиками рядов ($R^2 = 0{,}78$ для 1m и $R^2 = 0{,}99$ для 1d). На дневных данных значимым фактором оказался эксцесс распределения ($p = 0{,}010$).

Технические индикаторы. В 125 тестах на дневных данных 25 активов пяти классов базовая FuzzyLSTM сравнивалась с импульсными, трендовыми, волатильностными и всеми индикаторами. Базовая модель была лучшей в четырёх классах, а полный набор — наиболее нестабильным. Значимые различия обнаружены только для индексов, где тест Немени подтвердил превосходство базовой FuzzyLSTM над вариантом со всеми индикаторами. Следовательно, значительную часть информации индикаторов FuzzyLSTM извлекает непосредственно из ценового ряда [3].

Символьное представление. В BTC-бенчмарке FuzzyLSTM сравнивалась с другими моделями, а численный и символьный входы отдельно исследовались при одной архитектуре Transformer. Символы кодировали направление, тело и тени свечи, а в отдельных вариантах и объём. Устойчивого преимущества не получено; исключением стала часовая классификация при $h = 1$ с balanced accuracy 0,538 против 0,524 [4]. На рядах UCR метод BOSS вошёл в группу лучших, что подтверждает зависимость эффекта от задачи и свойств данных.

Выводы. FuzzyLSTM превзошла стандартную LSTM по RMSE, особенно на изменчивых рядах с тяжёлыми хвостами. Технические индикаторы не дали систематического улучшения, а символьный вход Transformer — устойчивого преимущества; поэтому усложнение входа следует проверять для каждой модели и временного ряда.

Список литературы

[1] A. Makhova, M. Kumskov, “A Study of Recurrent Neural Network Architectures Based on Fuzzy Logic for Financial Time Series Forecasting”, *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies*, MMST 2025, Communications in Computer and Information Science, **2815**, Springer, Cham, 2026, 48–62. DOI: 10.1007/978-3-032-15761-4_4.

[2] А. Г. Махова, *Исследование архитектуры рекуррентной нейронной сети с долгой краткосрочной памятью на основе нечеткой логики в задаче прогнозирования финансовых временных рядов*, дипломная работа специалиста, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, 2026 (Рукопись).

[3] П. А. Медведев, *Исследование влияния индикаторов временных финансовых рядов на качество прогноза для нейронных систем с памятью*, курсовая работа, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, 2026 (Рукопись).

[4] Г. В. Журавлёв, *Прогнозирование временных рядов: символьное и численное представление*, курсовая работа, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, 2026 (Рукопись).

Статья поступила 10 октября 2026 г.

FuzzyLSTM and Financial Time Series Representations

M. I. Kumskov, A. G. Makhova, P. A. Medvedev, G. V. Zhuravlev

The effect of financial time series representation on forecast quality is investigated. FuzzyLSTM is considered with an additional feature computed from price history, parametric sigmoid functions in the LSTM gates, and blending of the network forecast with the latest observed price. Sufficient conditions for the ISS stability of the recurrent component are formulated, and assumptions ensuring boundedness of the final forecast are specified. On minute, hourly, and daily BTC–USD data, the ratio of the standard LSTM RMSE to the FuzzyLSTM RMSE was 1.24, 1.45, and 1.54, respectively. Adding the selected technical indicators did not provide a systematic improvement in FuzzyLSTM, while, in a separate comparison, symbolic Transformer input showed no consistent advantage over numerical input.

Keywords: financial time series, forecasting, FuzzyLSTM, technical indicators, symbolic representation.

References

[1] A. Makhova, M. Kumskov, "A Study of Recurrent Neural Network Architectures Based on Fuzzy Logic for Financial Time Series Forecasting", *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies*, MMST 2025, Communications in Computer and Information Science, **2815**, Springer, Cham, 2026, 48–62. DOI: 10.1007/978-3-032-15761-4_4.

[2] A. G. Makhova, *Long short-term memory recurrent neural network architecture based on fuzzy logic for financial time series forecasting*, Specialist diploma thesis, Lomonosov MSU, Moscow, 2026 (In Russian).

[3] P. A. Medvedev, *A Study of the Influence of Financial Time Series Indicators on Forecast Quality for Neural Systems with Memory*, Course paper, Lomonosov MSU, Moscow, 2026 (In Russian).

[4] G. V. Zhuravlev, *Time Series Forecasting: Symbolic and Numerical Representation*, Course paper, Lomonosov MSU, Moscow, 2026 (In Russian).

Received on October 10, 2026

Причинная кросс-видовая память для онлайн-отслеживания трехмерных объектов

Ц. Ли*, Т. Е. Мамонова‡

В DeepFusionMOT успешный Stage-4 обновляет счетчики и жизненный цикл, но не сохраненную двумерную память, которая затем используется при недоступной проекции или пропуске лидара. Предложен причинный контур: P3DR использует проекцию прогнозируемого трехмерного параллелепипеда как свидетельство для Stage-4, а C2MC записывает принятое двумерное состояние в память для последующих кадров. Относительно DeepFusionMOT на KITTI Tracking Val11 HOTA повышается с 79,876% до 80,385%, sAMOTA — с 93,01% до 95,42%, FP сокращается с 294 до 110. В контроле при отключенном RRC двумерная ветвь получает штатный или спроецированный прямоугольник того же трехмерного детектора, и выходные файлы последовательностей совпадают с базовой моделью.

Ключевые слова: трехмерное многообъектное отслеживание, камера и лидар, кросс-видовая память, онлайн-ассоциация.

1. Введение

Трехмерное многообъектное отслеживание необходимо для автономного вождения. DeepFusionMOT объединяет детекции камеры и лидара на четырех этапах ассоциации [1]; CrossTracker использует двустороннюю кросс-коррекцию [2]; 3DMOTFormer применяет графовый Transformer к связям траекторий и детекций [3].

В четырехуровневой схеме после восстановления camera-only и трехмерной траекторий обновляются счетчики и жизненный цикл, но двумерная память трехмерной траектории остается устаревшей. При пропуске

* *Ли Цзюмин* — аспирант, Томский политехнический университет, Россия, Томск, e-mail: czyumin1@tpu.ru.

Li Jiuming — Postgraduate Student, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia.

‡ *Мамонова Татьяна Егоровна* — канд. техн. наук, доцент, доцент отделения интеллектуальных систем, и. о. заведующего кафедрой — руководителя ОИС на правах кафедры ИШИнЭС, Томский политехнический университет, Россия, Томск, e-mail: stepte@tpu.ru.

Mamonova Tatiana Egorovna — Cand. Tech. Sci., Assoc. Prof., Intelligent Systems Division; Acting Head of Department, School of IT and Intelligent Systems, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

лидара проекция текущего трехмерного прогноза служит геометрическим ориентиром, а двумерная траектория — свидетельством идентичности. После успешной ассоциации это наблюдение должно записываться в память; при одноисточниковых наблюдениях такого разрыва нет.

Предлагаются проекционная трехмерная реидентификация (P3DR) и причинная передача двумерной памяти (C2MC). P3DR дополняет Stage-4 проекцией текущего прогноза, а C2MC синхронизирует состояние без изменения трехмерного положения и без будущих кадров.

2. Метод

Состояние трехмерной траектории $\mathbf{X}_i^t = [x_i^t, y_i^t, z_i^t, \theta_i^t, l_i^t, w_i^t, h_i^t]$ прогнозируется фильтром Калмана. Восемь углов прогнозируемого параллелепипеда переводятся в систему camera_02, проецируются матрицей P_2, после чего вычисляется охватывающий прямоугольник $b_{\mathrm{proj},i}^t$. Проекция допустима, если глубина всех восьми углов не меньше 0,1 м. Для двумерной траектории j после этапов 1–3 используется ее текущий фильтрованный прямоугольник $u_j^t = \mathrm{Box2D}(S_j^t)$; исходная детекция в формуле (1) не применяется.

$$s_{ij}^t = (1-\alpha)\,\mathrm{IoU}(u_j^t, m_i^{t-1}) + \alpha\,\mathrm{IoU}(u_j^t, b_{\mathrm{proj},i}^t), \tag{1}$$

где m_i^{t-1} — сохраненный фильтрованный прямоугольник двумерной траектории. При допустимой проекции $\alpha = 1{,}0$, и основным свидетельством служит $b_{\mathrm{proj},i}^t$. При недопустимой проекции $\alpha = 0$, поэтому Stage-4 использует сохраненную память m_i^{t-1}. Пары выбираются взаимно-однозначным назначением при пороге $\tau_{2\mathrm{D}} = 0{,}5$.

Для каждой принятой пары (i, j) память обновляется как

$$m_i^t = u_j^t. \tag{2}$$

Обновленная память используется в последующих Stage-4 при недопустимой проекции и при временном отсутствии объединенного или LiDAR-наблюдения; новое объединенное наблюдение повторно инициализирует ее. Метод не изменяет трехмерный центр, размеры или ориентацию. Здесь N_t — число несопоставленных трехмерных траекторий, K_t — число доступных двумерных траекторий на входе Stage-4. Дополнительная стоимость составляет $O(N_t)$ на проекцию, $O(N_t K_t)$ на IoU и $O(\max(N_t, K_t)^3)$ на назначение; обучаемые параметры отсутствуют.

3. Результаты

Эксперименты выполнены для класса Car на KITTI Tracking Val11 по последовательностям 0001, 0006, 0008, 0010, 0012, 0013, 0014, 0015, 0016,

0018 и 0019. Используются PointRCNN и RRC [1]; все методы работают онлайн. В TrackEval Kitti2DBox оценивается текущая фильтрованная траектория u_j^t, а $b_{\text{proj},i}^t$ служит только свидетельством Stage-4. Оценка включает HOTA, IDSW, sAMOTA, AMOTA и FP [4].

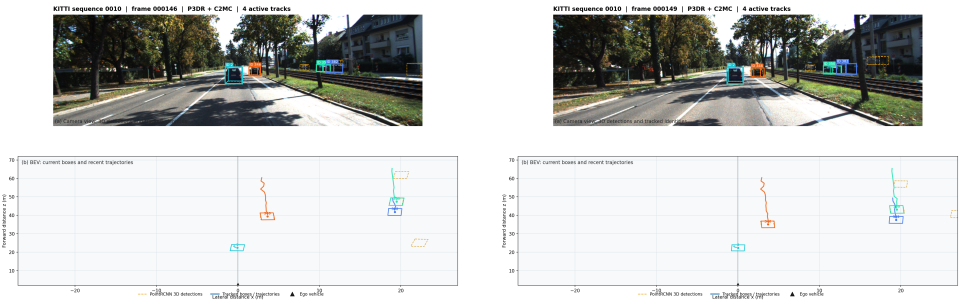


Рис. 1: Качественные результаты для последовательности 0010 (кадры 146 и 149): проекции 3D-обнаружений, отслеживаемые 3D-траектории и BEV-история.

Относительно DeepFusionMOT полная модель повышает HOTA с 79,876 до 80,385, sAMOTA — с 93,01 до 95,42 и AMOTA — с 45,43 до 47,73, а FP сокращает с 294 до 110. P3DR отдельно уменьшает IDSW с 20 до 18, тогда как C2MC повышает HOTA, но временно увеличивает IDSW до 26. Совместная конфигурация дает лучшие HOTA и sAMOTA: P3DR стабилизирует текущую повторную ассоциацию, а C2MC сохраняет обновленное состояние для следующих кадров.

В 9 из 11 последовательностей HOTA возрастает; приросты в 0014 и 0010 равны 1,447 и 1,271, а снижение в 0016 — 0,105 процентного пункта.

Таблица 1: Абляция на KITTI Tracking Val11

Метод	HOTA	sAMOTA	AMOTA	FP
DeepFusionMOT	79,876	93,01	45,43	294
P3DR	79,913	95,37	47,71	115
C2MC	80,307	93,02	45,43	128
P3DR + C2MC	**80,385**	**95,42**	**47,73**	**110**

4. Заключение

Предложен причинный контур кросс-видовой памяти для онлайн-трехмерного отслеживания. P3DR использует текущую проекцию трехмерного прогноза как геометрическое свидетельство, а C2MC сохраняет согласованное двумерное состояние после успешной повторной ассоциации.

Эксперименты на валидационном разбиении KITTI Tracking показывают, что совместное использование компонентов улучшает двумерную и трехмерную согласованность траекторий. Основные ограничения связаны с одним классом объектов, фиксированным набором валидационных последовательностей и отсутствием оценки на официальном тестовом наборе.

Список литературы

[1] X. Wang, C. Fu, Z. Li, Y. Lai, J. He, "DeepFusionMOT: A 3D Multi-Object Tracking Framework Based on Camera–LiDAR Fusion with Deep Association", *IEEE Robotics and Automation Letters*, **7**:3 (2022), 8260–8267. DOI: 10.1109/LRA.2022.3187264.

[2] L. Gu, X. Yan, W. Wang, H. Chen, D. Zhu, L. Nan, M. Wei, "CrossTracker: Robust Multi-modal 3D Multi-Object Tracking via Cross Correction", 2024, arXiv: 2411.18850.

[3] S. Ding, E. Rehder, L. Schneider, M. Cordts, J. Gall, "3DMOTFormer: Graph Transformer for Online 3D Multi-Object Tracking", *2023 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*, 2023, 9750–9760. DOI: 10.1109/iccv51070.2023.00897, arXiv: 2308.06635.

[4] Z. Yan, S. Feng, X. Li, Y. Zhou, C. Xia, S. Li, "S3MOT: Monocular 3D Object Tracking with Selective State Space Model", 2025, arXiv: 2504.18068.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Causal Cross-View Memory for Online 3D Multi-Object Tracking

J. Li, T. E. Mamonova

In DeepFusionMOT, Stage-4 updates counters but not the stored 2D memory, which is reused when projection is unavailable or LiDAR misses occur. P3DR projects the predicted 3D box as evidence; C2MC writes the accepted 2D state for later frames. On KITTI Tracking Val11, relative to DeepFusionMOT, HOTA rises from 79.876% to 80.385%, sAMOTA from 93.01% to 95.42%, and FP falls from 294 to 110. In a same-source control (RRC disabled; native or projected boxes from one 3D detector), sequence outputs match the baseline.

Keywords: 3D multi-object tracking, camera–LiDAR fusion, cross-view memory, online association.

Received on November 9, 2026

Кластерное согласование RGB-разметки и LiDAR-облаков для семантической навигации беспилотного ровера

Р. Е. Ломовский*, М. И. Кумсков‡

Предложен перенос жёстких меток квантованной RGB-сегментации на LiDAR: они агрегируются по геометрическим кластерам и уточняются MRF с учётом расстояния, нормалей и кривизны. На допустимых проекциях RELLIS-3D mIoU составляет 48,9 %.

Ключевые слова: семантическая сегментация, беспилотный ровер, LiDAR, RGB-изображение, U-Net, EfficientNet, квантование, DBSCAN, марковское случайное поле, alpha-expansion.

1. Задача и метод

Синхронные жёсткие RGB-метки переносятся на LiDAR и согласуются MRF на геометрических кластерах; координаты точки — $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, интенсивность не используется. Это перенос меток с геометрической регуляризацией, не fusion-сеть или 3D-сегментатор: в отличие от PointPainting и Superpoint Graph [7,8], применяется адаптивный DBSCAN с MRF. Метод принимает метки любой 2D-сети, но выигрыш при замене сегментатора не проверялся. Классы RELLIS-3D: грунт, трава, дерево/куст, камень, вода, бревно, препятствие.

U-Net с EfficientNet-B0 [1, 2] выдаёт жёсткие метки; «Прямой перенос» (табл. 1) — её оценка на допустимых проекциях до 3D-коррекции. В RUGD 24 класса сведены к семи: dirt/asphalt/gravel/concrete/mulch — грунт; sand/grass/water/log без изменений; tree/bush — дерево; rock/rock bed — камень; sky/pole/vehicle/container/building/bicycle/person/fence/sign/

bridge/picnic table исключены из loss и mIoU. Train/val/test — 4779/733/1924 кадров без перемешивания соседей. RUGD используется

* *Ломовский Роман Евгеньевич* — студент мех.-мат. факультета МГУ, e-mail: roman.lomovskii@math.msu.ru.

Lomovskii Roman Evgenievich — student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

‡ *Кумсков Михаил Иванович* — доцент мех.-мат. факультета МГУ, e-mail: mikhail.kumskov@math.msu.ru.

Kumskov Mikhail Ivanovich — Associate Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

для предобучения и оценки квантования, но его классы не отождествляются с RELLIS-3D [6].

Для RELLIS-3D: dirt/mud/asphalt/concrete — грунт; grass — трава; tree/bush — дерево/куст; rubble — камень; water/puddle — вода; log — бревно; barrier/vehicle/person/pole/fence/object/building — препятствие; void/sky/прочие исключены. Sequence 00000–00002/00003/00004 — train/val/test (1963 облака), соседние кадры не перемешиваются [5]. U-Net: Dice+cross-entropy, Adam (10^{-4}), batch 8, до 30 эпох; Reduce-on-Plateau (0,5; patience 3), early stopping по val mIoU (5), три seed (42–44), QAT INT8. Компьютер: i7-10700KF, 8 ядер/16 потоков, 32 ГБ; Windows 11 Pro/WSL2 Ubuntu 22.04; Python 3.10.12, PyTorch 2.0.1, OpenVINO 2024.4, NNCF 2.8.1, OpenCV 4.8, NumPy 1.26, scikit-learn 1.2.

Проекция: $q_i = K(R\mathbf{x}_i + t)$, $(u_i, v_i) = (q_{i1}/q_{i3}, q_{i2}/q_{i3})$; точки с $Z_i \le 0$ или вне изображения отбрасываются. При коллизии пикселя видима точка с минимальной глубиной, остальные окклюдированы. Дополнительно в окне 3×3 без центра глубина должна отличаться не более чем на 0,35 м от минимума занятых соседей; без соседей точка видима. Жёсткая метка $\ell_i^0 = S(I)(u_i, v_i)$ присваивается допустимым проекциям.

Адаптивный DBSCAN [3]: $\varepsilon_i = \min\{0{,}55;\ 0{,}16(1 + 0{,}035 r_i)\}$ м, $r_i = \|\mathbf{x}_i\|_2$, MinPts $= 8$; соседство определяется $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 \le \min(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. Шум — одноточечные кластеры. По локальным ковариациям находятся n_k, κ_k. Узлы графа — кластеры; ребро проводится при минимальном межкластерном расстоянии $\le \delta = 0{,}65$ м.

Метки кластеров Y_k находятся приближённой минимизацией энергии Поттса:

$$E(Y) = \sum_k U_k(Y_k) + \lambda \sum_{(k,l)\in\mathcal{E}} w_{kl}\, \mathbf{1}[Y_k \ne Y_l], \quad U_k(c) = -\ln \frac{h_k(c) + 1}{N_k^{\mathrm{proj}} + |C|},$$

где $h_k(c)$ — число спроецированных точек класса c, $N_k^{\mathrm{proj}} = \sum_c h_k(c)$; для кластера без проекций $U_k(c) = -\ln \pi_c$, где π_c — частота класса в train. Вес ребра

$$w_{kl} = \exp\!\left(-\frac{\|q_k - q_l\|_2^2}{\sigma_q^2} - \frac{(\kappa_k - \kappa_l)^2}{\sigma_\kappa^2} - \frac{1 - |n_k^T n_l|}{\sigma_n^2}\right)$$

учитывает расстояние между центрами, кривизну и ориентацию нормалей. Коэффициенты DBSCAN, порог видимости 0,35 м и параметры MRF ($\sigma_q = 0{,}55$ м, $\sigma_\kappa = 0{,}08$, $\sigma_n = 0{,}35$, $\lambda = 1{,}4$) фиксировались по sequence 00003 и не менялись на тесте. Alpha-expansion через PyMaxflow [4] останавливается при отсутствии снижения энергии или после 10 проходов. В среднем — около 68 тыс. точек и 1250 кластеров на облако.

2. Результаты

Тест — sequence 00004 (1963 облака), семь классов без void; mIoU и accuracy рассчитаны по общей матрице ошибок с усреднением по точкам. На допустимых проекциях (72,4%) получены 48,9/85,2%; прямой перенос в табл. 1 — базовая оценка 2D-меток. Для полного облака метрики равны 43,5/79,9%, для непроецируемых точек — 29,4/66,1%. Без проекций остаются 12,6% кластеров; распределение их меток по классам в указанном порядке: 34,8; 20,1; 12,4; 7,2; 2,9; 2,0; 20,6%. Табл. 1 содержит среднее ± СКО трёх запусков; LiDAR-время не включает 2D-сеть.

Таблица 1: Абляция на тестовой части RELLIS-3D

Вариант	mIoU, %	Acc., %	LiDAR, мс
Прямой перенос	$39{,}6 \pm 1{,}7$	$79{,}4 \pm 1{,}5$	$6{,}3 \pm 0{,}9$
Голосование без MRF	$44{,}1 \pm 1{,}4$	$82{,}7 \pm 1{,}2$	$9{,}8 \pm 1{,}1$
DBSCAN (пост.) + MRF	$46{,}7 \pm 1{,}2$	$84{,}1 \pm 1{,}0$	$12{,}4 \pm 1{,}4$
DBSCAN (адапт.) + MRF	$48{,}9 \pm 1{,}1$	$85{,}2 \pm 0{,}9$	$12{,}8 \pm 1{,}5$

Классовые IoU в указанном ранее порядке: 68,4; 59,7; 54,6; 41,8; 47,3; 31,2; 39,3%; минимум у бревна, препятствия и камня. Среднее±СКО/медиана/P95: сеть — $12{,}1 \pm 0{,}6$/12,0/13,3 мс; LiDAR — $12{,}8 \pm 1{,}5$/12,5/15,6 мс; полный конвейер — $25{,}7 \pm 2{,}2$/25,2/30,1 мс. Разность 0,8 мс сверх суммы средних 2D/LiDAR — подготовка RGB/тензора, декодирование и передача; чтение диска исключено. Прогревы/измерения: сеть 100/1000, LiDAR и конвейер 50/500.

Список литературы

[1] O. Ronneberger, P. Fischer, T. Brox, “U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation”, MICCAI, 2015, 234–241. DOI: 10.1007/978-3-319-24574-4_28.

[2] M. Tan, Q. V. Le, “EfficientNet: Rethinking Model Scaling for Convolutional Neural Networks”, ICML, 2019, arXiv: 1905.11946.

[3] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, X. Xu, “A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise”, KDD, 1996.

[4] Y. Boykov, O. Veksler, R. Zabih, “Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **23**:11 (2001), 1222–1239. DOI: 10.1109/34.969114.

[5] P. Jiang, P. Osteen, M. Wigness, S. Saripalli, “RELLIS-3D Dataset: Data, Benchmarks and Analysis”, ICRA, 2021, 1110–1116. DOI: 10.1109/ICRA48506.2021.9561251.

[6] M. Wigness, S. Eum, J. G. Rogers, D. Han, H. Kwon, “A RUGD Dataset for Autonomous Navigation and Visual Perception in Unstructured Outdoor Environments”, IROS, 2019, 5000–5007. DOI: 10.1109/IROS40897.2019.8968283.

[7] S. Vora, A. H. Lang, B. Helou, O. Beijbom, “PointPainting: Sequential Fusion for 3D Object Detection”, CVPR, 2020, 4603–4611. DOI: 10.1109/CVPR42600.2020.00466.

[8] L. Landrieu, M. Simonovsky, “Large-Scale Point Cloud Semantic Segmentation with Superpoint Graphs”, CVPR, 2018, 4558–4567. DOI: 10.1109/CVPR.2018.00479 .

Статья поступила 6 октября 2026 г.

Cluster-Based Alignment of RGB Labels and LiDAR Point Clouds for Semantic Navigation of an Autonomous Rover

R. E. Lomovskii, M. I. Kumskov

We transfer hard labels from quantized RGB segmentation to LiDAR, aggregate them by geometric clusters, and refine them with an MRF using distance, normals, and curvature. RELLIS-3D mIoU on valid projections is 48.9%.

Keywords: semantic segmentation, autonomous rover, LiDAR, RGB image, U-Net, EfficientNet, quantization, DBSCAN, Markov random field, alpha-expansion.

Received on October 6, 2026

Идентификация и подсчёт крупного рогатого скота при однокамерном и многокамерном видеонаблюдении

А. В. Лужецкая*, Д. С. Есаулова‡, К. Э. Караваева§, С. Н. Балавнев¶

Ручной учёт крупного рогатого скота трудоёмок; автоматический осложняется перекрытиями и повторными появлениями животных. Представлена система, объединяющая YOLO26L, ByteTrack и ResNet50. Для однокамерного подсчёта используются отбор изображений и объединение траекторий, для межкамерного сопоставления разработана геометрическая проверка. На MmCows получены mAP@0.5 $\approx$ 0,994 и Rank-1 Accuracy 90,6%.

Ключевые слова: компьютерное зрение, индивидуальная идентификация животных, многокамерное наблюдение, подсчёт животных.

1. Постановка задачи и метод

Автоматизация визуального учёта крупного рогатого скота направлена на снижение трудозатрат ручного подсчёта. Основной вклад работы состоит в разработке схемы накопительного однокамерного подсчёта с отбором изображений по качеству, положению и направлению животного для сопоставления траекторий и предотвращения повторного учёта особей.

Пусть S обозначает множество траекторий, полученных за интервал $[0, T]$. Требуется построить разбиение G множества S, в котором каждая группа содержит траектории одной и той же особи, а разные группы

* *Лужецкая Анастасия Викторовна* — аспирант факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: nastyajetskaya@yandex.ru.

Luzhetskaia Anastasiia Viktorovna — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov MSU.

‡ *Есаулова Диана Сергеевна* — студент факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: esaulovadiana2005@gmail.com.

Esaulova Diana Sergeevna — Student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov MSU.

§ *Караваева Ксения Эдуардовна* — студент физического факультета, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: karavaevake@my.msu.ru.

Karavaeva Ksenia Eduardovna — Student, Faculty of Physics, Lomonosov MSU.

¶ *Балавнев Семен Николаевич* — студент факультета психологии, МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: semyon.balavnev@gmail.com.

Balavnev Semen Nikolaevich — Student, Faculty of Psychology, Lomonosov MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

соответствуют разным особям. Оценка количества уникальных животных определяется числом групп: $\widehat{N}(T) = |G|$.Число особей заранее неизвестно. Для нескольких камер предполагаются синхронизация и известные матрицы проекции.

YOLO26L из Ultralytics [1], дообученная на MmCows [2], обнаруживает животных в заданной области загона; ByteTrack [3] формирует траектории. Изображения сохраняются для сопоставления после смены идентификатора трекера.

Из каждой траектории выбираются до 3 лучших изображений, затем 100 лучших суммарно. Оценка $q = \sum_{j=1}^{7} w_j q_j$ использует веса $w = (0{,}05; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}15; 0{,}05; 0{,}18; 0{,}07)$. При $h(x) = \min(1, \max(0, x))$ компоненты равны:

$$q_1 = p; \quad q_2 = h(a/0{,}02); \quad q_3 = 1 - r; \quad q_4 = h(v/0{,}06);$$
$$q_5 = 1 - h(|m - 0{,}4|/0{,}5); \quad q_6 = 1 - h(e/0{,}15); \quad q_7 = 1 - h(u/0{,}30).$$

Здесь p обозначает уверенность детектора, a долю площади кадра, r долю рамки, перекрытую другими рамками, v дисперсию лапласиана, m среднюю яркость. Яркость нормирована к $[0, 1]$; e и u обозначают доли пикселей со всеми RGB-каналами $> 245/255$ и яркостью $< 0{,}05$ соответственно.

ResNet18 [4] различает классы «стоит/лежит»: 42 754 изображения, 80% для обучения со стратифицированным случайным разбиением, начальные веса ImageNet, 3 эпохи, перекрёстная энтропия, Adam с шагом 10^{-3} и размером батча 64. Сохраняются стоящие животные с вероятностью $\geq 0{,}5$. По маске BiRefNet [5] вычисляется $s = (L - R)/B$, где L, R обозначают среднюю толщину крайних 15% силуэта, B центральных 30%. При $s \geq 0{,}08$ голова считается направленной вправо; такие изображения отбираются.

ResNet50 [4] без классификатора формирует нормированные 2048-мерные признаки. Сходство траекторий равно максимальному косинусному сходству изображений. При значении $\geq 0{,}45$ траектории связываются; прямые и транзитивные связи образуют группы особей.

Для набора синхронизированных камер C с известной калибровкой центр рамки задаёт прямую $o_c + \lambda d_c$. Ближайшая к прямым точка определяется как

$$Q = \arg\min_{X \in \mathbb{R}^3} \sum_{c \in C} \left\| (I_3 - d_c d_c^\top)(X - o_c) \right\|_2^2.$$

Здесь o_c обозначает центр камеры, d_c единичное направление, I_3 единичную матрицу. Допустимы положительная глубина, среднее расстояние

до прямых $D \leq 90$ и максимальное попарное расстояние $P_{\max} \leq 120$ в единицах калибровки. Сначала рассматриваются кандидаты, прошедшие геометрическую проверку. В каждой из 2 групп кандидаты упорядочиваются по возрастанию оценки $0{,}7D + 0{,}3\overline{P}$, где $\overline{P}$ обозначает среднее попарное расстояние между прямыми. При одинаковой оценке предпочтение отдаётся большему визуальному сходству.

2. Экспериментальная проверка

Использованы данные 16 коров с 4 камер MmCows. YOLO26L обучалась 100 эпох на $\approx 10\,000$ изображений; на $\approx 6\,000$ валидационных получены mAP@0.5 $\approx 0{,}994$ и mAP@0.5:0.95 $\approx 0{,}845$.

Для ReID кропы каждой коровы отбирались каждые 2 мин с 4 камер за 24 ч. Первые 12 ч составили обучение и галерею, следующие 12 ч тест: по 23 040 изображений. ResNet50 дообучалась с весов ImageNet: TripletMarginLoss (отступ 0,3), MultiSimilarityMiner, Adam (10^{-4}), пакет 64, горизонтальные отражения, вариации яркости/контраста 0,2. Вход 256×128 нормировался по ImageNet. В этом эксперименте Rank-1 Accuracy составила 90,6%.

Корректность межкамерных сопоставлений определялась по идентификаторам животных в разметке MmCows. Среднее расстояние восстановленной точки до прямых наблюдения составило $\approx 8{,}7$ для корректных и $\approx 103{,}3$ для ошибочных пар. На видеозаписях проверена совместная работа модулей однокамерной системы: обнаружение животных, отбор изображений, повторная идентификация и объединение траекторий для подсчёта.

3. Заключение

Рассмотрены многокамерная схема с геометрической проверкой и однокамерная схема с отбором изображений и объединением траекторий. На данных MmCows получены оценки качества детекции и идентификации.

Список литературы

[1] Ultralytics, *Ultralytics YOLO26*, Documentation, accessed 09.10.2026, `https://docs.ultralytics.com/models/yolo26/`.

[2] H. Vu et al., “MmCows: A Multimodal Dataset for Dairy Cattle Monitoring”, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **37**, 2024, 59451–59467. DOI: `10.52202/079017-1898`.

[3] Y. Zhang et al., “ByteTrack: Multi-object Tracking by Associating Every Detection Box”, *Computer Vision - ECCV 2022*, LNCS, **13682**, 2022, 1–21. DOI: 10.1007/978-3-031-20047-2_1.

[4] K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun, “Deep Residual Learning for Image Recognition”, *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2016, 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.

[5] P. Zheng et al., “Bilateral Reference for High-Resolution Dichotomous Image Segmentation”, *CAAI Artificial Intelligence Research*, **3** (2024), 9150038. DOI: 10.26599/AIR.2024.9150038 .

Статья поступила 9 октября 2026 г.

Cattle identification and counting in single-camera and multi-camera video monitoring

A. V. Luzhetskaia, D. S. Esaulova, K. E. Karavaeva, S. N. Balavnev

Manual cattle counting is labour-intensive, while automation is complicated by occlusions and repeated appearances. A system combining YOLO26L, ByteTrack and ResNet50 is presented. Image selection and track merging are used for single-camera counting, and geometric verification is developed for cross-camera matching. Experiments on MmCows yielded mAP@0.5 ≈ 0.994 and Rank-1 Accuracy of 90.6%.

Keywords: computer vision, individual animal identification, multi-camera monitoring, animal counting.

References

[1] Ultralytics, *Ultralytics YOLO26*, Documentation, accessed 09.10.2026, https://docs.ultralytics.com/models/yolo26/.

[2] H. Vu et al., “MmCows: A Multimodal Dataset for Dairy Cattle Monitoring”, *Advances in Neural Information Processing Systems*, **37**, 2024, 59451–59467. DOI: 10.52202/079017-1898.

[3] Y. Zhang et al., “ByteTrack: Multi-object Tracking by Associating Every Detection Box”, *Computer Vision - ECCV 2022*, LNCS, **13682**, 2022, 1–21. DOI: 10.1007/978-3-031-20047-2_1.

[4] K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun, “Deep Residual Learning for Image Recognition”, *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2016, 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.

[5] P. Zheng et al., “Bilateral Reference for High-Resolution Dichotomous Image Segmentation”, *CAAI Artificial Intelligence Research*, **3** (2024), 9150038. DOI: 10.26599/AIR.2024.9150038.

Received on October 9, 2026

Исследование и переработка системы навигации виртуального ровера в среде Unity на основе обучения с подкреплением

В. В. Маносин*, М. И. Кумсков‡

Проверен и переработан прототип навигации виртуального ровера на основе PPO. Вместо исходного наблюдения без дальномерных данных реализован вектор из 52 компонент, включая 36 признаков LiDAR. Три независимо обученные политики оценены на 500 эпизодах каждая: средняя доля достижения цели — 46,8%, стандартное отклонение между запусками — 6,8 процентного пункта. Результаты относятся к одной симуляционной сцене.

Ключевые слова: обучение с подкреплением, навигация, виртуальный ровер, PPO, LiDAR.

1. Постановка задачи и аудит

Рассмотрена навигация ровера к цели без карты в Unity [1, 2]; выполнены аудит наблюдений и оценка PPO.

В `CollectObservations()` обнаружены 23 входа: направление на цель в координатах ровера (3), вертикаль ровера в мировой системе (3), скорость (1), направление и модуль угловой скорости (3+1), уклоны (4), нули в позициях 16–23 (8). Последние восемь — сектора *камерной маски* (0 — свободно, 1 — препятствие); её обработка отключена. Дальности использовались в награде, но не поступали политике.

2. Переработанная постановка

LiDAR посылает 360 горизонтальных лучей длиной 5 м с высоты 0,5 м. Локальные углы $\alpha_j = -180^\circ + j^\circ$ ($j = 0, \ldots, 359$). Сектор $k = 0, \ldots, 35$ объединяет лучи $10k, \ldots, 10k+9$; признак равен $\min d_j/5$, где d_j — дальность

* *Маносин Владислав Валерьевич* — студент мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, каф. вычислительной математики, e-mail: `vladislav.manosin@math.msu.ru`.

Manosin Vladislav Valerievich — Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Кумсков Михаил Иванович* — д-р физ.-мат. наук, профессор каф. вычислительной математики мех.-мат. ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, зав. лабораторией вычислительных методов, e-mail: `mikhail.kumskov@math.msu.ru`.

Kumskov Mikhail Ivanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Computational Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; Head of the Laboratory of Computational Methods.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

до препятствия, либо 5 м без пересечения. Учитывается слой препятствий Unity.

Вектор из 52 признаков содержит: локальное направление на цель (x, z) (2), расстояние до цели (1), локальные линейную и угловую скорости (3+3), мировую вертикаль в системе ровера (3), уклоны (4) и LiDAR (36). Дистанция делится на 50 м и ограничивается единицей; скорости — на 4 м/с и 1 рад/с с ограничением $[-1, 1]$. Уклоны измеряются в четырёх точках на расстоянии 1,5 м от ровера; углы нормалей поверхности к вертикали делятся на 45°, обрезаются до $[0, 1]$ (без пересечения — 0). Направления единичные.

Тяга, поворот и тормоз подаются в `RoverController.SetInputs` в $[-1, 1]$ (торможение в $[0, 1]$). Пределы [1]: 500 Н·м, 45°, 1000 Н·м. Преобразование внутри контроллера не проверено.

Плотная награда v5 за прогресс к цели и время:

$$r_t^{\text{prog}} = \text{clip}\big(0{,}1(d_{t-1} - d_t), -0{,}05, 0{,}05\big), \quad r_t^{\text{time}} = -0{,}0002.$$

Столкновение даёт $-0{,}25$, а минимальная дальность q_t в переднем секторе $\pm 45°$ — штраф

$$r_t^{\text{near}} = -0{,}0005 \left[\text{clip}\left(\frac{2 - q_t}{1{,}5}, 0, 1\right)\right]^2;$$

При $q_t \geq 2$ м штраф нулевой. Цель в радиусе 1,5 м завершает эпизод с $+1$ без плотных наград этого шага; лимит — 8 столкновений. Curiosity отключён.

3. Эксперименты и результаты

Для предварительного подбора конфигурации выполнено по одному диагностическому запуску v2–v5. Показатели по последним 25 тыс. шагов: v2 — штраф за столкновение $-0{,}25$, лимит 8, успех 62,1%, 2,05 столкновения на эпизод; v3 — $-0{,}50$, 3, 42,9%, 0,87; v4 — $-0{,}50$, 8, 54,0%, 1,22; v5 — $-0{,}25$, 8, 62,9%, 1,45. В v5 дополнительно введён штраф за близость; успех без столкновений составил 58,1%.

По сочетанию долей успешных и безопасных эпизодов v5 принята как рабочая конфигурация для дальнейшей оценки.

Для выбранной v5 выполнены три независимых обучения PPO [3] (seed 1, 2, 3; ML-Agents 1.0.0 [4]): батч 1024, буфер 10240, шаг 0,0002, энтропия 0,002, отсечение 0,15, GAE $\lambda = 0{,}95$, дисконтирование 0,995; четыре эпохи, три слоя по 256 нейронов, горизонт 64, по 500000 шагов. Расписания линейные, нормирование выключено; прочие настройки, включая активацию, — по умолчанию.

Оценка: по 500 эпизодов без изменения весов. Успех — расстояние до цели $\leq 1{,}5$ м, отказ — восемь столкновений, тайм-аут — достижение лимита шагов (для v5 значение не уточнено; в сохранённой сцене v2 — 4000). Стартовая позиция фиксирована, угол ровера равномерно распределён на $[0°, 360°)$; координаты цели $x \in [-15, 24]$, $z \in [-10, 11]$ м равномерны, высота — рельеф +0,3 м. Требования: удаление от старта больше 3 м, свободный радиус 1,75 м; до 100 попыток. Карта неизменна. При seed 20260927 проверено совпадение стартовых расстояний; полные начальные состояния не сверялись.

Таблица 1: Оценка v5: по 500 эпизодов на политику

Метрика	Seed 1	Seed 2	Seed 3	Среднее ± SD
Успех, %	54,6	43,2	42,6	46,8 ± 6,8
Успех без столкн., %	41,6	31,8	30,0	34,5 ± 6,2
Лимит столкн., %	7,4	17,2	17,4	14,0 ± 5,7
Тайм-аут, %	38,0	39,6	40,0	39,2 ± 1,1
Столкновений/эп.	1,476	2,224	2,126	1,942 ± 0,407

Из 1500 эпизодов: 702 успеха (517 без столкновений), 210 отказов, 588 тайм-аутов. SD долей — в процентных пунктах [5].

Без столкновений завершились 517 из 702 успешных эпизодов (73,6%); доля 34,5% в табл. 1 рассчитана относительно всех эпизодов. Среди неуспешных завершений преобладают тайм-ауты: 39,2% всех эпизодов при 14,0% завершений по лимиту столкновений. Возможные причины тайм-аутов — излишне осторожное поведение под действием штрафа за близость, зацикливание и недостаточная длительность эпизода.

4. Заключение

LiDAR включён во вход политики, средняя доля успеха — 46,8% в одной сцене. Сравнения со старой политикой нет; камера отключена, цель определяется координатами Unity. Используются земная гравитация и `WheelCollider`, поэтому перенос на реальный ровер не установлен.

Список литературы

[1] А. А. Жабицкая, *Реализация и анализ модели автономной навигации лунного ровера с использованием методов Reinforcement Learning*, ВКР специалиста, МГУ имени М. В. Ломоносова, М., 2025.

[2] L. Tai, G. Paolo, M. Liu, “Virtual-to-Real Deep Reinforcement Learning: Continuous Control of Mobile Robots for Mapless Navigation”, IEEE/RSJ Int. Conf.

on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2017, 31–36. DOI: 10.1109/IROS.2017.8202134.

[3] J. Schulman, F. Wolski, P. Dhariwal, A. Radford, O. Klimov, "Proximal Policy Optimization Algorithms", arXiv: arXiv:1707.06347.

[4] A. Juliani, V.-P. Berges, E. Teng et al., "Unity: A General Platform for Intelligent Agents", arXiv: arXiv:1809.02627.

[5] P. Henderson, R. Islam, P. Bachman et al., "Deep Reinforcement Learning that Matters", AAAI Conference on Artificial Intelligence, **32**:1. DOI: 10.1609/aaai.v32i1.11694 (2018).

Статья поступила 5 октября 2026 г.

Investigation and Refinement of a Virtual Rover Navigation System in Unity Based on Reinforcement Learning

V. V. Manosin, M. I. Kumskov

We audit and refine a PPO-based virtual rover navigation prototype. The original observation lacked obstacle distances; the revised 52-dimensional vector contains 36 LiDAR features. Three independently trained policies were evaluated over 500 episodes each. The mean success rate was 46.8%, with a between-run standard deviation of 6.8 percentage points. The results apply to one simulated scene only.

Keywords: reinforcement learning, navigation, virtual rover, PPO, LiDAR.

References

[1] A. A. Zhabitskaya, *Implementation and Analysis of a Lunar Rover Autonomous Navigation Model Using Reinforcement Learning Methods*, Specialist thesis, Lomonosov Moscow State University (In Russian), Moscow, 2025.

[2] L. Tai, G. Paolo, M. Liu, "Virtual-to-Real Deep Reinforcement Learning: Continuous Control of Mobile Robots for Mapless Navigation", IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2017, 31–36. DOI: 10.1109/IROS.2017.8202134.

[3] J. Schulman, F. Wolski, P. Dhariwal, A. Radford, O. Klimov, "Proximal Policy Optimization Algorithms", arXiv: arXiv:1707.06347.

[4] A. Juliani, V.-P. Berges, E. Teng et al., "Unity: A General Platform for Intelligent Agents", arXiv: arXiv:1809.02627.

[5] P. Henderson, R. Islam, P. Bachman et al., "Deep Reinforcement Learning that Matters", AAAI Conference on Artificial Intelligence, **32**:1. DOI: 10.1609/aaai.v32i1.11694 (2018).

Received on October 5, 2026

Тестирование больших языковых моделей на минимальных эмоциональных предложениях

Д. А. Мурсалимов*, П. В. Ярошенко‡, Н. В. Лукашевич§

На минимальных русскоязычных предложениях оценивались точность классификации эмоций восемью моделями и влияние языковой формы на их ответы. Точность Alice AI LLM и Qwen 3.5-397B-A17B при округлении составила 0,751. Наибольший macro-F1 наблюдался у Alice AI LLM (0,742). В утвердительных предложениях прошедшего времени замена точки вопросительным знаком чаще меняла метку у каждой модели, чем у аннотаторов.

Ключевые слова: языковые модели, классификация эмоций, отрицание, пунктуация, русский язык.

1. Задача и данные

Распознавание эмоций в тексте важно для диалоговых систем и анализа сообщений [1]. Проверки на контролируемых изменениях текста выявляют ошибки моделей, скрытые за общими метриками [2]. Минимальные предложения позволяют оценить реакцию на отдельные языковые признаки при одном и том же глаголе.

Для 473 глаголов словаря русских эмоциональных слов RusEmoLex [3] составлено по 12 предложений: «Она (не) + глагол в прошедшем времени женского рода» или «(Не) + императив единственного числа» с точкой, вопросительным или восклицательным знаком. Все 5 676 предложений размечены пятью носителями русского языка. Аннотаторы размечали предложения по следующим категориям: радость, грусть, злость,

* *Мурсалимов Данил Азатович* — аспирант факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; науч. руководитель: Кузина Лариса Николаевна, e-mail: murdanil7@yandex.ru, ORCID: 0009-0001-8005-7757.

Mursalimov Danil — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University; supervisor: Larisa Nikolaevna Kuzina.

‡ *Ярошенко Полина Владимировна* — канд. филол. наук, науч. сотр. НИВЦ МГУ, e-mail: polina.iaroshenko@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-9425-5842.

Iaroshenko Polina V. — PhD in Philology, Researcher, Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University.

§ *Лукашевич Наталья Валентиновна* — д-р техн. наук, вед. науч. сотр. НИВЦ МГУ, e-mail: louk_nat@mail.ru, ORCID: 0000-0002-1883-4121.

Loukachevitch Natalia V. — DSc in Engineering, Leading Researcher, Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

страх, удивление, нейтральный класс и неграмматично. После отбора по совпадению не менее трёх оценок и наличию не более одной пометки «неграмматично» осталось 4 127 предложений для 470 глаголов.

2. Эксперимент и оценка языковых моделей

Восьми моделям без дообучения подавалось по одному предложению с общей русскоязычной инструкцией. При температуре 0 требовалось выбрать одну из шести меток по смыслу высказывания, предпочитая эмоциональную при сомнении, и вернуть её в JSON.

Таблица 1: Качество классификации. Точки показывают оценки метрик, отрезки — 95%-е доверительные интервалы.

Метод	Accuracy	0,65 0,70 0,75	Macro-F1	0,65 0,70 0,75
Alice AI LLM	**0,751**		**0,742**	
Qwen 3.5-397B-A17B	**0,751**		0,733	
YandexGPT Pro 5.1	0,732		0,734	
YandexGPT Lite 8B	0,722		0,716	
Qwen 3.6-27B	0,722		0,719	
GPT-OSS 120B	0,713		0,708	
DeepSeek V4.1 Flash	0,674		0,675	
Qwen3.5-9B	0,670		0,662	
RusEmoLex	0,584		0,509	
«Грусть» (частый класс)	0,224		—	
Равномерный выбор	0,167		—	

Метка глагола из RusEmoLex присваивалась всему предложению.

По точности лидировали Alice AI LLM и Qwen 3.5-397B-A17B. Интервалы и парные тесты рассчитывались бутстрэпом по глаголам. С поправкой Холма (14 тестов на лидера) Alice значимо опередила 6 моделей по точности и 5 по macro-F1, Qwen — 5 и 2 соответственно ($p < 0{,}05$). Между лидерами не выявлено значимых различий ни по одной метрике.

3. Влияние языковой формы на ответы моделей

Метки всех моделей и аннотаторов сравнивались на 3 539 парах. Исходная форма — утверждение в прошедшем времени с точкой (рис. 1).

В логистической GEE с кластеризацией по глаголам тест Вальда выявил различия в реакции на преобразования ($\chi^2(80) = 1021{,}55$, $p < 0{,}001$). Совместно проверялись 80 коэффициентов взаимодействия (8 моделей по 10 сравнений с опорным преобразованием относительно разметки).

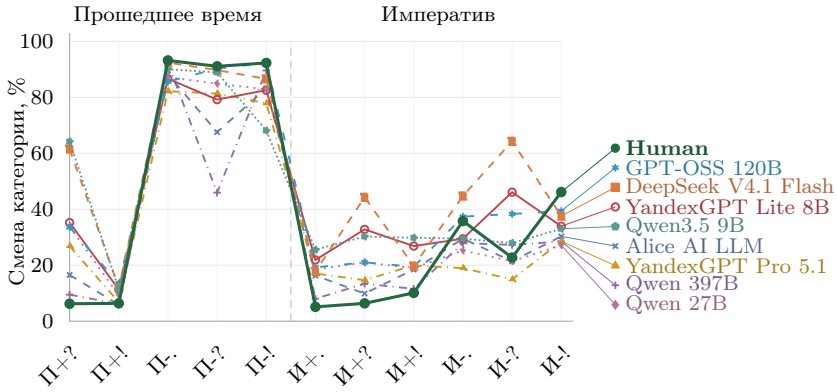


Рис. 1: Смена категории на общих парах. П — прошедшее время, И — императив, + — без отрицания, − — с отрицанием. Human — метка большинства аннотаторов.

4. Пробинг внутренних представлений

Линейный классификатор с L_2-регуляризацией обучался предсказывать метку аннотаторов по активациям YandexGPT Lite 8B до генерации ответа. Для обучения и валидации использовались случаи согласия модели с аннотаторами (2 132 и 428). Проверялось, переносилась ли связь между активациями и меткой с примеров согласия на примеры расхождения. Глаголы теста не встречались при обучении и валидации.

Сравнивались среднее, максимум и минимум по токенам предложения, векторы последнего токена предложения и служебного символа между вводом и ответом модели. Наибольший macro-F1 на валидации дал вектор служебного символа на выходе 20-го слоя. На полном тесте (589 примеров) точность классификатора составила 0,783, ответов модели — 0,713. Классификатор предсказал метку аннотаторов в 58 из 169 случаев, где модель ошиблась.

5. Заключение

В работе оценивались точность моделей на минимальных эмоциональных предложениях и влияние языковой формы на их ответы. Модели сходно с аннотаторами реагировали на отрицание, а замена точки вопросительным знаком чаще меняла метку у моделей. На части примеров, где YandexGPT Lite 8B ошиблась, линейный классификатор правильно предсказал метку аннотаторов по активациям внутренних слоёв модели.

При подготовке текста и кода анализа применялись большие языковые модели.

Список литературы

[1] D. Demszky, D. Movshovitz-Attias, J. Ko, A. Cowen, G. Nemade, S. Ravi, "GoEmotions: A Dataset of Fine-Grained Emotions", *Proc. 58th ACL*, 2020, 4040–4054. DOI: 10.18653/v1/2020.acl-main.372.

[2] M. T. Ribeiro, T. Wu, C. Guestrin, S. Singh, "Beyond Accuracy: Behavioral Testing of NLP Models with CheckList", *Proc. 58th ACL*, 2020, 4902–4912. DOI: 10.18653/v1/2020.acl-main.442.

[3] P. V. Iaroshenko, N. V. Loukachevitch, "RusEmoLex: Russian Emotion Lexicon", *Russian Journal of Linguistics*, **29**:3 (2025), 659–687. DOI: 10.22363/2687-0088-44439.

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

Testing Large Language Models on Minimal Emotional Sentences

D. Mursalimov, P. V. Iaroshenko, N. V. Loukachevitch

Eight language models classified emotions in minimal Russian sentences. Alice AI LLM and Qwen 3.5-397B-A17B tied in rounded accuracy (0.751). Alice AI LLM had the highest macro-F1 (0.742). Replacing a period with a question mark in affirmative past-tense sentences changed labels more often for each model than for annotators.

Keywords: language models, emotion classification, negation, punctuation, Russian.

References

[1] D. Demszky, D. Movshovitz-Attias, J. Ko, A. Cowen, G. Nemade, S. Ravi, "GoEmotions: A Dataset of Fine-Grained Emotions", *Proc. 58th ACL*, 2020, 4040–4054. DOI: 10.18653/v1/2020.acl-main.372.

[2] M. T. Ribeiro, T. Wu, C. Guestrin, S. Singh, "Beyond Accuracy: Behavioral Testing of NLP Models with CheckList", *Proc. 58th ACL*, 2020, 4902–4912. DOI: 10.18653/v1/2020.acl-main.442.

[3] P. V. Iaroshenko, N. V. Loukachevitch, "RusEmoLex: Russian Emotion Lexicon", *Russian Journal of Linguistics*, **29**:3 (2025), 659–687. DOI: 10.22363/2687-0088-44439.

Received on November 6, 2026

Гибридное извлечение состава вентиляционных установок из проектной документации: формальные грамматики и большие языковые модели

В. В. Осокин*, Р. Ф. Алимов‡

Заводы вентиляционного оборудования переносят данные об установках из проектов в программу подбора вручную. Описана схема автоматического извлечения этих данных: большая языковая модель читает изображение листа в JSON-схему и классифицирует листы, не опознанные по тексту; отбор остальных листов, разбор обозначений установок по формальным грамматикам, объединение источников и решения выполняет проверяемый код. Полнота отбора листов с таблицами систем и спецификациями — 100 % на обучающем корпусе и 94–99 % на отложенной выборке; при перепроверке 560 прочитанных полей ошибок чтения чисел не найдено.

Ключевые слова: большие языковые модели, извлечение информации, формальные грамматики, проектная документация, вентиляционные установки.

1. Введение

Завод вентиляционного оборудования получает проект раздела ОВ (отопление и вентиляция) в PDF и переносит сведения об установках в программу подбора вручную. Оформление у каждой организации свое, часть листов — сканы. Отдать документ большой языковой модели — получить невоспроизводимый ответ; разбирать его одними правилами — сломаться на первом непривычном формате. Модель решает только две задачи восприятия: читает изображение листа в заданную форму и относит к классам листы, которые не удалось опознать по тексту. Отбор остальных листов, разбор обозначений установок по формальным грамматикам, объединение источников и все решения выполняет проверяемый код.

* *Осокин Виктор Владимирович* — ООО «Два Облака», e-mail: victor@dvaoblaka.ru, ORCID: 0009-0000-6072-8237.

Osokin Viktor Vladimirovich — Dva Oblaka LLC.

‡ *Алимов Рустамжон Фахриддинович* — ООО «Два Облака», e-mail: rustam@dvaoblaka.ru, ORCID: 0009-0002-4941-8857.

Alimov Rustamzhon Fakhriddinovich — Dva Oblaka LLC.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Постановка задачи

По проекту нужно получить список вентиляционных систем и для каждой — обозначение, состав установки как перечень секций по ходу воздуха и числовые параметры (расход, давление, температуры, мощности), по которым установка подбирается в каталоге завода.

Нужные сведения лежат на листах трех видов: таблица «Характеристика отопительно-вентиляционных систем» (ХОВС) по ГОСТ 21.602 [1], спецификация по ГОСТ 21.110 и вложенные техданные производителя.

Требования: не пропускать листы с системами (лишний лист инженер снимает одним щелчком, пропущенный теряет установки); не искажать числа и состав; работать на документах новых проектировщиков без донастройки. Если параметра в документе нет, правильный ответ — `null`, а не правдоподобное число, которое уйдет в подбор.

3. Метод

Шаг 1. Отбор листов. Из PDF берется текст; детекторы по заголовку таблицы ХОВС и признакам шапки (обозначения систем вида П1, единица $м^3/ч$) и по шапке спецификации («Поз.», «Наименование», «шт») дают класс листа. Листы с менее чем 400 буквами, нечитаемым слоем, крупным растром или обозначениями систем без заголовка классифицирует по изображению модель Claude Sonnet 4.6. Список подтверждает инженер.

Шаг 2. Чтение листов. Подтвержденные листы читает по изображению модель Claude Opus 5.5. Ответ ограничен JSON-схемой (ограниченное декодирование [2]): для ХОВС — обозначение, направление, расход ($м^3/ч$), давление (Па), мощность (кВт), нагреватели, рекуператор, охладитель, фильтры с температурами (°C) и мощностями; для спецификации — позиции с теми же величинами и перечнем секций 14 типов. Отсутствующее значение — `null`, выдумывать запрещено.

Шаг 3. Разбор обозначений по формальным грамматикам. У ряда производителей марка установки сама является формулой состава, например `ANR6 L/2K1/2P1/2F1/R1/N5.2/V1.0.P40.R-4x30/H1/B1 + P/...`: секции перечислены по ходу воздуха через «/», «+» отделяет вытяжку, числа задают размеры теплообменников. Для таких обозначений по каталогам производителей составлены четыре формальные грамматики: секционных установок (AIRNED, ANR, ANP), моноблочных (LITENED, UTR), компактных (MININED, MPU) и буквенных марок (VTS). Терми-

нальные символы грамматик — коды секций из конечного словаря (11 серий, 81 код: K1 клапан, F1 фильтр, N1 нагреватель, R1 рекуператор, V1 вентилятор и др.) и числовые поля фиксированного вида; нетерминалы — установка, приточная и вытяжная части, секция, типоразмер. Правила не содержат рекурсии, поэтому все четыре грамматики регулярны, и марка разбирается конечным автоматом без участия модели [3]. Кириллические двойники латинских букв нормализуются; цепочка, не выводимая ни в одной грамматике, дает предупреждение, а не отказ.

Шаг 4. Объединение источников. Расход, давление и мощность — из ХОВС; спецификация и техданные лишь заполняют пустые поля, расхождение больше 2 % попадает в конфликты. Состав: техданные производителя (если вложены), иначе марка, иначе секции спецификации, иначе блоки ХОВС. Температуры и мощности нагревателей и охладителей: спецификация, ХОВС, техданные; чего нет нигде — `null`.

4. Результаты

Отбор листов. Показатели — до подтверждения инженером, относительно ручной разметки. На обучающем корпусе (49 документов, около 2900 листов, из них модели показано 970) листы ХОВС и спецификаций найдены полностью: полнота 100 %, точность 87,7 и 96,5 %. На отложенной выборке (14 документов других проектировщиков, около 1400 листов) без изменений кода: полнота 94,4 и 99,1 %, точность 72,3 и 89,2 %.

Чтение листов. Из каждого из 64 документов взяты две системы, их листы прочитаны моделью заново, 560 полей сопоставлены с сохраненным результатом: совпали 535 (95,5 %), все 25 расхождений объяснились правилами объединения, ошибок чтения числа нет. Отдельно за аудит найдено и исправлено 10 дефектов кода объединения.

Разбор обозначений. Все 98 контрольных марок (40 из реальных проектов, остальные из бланков подбора и каталогов) разобраны верно.

5. Заключение

Схема решает поставленную задачу: модель надежно читает листы, детекторы находят листы ХОВС и спецификаций у новых проектировщиков

практически полностью, марки разбираются формальными грамматиками без модели. Схема работает в облачном сервисе подбора оборудования; по отзывам заводов, данные пригодны для подбора без ручного переноса.

Список литературы

[1] *ГОСТ 21.602-2016. СПДС. Правила выполнения рабочей документации отопления, вентиляции и кондиционирования*, Стандартинформ, М., 2016.

[2] B. T. Willard, R. Louf, "Efficient guided generation for large language models", 2023, arXiv: 2307.09702.

[3] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов*, Наука, М., 1985.

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

Hybrid extraction of air handling unit configurations from building design documentation: formal grammars and large language models

V. V. Osokin, R. F. Alimov

HVAC equipment manufacturers transfer air handling unit data from building designs into selection software by hand. We describe a scheme for extracting this data automatically: a large language model reads the sheet image into a JSON schema and classifies sheets not recognised from text; the remaining sheet selection, parsing of unit designations by formal grammars, source merging and all decisions are done by verifiable code. Recall of system-table and specification sheets is 100 % on the training corpus and 94–99 % on a held-out sample; a recheck of 560 extracted fields found no number-reading errors.

Keywords: large language models, information extraction, formal grammars, design documentation, air handling units.

References

[1] *GOST 21.602-2016. SPDS. Rules for working documentation of heating, ventilation and air conditioning*, Standartinform, M., 2016 (in Russian).

[2] B. T. Willard, R. Louf, "Efficient guided generation for large language models", 2023, arXiv: 2307.09702.

[3] V. B. Kudryavtsev, S. V. Aleshin, A. S. Podkolzin, *Vvedenie v teoriyu avtomatov*, Nauka, M., 1985 (in Russian).

Received on November 8, 2026

Динамика размерности представлений и информации о классе при обучении импульсной нейронной сети

Н. А. Поспелов[*], В. В. Плюснин[‡], О. С. Рогожникова[§], А. А. Иванова[¶], К. А. Торопова[‖], О. И. Ивашкина[**], В. А. Аветисов[‡‡], К. В. Анохин[§§]

Для одной импульсной сети ResNet-18, обученной классификации изображений, во всех её 17 импульсных слоях прослежены в ходе обучения размерность представлений и информация о классе в активности отдельных нейронов. В глубоких слоях размерность сначала снижается и лишь затем возрастает; линейная мера размерности этого сжатия не выявляет. Информация о классе в расчёте на нейрон в первые эпохи возрастает в ранних и средних слоях, затем снижается в них и возрастает в глубоких; эпоха её максимума не убывает с глубиной слоя.

Ключевые слова: импульсные нейронные сети, внутренняя размерность, взаимная информация, популяционное кодирование.

[*] *Поспелов Никита Андреевич* — инженер-исследователь, Институт перспективных исследований мозга МГУ имени М. В. Ломоносова (ИПИМ МГУ); автор для переписки, e-mail: nik-pos@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6637-2120.

Pospelov Nikita Andreevich — Research Engineer, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU); corresponding author.

[‡] *Плюснин Виктор Владимирович* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: witkax@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9784-8283.

Plusnin Viktor Vladimirovich — Research Assistant, IABS MSU.

[§] *Рогожникова Ольга Сергеевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: osrogozhnikova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2540-4402.

Rogozhnikova Olga Sergeevna — Research Assistant, IABS MSU.

[¶] *Иванова Анна Андреевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: anivis33@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2454-1288.

Ivanova Anna Andreevna — Research Assistant, IABS MSU.

[‖] *Торопова Ксения Александровна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: xen.alexander@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3081-2133.

Toropova Ksenia Aleksandrovna — Junior Researcher, IABS MSU.

[**] *Ивашкина Ольга Игоревна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: oivashkina@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1540-7677.

Ivashkina Olga Igorevna — Junior Researcher, IABS MSU.

[‡‡] *Аветисов Владик Аванесович* — д.ф.-м.н., проф., ФИЦ ХФ РАН, e-mail: vladik.avetisov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2516-8868.

Avetisov Vladik Avanesovich — DSc (Physics and Mathematics), Professor, Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Постановка задачи. Организация активности слоя нейронной сети характеризуется размерностью многообразия его ответов и количеством информации о решаемой задаче в активности отдельных нейронов. Для сетей с непрерывными активациями известно, что внутренняя размерность по глубине сети сначала возрастает, а затем снижается, причём линейные меры этого не выявляют [1]; такой же профиль по глубине ранее показан нами для импульсной ResNet-18 [2]. В работе рассматривается, как в ходе обучения импульсной сети изменяются размерность каждого слоя и информация о классе в активности его нейронов.

Методы. Анализировалась импульсная ResNet-18, обученная на CIFAR-10 [3]. Представлением слоя служил вектор средних по пространственным позициям чисел спайков его каналов за 50 шагов моделирования для 10 000 тестовых изображений; нейроном далее называется такой канал. Рассмотрены 17 импульсных слоёв (входной sn1 и блоки L1–L4) в 26 состояниях сети до эпохи 900. Внутренняя размерность оценивалась методом двух ближайших соседей [1] на шести подвыборках по 5000 изображений; линейной мерой служил коэффициент участия спектра корреляционной матрицы. Информация нейрона о классе — взаимная информация метки и его ответа, дискретизованного на 16 равнозаполненных интервалов (совпадающие границы объединялись, граничное значение относилось к верхнему интервалу). Единая дискретизация делает слои сопоставимыми; остаточное смещение [4] корректировалось вычитанием среднего по трём перестановкам меток (не более 7,3% исходной оценки). Приводится среднее по нейронам слоя, не зависящее от его ширины.

Сжатие предшествует расширению. В ранних и средних слоях внутренняя размерность возрастала в течение всего обучения (рис. 1а). В семи глубоких слоях (L4 и часть L3) она сначала снижалась, достигала минимума между эпохами 20 и 70 и затем возрастала (рис. 1б); в шести из них глубина минимума составила 1,7–3,6 при стандартном отклонении по подвыборкам около 0,2, в седьмом — лишь 0,7, на уровне разброса. Минимум сохраняется при добавлении равномерного шума в пределах половины шага значений ответа (три реализации, четыре слоя), то есть не вызван совпадением расстояний между дискретными ответами. Линейная мера минимума не выявляет (рис. 1в).

Максимум информации о классе смещается к глубоким слоям. До обучения средняя информация нейрона во всех слоях близка: 0,11–0,18 бит (рис. 1г). К пятой эпохе она возрастает до 0,25–0,41 бит в блоках

[§§] *Анохин Константин Владимирович* — директор ИПИМ МГУ, д.м.н., академик РАН, e-mail: k.anokhin@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, IABS MSU; DSc (Medicine), Full Member of the Russian Academy of Sciences.

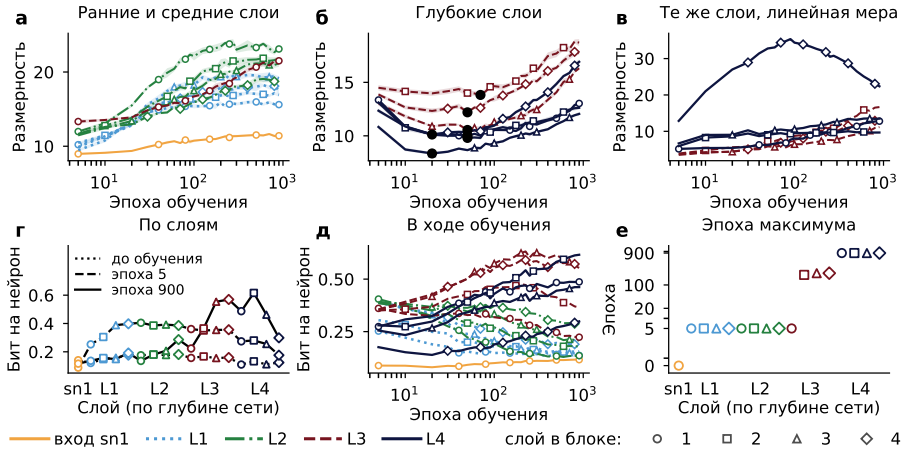


Рис. 1: Внутренняя размерность слоёв без минимума (а) и с минимумом (б; чёрные точки — минимумы); линейная мера для слоёв панели б (в). Информация о классе в расчёте на нейрон: по слоям (г), в ходе обучения (д), эпоха её максимума по слоям (е).

L1–L3 и лишь до 0,18–0,28 бит в L4. Далее динамика в блоках различается (рис. 1д): в L1 и L2 максимум приходится на пятую эпоху, и к концу обучения информация снижается до 0,14–0,29 бит. В трёх из четырёх слоёв L3 максимум достигается на эпохах 200–225 (до 0,63 бит), в первом слое L3 — на пятой. В L4 рост продолжается до конца обучения (0,30–0,62 бит). Итак, эпоха максимума не убывает с глубиной (рис. 1е).

Обсуждение. В первые десятки эпох многообразие ответов глубоких слоёв сжимается, а нейроны ранних и средних слоёв в среднем информативнее глубоких. Затем в глубоких слоях растут и размерность, и информация нейронов, а в ранних последняя снижается. Средняя информация нейронов не определяет информацию слоя в целом (при избыточности или синергии кода), и о её распределении между слоями не говорит; причинная связь процессов не проверялась. Ограничения: одна сеть, один запуск обучения; разброс отражает лишь выбор изображений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Некоммерческого Фонда развития науки и образования «Интеллект».

Список литературы

[1] A. Ansuini, A. Laio, J. H. Macke, D. Zoccolan, “Intrinsic dimension of data representations in deep neural networks”, *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2019.

[2] N. Pospelov, O. Ivashkina, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, A. Ivanova, K. Toropova, K. Anokhin, “Information-plane dynamics during learning across artificial and

biological neural systems", *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2026 (to appear).

[3] N. Pospelov, A. Chertkov, M. Beketov, I. Oseledets, K. Anokhin, "Fast gradient-free activation maximization for neurons in spiking neural networks", *Neurocomputing*, **618** (2025), 129070. DOI: 10.1016/j.neucom.2024.129070.

[4] L. Paninski, "Estimation of Entropy and Mutual Information", *Neural Computation*, **15**:6 (2003), 1191–1253. DOI: 10.1162/089976603321780272.

Статья поступила 9 октября 2026 г.

Dynamics of representation dimensionality and class information during training of a spiking neural network

N. A. Pospelov, V. V. Plusnin, O. S. Rogozhnikova, A. A. Ivanova, K. A. Toropova, O. I. Ivashkina, V. A. Avetisov, K. V. Anokhin

For a single spiking ResNet-18 trained on image classification, we track, in all 17 layers of spiking neurons during training, the dimensionality of representations and the class information carried by individual neurons. In deep layers the dimensionality first drops and only then grows, and a linear measure does not detect this compression. Per-neuron class information rises in early and middle layers during the first epochs, then declines there and rises in deep layers; the epoch of its maximum does not decrease with layer depth.

Keywords: spiking neural networks, intrinsic dimension, mutual information, population coding.

References

[1] A. Ansuini, A. Laio, J. H. Macke, D. Zoccolan, "Intrinsic dimension of data representations in deep neural networks", *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2019.

[2] N. Pospelov, O. Ivashkina, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, A. Ivanova, K. Toropova, K. Anokhin, "Information-plane dynamics during learning across artificial and biological neural systems", *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*, 2026 (to appear).

[3] N. Pospelov, A. Chertkov, M. Beketov, I. Oseledets, K. Anokhin, "Fast gradient-free activation maximization for neurons in spiking neural networks", *Neurocomputing*, **618** (2025), 129070. DOI: 10.1016/j.neucom.2024.129070.

[4] L. Paninski, "Estimation of Entropy and Mutual Information", *Neural Computation*, **15**:6 (2003), 1191–1253. DOI: 10.1162/089976603321780272.

Received on October 9, 2026

Построение графовой модели дорожных ситуаций на основе правил дорожного движения с использованием языковых моделей

Н. С. Потапова*

В работе рассматривается представление правил дорожного движения на естественном языке в виде ориентированных графов с атрибутами $G = (V, E, P)$. На примере выезда с прилегающей территории разработана программа на языке C, задающая вершины, рёбра и их смысловые признаки. Полученный граф и код программы использованы как образец при разборе других норм с помощью ChatGPT 5. Результаты проверялись вручную по тексту правил. По установленным критериям выделена 51 самостоятельная дорожная ситуация.

Ключевые слова: правила дорожного движения, графовая модель, языковые модели, формализация знаний, дорожные ситуации.

1. Постановка задачи

Правила дорожного движения (ПДД) [1] описывают действия участников движения в зависимости от конкретной обстановки. Для формального представления таких предписаний необходимо определить, кто выполняет действие, в каких условиях возникает обязанность и каким участникам предоставляется преимущество. В работе рассматриваются прежде всего нормы, связанные с уступкой дороги, пропуском и обеспечением беспрепятственного движения.

Дорожная ситуация представляется ориентированным графом с атрибутами

$$G = (V, E, P),$$

где V — вершины, соответствующие участникам и объектам дорожной обстановки, E — направленные рёбра отношений между ними, а P — признаки вершин и рёбер. Основными смысловыми компонентами являются

* *Потапова Нина Сергеевна* — студентка 4-го курса кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: nina.potapova@math.msu.ru.

Potapova Nina Sergeevna — Fourth-year undergraduate student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

субъект обязанности, ситуация, участники с преимуществом и отношения между ними.

Условия применения нормы отражаются свойствами объектов и рёбрами, описывающими обстановку, а предписание об уступке дороги — отдельным направленным ребром. Таким образом, обязанность рассматривается в контексте всей дорожной ситуации, а не независимо от неё. В данной работе граф служит формой записи смысла правила; логический вывод по графу не реализуется.

2. Программное построение графа-образца

Сначала была разработана программа на языке C для построения графа одной дорожной ситуации. В ней структуры `Vertex`, `Edge` и `Graph` задают соответственно вершины с идентификатором, типом, ролью, свойством и смысловым пояснением, рёбра с начальной и конечной вершинами, типом отношения и пояснением, а также весь граф. Функции `initGraph`, `addVertex`, `addEdge` и `printGraph` обеспечивают его создание и текстовый вывод.

Образцом выбран выезд транспортного средства с прилегающей территории на дорогу по п. 8.3 ПДД. В программе заданы пять вершин: транспортное средство выезжающего водителя, прилегающая территория, дорога, движущиеся по дороге транспортные средства и пешеходы. Шесть рёбер фиксируют нахождение на прилегающей территории (`NAHODITSYA_NA`), выезд на дорогу (`VYEZD_NA`), движение других участников (`DVIZHETSYA_PO`) и обязанности уступить им дорогу (`USTUPIT_DOROGU`).

В данном примере вершина транспортного средства обозначает также субъекта обязанности — водителя, действующего посредством управляемого им автомобиля. Признак `prilegayuschaya_territoriya` и ребро выезда указывают, при каких обстоятельствах действует предписание; рёбра `USTUPIT_DOROGU` выражают само требование. Программа создаёт этот конкретный граф из явно заданных вершин и рёбер, а не преобразует произвольный текст ПДД автоматически.

3. Использование языковой модели

Для распространения разработанного представления на другие нормы ПДД использовался ChatGPT 5. Модели передавались код программы на C и построенный по п. 8.3 граф как образец структуры $G = (V, E, P)$. В задании предлагалось для каждого самостоятельного случая, связанного с уступкой дороги или предоставлением преимущества, определить

субъекта обязанности, ситуацию, участника с преимуществом, вершины и отношения графа, не изменяя нормативный смысл исходного правила.

Например, для п. 8.4 ПДД в ответе модели указано: «При перестроении водитель уступает транспортным средствам, движущимся попутно без изменения направления». В соответствующей графовой записи выделяются транспортное средство перестраивающегося водителя, попутные транспортные средства и условие перестроения; обязанность уступить представляется направленным ребром. По образцу первоначального графа ответы модели приводились к единому формату вершин, рёбер и признаков.

Полученные описания проверялись вручную: участники, условия, направление отношения и итоговый смысл сопоставлялись с соответствующими положениями ПДД. Проверялось также, что каждое ребро связывает определённые вершины. Этот этап необходим, поскольку интерпретация нормативного текста языковой моделью может быть неточной.

4. Формирование базы дорожных ситуаций

Для отбора правил использовались как непосредственное требование «уступить дорогу», так и близкие по смыслу предписания: «имеет преимущество», «пропустить», «дать возможность закончить», «освободить полосу», «обеспечить беспрепятственный проезд», «не создавать помех». Само определение термина «уступить дорогу» не выделялось в отдельный случай, если не описывало конкретную дорожную обстановку.

Составные нормы разделялись на самостоятельные случаи при различии участников, манёвров или условий применения. Например, в п. 8.3 ПДД отдельно рассматриваются выезд с прилегающей территории и съезд с дороги: для них различаются условия и состав участников, которым следует уступить. Ограничения на обгон специального транспорта учитывались как контекстные запреты, а не как самостоятельные отношения `USTUPIT_DOROGU`.

По этим критериям выделен **51 самостоятельный случай** — это число дорожных ситуаций, а не число различных пунктов ПДД. Для каждого случая определены исходное правило, объекты и их признаки, отношения графа и итоговое смысловое описание. Полученный набор предназначен для дальнейшего анализа правил движения в графовой форме.

5. Заключение

Разработан подход к представлению норм ПДД в виде ориентированных графов с атрибутами. Программа на C демонстрирует построение одного графа-образца; использование ChatGPT 5 позволило применить тот же принцип описания к другим ситуациям. Графовые записи проверялись по исходному тексту правил вручную. Полученный набор графовых описаний может использоваться при дальнейшем построении систем автоматического анализа дорожных ситуаций.

Список литературы

[1] Совет Министров — Правительство Российской Федерации, *Правила дорожного движения Российской Федерации (утверждены постановлением от 23 октября 1993 г. № 1090 «О Правилах дорожного движения»)*, 1993, https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_2709/ .

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

Constructing a Graph Model of Road Traffic Situations from Traffic Rules Using Language Models

N. S. Potapova

The paper considers representing natural-language traffic rules as attributed directed graphs $G = (V, E, P)$. A C program was developed to construct a graph for a vehicle leaving an adjacent area; its vertices, edges, and semantic attributes form a reference example. The program and the example graph were then used as a reference for analyzing other rules with ChatGPT 5. The results were manually checked against the rules. A total of 51 distinct traffic situations were identified according to specified selection criteria.

Keywords: traffic rules, graph model, language models, knowledge formalization, road traffic situations.

References

[1] Council of Ministers — Government of the Russian Federation, *Traffic Rules of the Russian Federation (approved by Resolution No. 1090 of October 23, 1993, "On Traffic Rules")*, 1993 (In Russian), https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_2709/.

Received on November 6, 2026

Гибридный подход к оценке риска подозрительных транзакций в платёжных системах

С. А. Радченко*, Б. Г. Мубараков‡

Рассматривается гибридный подход к мониторингу транзакций, объединяющий логистическую регрессию и экспертные правила. На выборке из 300 000 операций PaySim полнота обнаружения на тестовой части выросла с 75,32% до 96,10%, precision снизилась с 84,06% до 19,73%; доля алертов составила около 0,63%. Описаны признаки, правила и протокол выбора порогов. Развитие подхода связано с поведенческими признаками и обучаемым объединением оценок.

Ключевые слова: машинное обучение, антифрод, платёжные системы, экспертные правила, поведенческий анализ, оценка риска.

1. Постановка задачи и метод

При мониторинге платёжных операций с редким мошенничеством существенны precision, recall и ложные тревоги [1, 2]. В [5] правила формируются и рекомбинируются по ML-моделям. Здесь оценивается взвешенное объединение ML и заданных правил с решениями ALLOW (пропуск), REVIEW (проверка), BLOCK (ограничение); сам принцип гибридизации не заявляется новым.

В обоих режимах используется одна и та же логистическая регрессия с оценкой p_t, чтобы сравнить решения с экспертными правилами и без них при фиксированном классификаторе. Сравнение с ансамблями не проводилось. Модель использует время, тип и сумму операции, балансы и производные признаки. Числовые признаки стандартизированы, тип операции закодирован методом one-hot. Параметры модели: `lbfgs`, до 1000 итераций, сбалансированные веса классов.

Радченко Сергей Андреевич — магистрант ИВМиИТ КФУ, e-mail: sergei2003r@gmail.com.

Radchenko Sergey Andreevich — Master's student, Kazan Federal University.

‡*Мубараков Булат Газинурович* — канд. техн. наук, доцент каф. САИТ, ИВМиИТ КФУ, e-mail: mubbulat@mail.ru, ORCID: 0000-0002-7628-9870.

Mubarakov Bulat Gazinurovich — docent, Kazan Federal University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Для индикаторов правил $I_j \in \{0,1\}$ задаются

$$r_t = \min\left(1, \sum_{j=1}^{7} w_j I_j\right), \quad w = (0{,}01; 0{,}12; 0{,}15; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}25; 0{,}50).$$

Правила по порядку: TRANSFER/CASH_OUT; обнуление счёта отправителя; отношение суммы к его положительному исходному балансу $\geq 0{,}90$ для TRANSFER/CASH_OUT; крупная сумма; крупный TRANSFER и крупный CASH_OUT на счёт с нулевым исходным балансом (два правила); цепочка TRANSFER→CASH_OUT в пределах 24 шагов. Границы крупных сумм определяются по train: общая — $Q_{0.995}$, для TRANSFER/CASH_OUT — соответствующие $Q_{0.99}$; в данном запуске это 2 464 049,35, 10 000 000 и 580 099,51. Правило I_4 срабатывает при достижении общего порога суммы или порога для соответствующего типа операции. Суммирование весов с ограничением единицей задаёт обработку комбинаций и нормировку. Итоговый риск $S_t = 0{,}85p_t + 0{,}15r_t$. Коэффициенты объединения заданы заранее и не оптимизировались.

ML-пороги REVIEW и BLOCK равны 0,97826027 и 0,99082319. В гибриде BLOCK также назначается при $S_t \geq 0{,}95$ или при $r_t \geq 0{,}55$ в сочетании с $I_7 \wedge (I_4 \vee I_3)$. При отсутствии BLOCK назначается REVIEW по нижнему ML-порогу, при $S_t \geq 0{,}75$ или при $r_t \geq 0{,}55$ и срабатывании I_7 либо одной из пар (I_4, I_3), (I_4, I_2), (I_5, I_3), (I_6, I_3). В остальных случаях назначается ALLOW.

2. Эксперимент и результаты

Из PaySim [4] стратифицированно отобрали 300 000 операций и разделили их с сохранением долей классов на train/validation/test (60/20/20, `random_state=42`). В этих частях 233, 77 и 77 мошеннических операций соответственно. Предобработка, модель и квантили определены по train. На validation порог REVIEW максимизирует precision при recall $\geq 0{,}80$, порог BLOCK — recall при precision $\geq 0{,}85$ и условии $\theta_{\mathrm{ML,B}} \geq \theta_{\mathrm{ML,R}}$. Пороги риска и правил фиксированы.

Результаты эксперимента на тестовой выборке приведены ниже. ML REVIEW включает все операции, достигшие нижнего порога, в том числе ML BLOCK. Алерты гибрида включают REVIEW и BLOCK.

Режим	Precision	Recall	F_2
ML REVIEW	84,06%	75,32%	76,92%
ML BLOCK	96,43%	70,13%	74,18%
Hybrid	19,73%	96,10%	54,17%

Распределение решений гибрида по классам:

Решение	Мошеннические	Легитимные	Всего
ALLOW	3	59 622	59 625
REVIEW	20	299	319
BLOCK	54	2	56

Гибрид выявил 74 из 77 мошеннических операций. Доля алертов $(319 + 56)/60\,000 \approx 0{,}63\%$. При том же составе группы BLOCK очередь REVIEW выросла с 13 до 319 операций. Из 306 добавленных операций 16 были мошенническими. Precision очереди REVIEW — 6,27%.

3. Развитие подхода

Правило TRANSFER→CASH_OUT на тестовой выборке не сработало. Поведенческие профили и графовые признаки не использовались. Предлагается обучать объединение p_t, r_t и истории клиента логистической регрессией. Текущий опыт использует конечные балансы и случайное разбиение. Для оценки до исполнения платежа нужны временное разбиение с учётом дрейфа [3] и признаки, доступные до операции.

Список литературы

[1] R. J. Bolton, D. J. Hand, “Statistical Fraud Detection: A Review”, *Statistical Science*, **17**:3 (2002), 235–255. DOI: 10.1214/ss/1042727940.

[2] A. Dal Pozzolo, G. Boracchi, O. Caelen, C. Alippi, G. Bontempi, “Credit Card Fraud Detection: A Realistic Modeling and a Novel Learning Strategy”, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **29**:8 (2018), 3784–3797. DOI: 10.1109/TNNLS.2017.2736643.

[3] J. Gama, I. Žliobaité, A. Bifet, M. Pechenizkiy, A. Bouchachia, “A Survey on Concept Drift Adaptation”, *ACM Computing Surveys*, **46**:4 (2014), 44. DOI: 10.1145/2523813.

[4] E. A. Lopez-Rojas, A. Elmir, S. Axelsson, “PaySim: A Financial Mobile Money Simulator for Fraud Detection”, *Proceedings of the 28th European Modeling and Simulation Symposium*, EMSS 2016 (Larnaca, Cyprus), 2016, 249–255.

[5] I. Vorobyev, A. Krivitskaya, “Reducing False Positives in Bank Anti-fraud Systems Based on Rule Induction in Distributed Tree-based Models”, *Computers & Security*, **120** (2022), 102786. DOI: 10.1016/j.cose.2022.102786.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

A Hybrid Approach to Risk Assessment of Suspicious Transactions in Payment Systems

S. A. Radchenko, B. G. Mubarakov

A hybrid transaction-monitoring approach combines logistic regression with expert rules. On a sample of 300,000 PaySim transactions, test recall increased from 75.32% to 96.10%, while precision decreased from 84.06% to 19.73%; the alert rate was about 0.63%. Features, rules, and threshold selection are specified. Future work introduces behavioral features and trainable score aggregation.

Keywords: machine learning, fraud detection, payment systems, expert rules, behavioral analysis, risk assessment.

References

[1] R. J. Bolton, D. J. Hand, "Statistical Fraud Detection: A Review", *Statistical Science*, **17**:3 (2002), 235–255. DOI: 10.1214/ss/1042727940.

[2] A. Dal Pozzolo, G. Boracchi, O. Caelen, C. Alippi, G. Bontempi, "Credit Card Fraud Detection: A Realistic Modeling and a Novel Learning Strategy", *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **29**:8 (2018), 3784–3797. DOI: 10.1109/TNNLS.2017.2736643.

[3] J. Gama, I. Žliobaité, A. Bifet, M. Pechenizkiy, A. Bouchachia, "A Survey on Concept Drift Adaptation", *ACM Computing Surveys*, **46**:4 (2014), 44. DOI: 10.1145/2523813.

[4] E. A. Lopez-Rojas, A. Elmir, S. Axelsson, "PaySim: A Financial Mobile Money Simulator for Fraud Detection", *Proceedings of the 28th European Modeling and Simulation Symposium*, EMSS 2016 (Larnaca, Cyprus), 2016, 249–255.

[5] I. Vorobyev, A. Krivitskaya, "Reducing False Positives in Bank Anti-fraud Systems Based on Rule Induction in Distributed Tree-based Models", *Computers & Security*, **120** (2022), 102786. DOI: 10.1016/j.cose.2022.102786.

Received on October 10, 2026

Оценка стоимости применения для выбора модели структурированной разметки текста

О. Ю. Седельникова*, Н. А. Кукузей‡, И. А. Цыбанов§, О. Л. Ринк¶, А. И. Майсурадзе‖, Р. В. Ищенко**

Выбор модели для практического внедрения определяется балансом между функциональной точностью и стоимостью применения. Предлагается оценка стоимости применения, адаптированная для моделей сложноструктурированной разметки текстов. Интегральная оценка учитывает полный процесс автоматической разметки и возвращает стоимость разметки 1000 текстов. На 21 наборе данных сопоставлены модели разной архитектуры и размера.

Ключевые слова: структурированная разметка текста; выделение и связывание фрагментов; вложенные фрагменты; оценка стоимости применения; выбор модели; операционные затраты.

1. Постановка задачи

Универсальная модель разметки текста требует сложноструктурированной модели данных, позволяющей обрабатывать разные типы задач в едином представлении [1]: фрагменты с тегами объединяются в элементы, описывающие сущности, отношения и кореферентные группы. Цель

* *Седельникова Ольга Юрьевна* — Лаборант, Институт ИИ МГУ, e-mail: sedelnikovaoy@my.msu.ru, ORCID: 0009-0007-4923-3701.

Sedelnikova Olga Iuryevna — Laboratory Assistant, IAI MSU.

‡ *Кукузей Никита Александрович* — Лаборант, Институт ИИ МГУ, e-mail: kukuzeyna@my.msu.ru, ORCID: 0009-0004-0420-9685.

Kukuzei Nikita Alexandrovich — Laboratory Assistant, IAI MSU.

§ *Цыбанов Илья Антонович* — Стажер-исследователь, Институт ИИ МГУ, e-mail: tsybanovia@my.msu.ru, ORCID: 0009-0000-1845-464X.

Tsybanov Ilya Antonovich — Research Intern, IAI MSU.

¶ *Ринк Ольга Леонидовна* — Научный сотрудник, Институт ИИ МГУ, e-mail: rinkol@my.msu.ru, ORCID: 0000-0001-5977-6741.

Rink Olga Leonidovna — Researcher, IAI MSU.

‖ *Майсурадзе Арчил Ивериевич* — к. ф.-м. н., в. н. с. Института ИИ МГУ, e-mail: maysuradze@cs.msu.ru, ORCID: 0000-0002-1757-556X.

Maysuradze Archil Iverievich — Cand. of Phys. and Math. Sc., Principal Researcher, IAI MSU.

** *Ищенко Роман Валерьевич* — Научный сотрудник, Институт ИИ МГУ, e-mail: rois@cs.msu.ru, ORCID: 0009-0008-9720-8209.

Ischenko Roman Valeryevich — Researcher, IAI MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

работы — предложить оценку стоимости применения (операционных затрат) для моделей сложноструктурированной разметки. Универсальность относится к общей схеме обработки, допускающей настройку под разные корпуса и типы задач. Оценивается структурная разметка, включая вложенные фрагменты; генерация дополнительных текстов не рассматривается.

2. Интегральная оценка стоимости применения

В работах [2, 3] рассматриваются вычислительная эффективность и экономические аспекты применения моделей. Здесь предлагается оценка стоимости полного конвейера структурной разметки на 1000 исходных текстов. Интегральность означает учёт всех этапов конвейера после загрузки и прогрева модели. При постоянной конфигурации и линейной тарификации

$$C_{1000} = \frac{1000pT}{3600N} = \frac{1000p}{3600q}, \qquad q = \frac{N}{T}. \tag{1}$$

Здесь N — число исходных текстов до разбиения на окна; T — фактическое время выполнения конвейера, с; p — тариф конфигурации, USD/ч; q — пропускная способность, текстов/с. Результат измеряется в USD за 1000 текстов. Окна и повторы увеличивают T, но не N; при параллельной обработке учитывается фактическое время работы конфигурации, а не сумма длительностей запросов.

Таймер запускается после загрузки и прогрева. Учитываются предобработка, применение модели, разбор ответов, объединение окон и предусмотренные протоколом исправления; при прямом замере GPU синхронизируются. Тариф включает GPU, CPU и RAM без двойного учёта; фиксируются провайдер, дата, регион и тип аренды. Пиковые RAM процессов и VRAM каждого GPU определяют допустимость конфигурации.

Для воспроизводимости фиксируются оборудование, версии ПО, размер пакета, параллелизм, точность вычислений, длины входов; для LLM — также промпт, параметры генерации и предел повторов. Учитываются ошибки, режим мониторинга памяти, число прогонов, медиана и диапазон стоимости. По нескольким корпусам суммируются затраты и объёмы текстов. Обучение, подготовка инструкции, запуск, простой и экспертная проверка не входят в стоимость обработки.

3. Схема эксперимента

Бенчмарк включает 21 набор данных. Для каждой модели вычисляются оценки стоимости применения и показатели функциональной точности. Интегральное качество $Q = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i C_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$, объединяет полноту сопоставления фрагментов и элементов (C_1, C_4), совпадение границ (C_2) и тегов (C_3, C_5). Веса α_i зависят от типа задачи; оценки усредняются по экспертным вариантам и тестовым данным. Разбиение 8:1:1 (обучение/валидация/тест) зафиксировано; качество оценивается на тесте, few-shot примеры берутся из обучения.

Сравниваются `mamba-1.4b-ru` (модель пространства состояний), `spanbert-base-cased` (кодировщик с предобучением на фрагментах), `mDeBERTa-v3-base` (многоязычный трансформерный кодировщик) и генеративная `Qwen3.5-397B-A17B`. Для первых трёх моделей двухуровневые головы выделяют фрагменты по парам токенов, затем формируют элементы и теги по парам фрагментов. Qwen выдаёт JSON, из которого программа восстанавливает смещения и проверяет ссылки между объектами.

Для mDeBERTa, SpanBERT и Mamba предобученная основа заморожена; для каждого набора данных обучаются только классификационные головы. Представления фрагментов получают максимальным пулингом токенных представлений; расстояние между парными токенами ограничено 64, пороги тегов подбираются на валидации. Qwen3.5-397B-A17B используется в FP8 без градиентной адаптации; промпт включает примеры определений классов из таксономии и примеры разметки из обучающей выборки. Из 397 млрд параметров языковой части 17 млрд активируются на токен, однако для размещения необходима память под все веса и состояние выполнения. Всего сравниваются четыре конфигурации.

4. Результаты и выводы

Получены пары $(Q; C_{1000})$ (стоимость в USD за 1000 текстов): mDeBERTa $(0{,}44; 0{,}113)$, SpanBERT $(0{,}40; 0{,}146)$, Mamba $(0{,}47; 0{,}520)$, Qwen $(0{,}69; 2{,}172)$. По неокруглённым значениям Qwen дороже mDeBERTa, SpanBERT и Mamba соответственно в 19,2, 14,9 и 4,2 раза при приросте Q примерно на 0,25, 0,29 и 0,22. Методика позволяет выбрать конфигурацию с минимальным C_{1000} среди поддерживающих нужные типы разметки и удовлетворяющих порогу качества. При одинаковом охвате задач и порогах $Q_{\min} = 0{,}40$, 0,45 и 0,50 выбираются соответственно mDeBERTa, Mamba и Qwen. Примеры основаны на сводных

оценках бенчмарка; для отдельных задач нужны собственные оценки, а для других условий — повторные измерения.

Список литературы

[1] A. I. Maysuradze et al., “Generalized Text Markup Structures to Organize Knowledge in AI Applications for Humanities and Social Sciences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **47**:6 (2026), 2861–2874. DOI: 10.1134/S1995080226619302.

[2] D. Narayanan et al., “Cheaply estimating inference efficiency metrics for autoregressive transformer models”, *NeurIPS*, **36**, 2023, 66518–66538. DOI: 10.52202/075280-2904.

[3] E. Erdil, “Inference economics of language models”, arXiv: 2506.04645.

Статья поступила 23 октября 2026 г.

Inference Cost Estimation for Selecting a Structural Text Annotation Model

O. I. Sedelnikova, N. A. Kukuzei, I. A. Tsybanov, O. L. Rink, A. I. Maysuradze, R. V. Ischenko

Model selection for practical deployment is governed by the trade-off between functional accuracy and cost of use. A cost-of-use estimation procedure is tailored to models for structurally complex text annotation. The aggregate estimate accounts for the full automatic annotation pipeline and returns the cost of annotating 1,000 texts. Models of differing architecture and size were compared across 21 datasets.

Keywords: structured text annotation; span detection and linking; nested spans; inference costs; model selection; operational costs.

References

[1] A. I. Maysuradze et al., “Generalized Text Markup Structures to Organize Knowledge in AI Applications for Humanities and Social Sciences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **47**:6 (2026), 2861–2874. DOI: 10.1134/S1995080226619302.

[2] D. Narayanan et al., “Cheaply estimating inference efficiency metrics for autoregressive transformer models”, *NeurIPS*, **36**, 2023, 66518–66538. DOI: 10.52202/075280-2904.

[3] E. Erdil, “Inference economics of language models”, arXiv: 2506.04645.

Received on October 23, 2026

Построение интеллектуальной системы дифференциальной диагностики неходжкинских лимфом

М. В. Седых*, Ю. А. Бродская‡

Предложена гибридная система дифференциальной диагностики неходжкинских лимфом, объединяющая статистические и нейросетевые модели с правилами Prolog и нечётким выводом Мамдани. Научная новизна заключается в двухконтурном согласовании, использующем семантические ограничения для фильтрации клинически некорректных гипотез. На тестовой выборке макроусреднённая метрика F_1 составила 0,75.

Ключевые слова: неходжкинские лимфомы, гибридные интеллектуальные системы, нечёткая логика, логическое программирование, машинное обучение, объяснимый ИИ.

1. Введение

Рост заболеваемости лимфомами и дефицит гематологов обусловливают потребность в СППР. Цель работы — разработка гибридной СППР для робастной классификации неходжкинских лимфом при неполных данных. Научная новизна — семантико-вероятностный консилиум на основе Prolog и нечёткого вывода, корректирующий вероятности с учётом клинических ограничений и ИГХ-маркеров при пропусках данных.

* *Седых Матвей Владимирович* — аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, Российская Федерация, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77, e-mail: ghetreek@bk.ru, ORCID: 0009-0008-0440-9715.

Sedykh Matvey Vladimirovich — Postgraduate Student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politekhnicheskaya St., Saratov, 410054, Russian Federation.

‡ *Бродская Юлия Анатольевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент, Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, Российская Федерация, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, 77, e-mail: gekata21@yandex.ru, ORCID: 0009-0004-7377-5488.

Brodskaya Yulia Anatolyevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politekhnicheskaya St., Saratov, 410054, Russian Federation.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Постановка задачи

Состояние пациента задано вектором из $n = 38$ признаков в пространстве $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{n} M_i$, разбитых на три группы: 1) клинико-анамнестические (12 признаков); 2) лабораторно-биохимические (8 непрерывных признаков, нормированных к $M_i = [0, 1]$ методом min-max с порогом неразличимости $\varepsilon_i > 0$); 3) ИГХ и молекулярные маркеры биоптата (18 бинарных признаков $M_i = \{0, 1\}$).

С учётом пропусков ($\perp$) введено пространство $\widetilde{\mathcal{X}} = \prod_{i=1}^{n}(M_i \cup \{\perp\})$. Множество диагнозов $D = \{d_1, \ldots, d_m\}$ ($m = 5$) включает: d_1 — ДВККЛ, d_2 — фолликулярную, d_3 — мантийноклеточную, d_4 — маргинальной зоны, d_5 — периферическую Т-клеточную лимфому. Пусть $\mathfrak{S}_D$ — множество перестановок D, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_{\text{ban}}$ — множества нечётких правил и жёстких запретов в Prolog, а $\mathcal{E} = 2^{\mathcal{R}} \times 2^{\mathcal{R}_{\text{ban}}} \times 2^{\{1,\ldots,n\}}$ — пространство объяснений. Ищется отображение $f\colon \widetilde{\mathcal{X}} \to D \times [0, 1] \times \mathfrak{S}_D \times \mathcal{E}$, возвращающее основной диагноз d^*, уверенность $C(d^* \mid \widetilde{x})$, ранжированный по убыванию уверенности список диагнозов $\pi(\widetilde{x}) \in \mathfrak{S}_D$ и объяснение $e(\widetilde{x}) \in \mathcal{E}$ (множества активированных нечётких правил, сработавших правил-запретов и ключевых признаков).

3. Архитектура и методы гибридной диагностики

Отображение $f(\widetilde{x}) = \Phi(g(\widetilde{x}), \widetilde{x})$ объединяет нечёткую импутацию $g\colon \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ и классификатор Φ. Эталоны классов $v^{(j)} \in \mathcal{X}$ ($j = 1, \ldots, m$) вычисляются исключительно по обучающей выборке $\mathcal{D}_{\text{train}}$ [1, 2]: медианы для непрерывных и моды для дискретных признаков. По наблюдаемым признакам $I_{\text{obs}}(\widetilde{x})$ с учётом весов ω_i вычисляются расстояния $\rho_j(\widetilde{x})$ и степени близости $u_j(\widetilde{x})$ при $\sigma = 0{,}5$, используемые для восстановления пропущенных значений взвешенным средним.

Восстановленный вектор $x = g(\widetilde{x})$ подаётся на четыре базовых классификатора, обученных на $\mathcal{D}_{\text{train}}$: KNN ($k = 1$, $K_{\text{nn}} = 7$), Random Forest ($B = 200$ деревьев), полносвязную нейронную сеть FCNN с архитектурой 38–64–32–5 и наивный байесовский классификатор. Коллективное решение формируется по алгебраическому подходу [5].

Дополнительно используется база знаний на Prolog [4], включающая $|\mathcal{R}| = 45$ нечётких правил Мамдани и $|\mathcal{R}_{\text{ban}}| = 12$ правил-запретов. Оценка $p_5(d_j \mid x)$ определяется на основе нечёткого вывода и дефаззификации методом центра тяжести.

Свёртка объединяет модели с учётом фильтра $\gamma(d_j, \widetilde{x}) \in \{0, 1\}$ (где $\gamma = 0$ при срабатывании жёстких запретов из $\mathcal{R}_{\text{ban}}$):

$$S(d_j \mid \widetilde{x}) = \gamma(d_j, \widetilde{x}) \sum_{k=1}^{K} w_k p_k(d_j \mid x), \quad C(d_j \mid \widetilde{x}) = \frac{S(d_j \mid \widetilde{x})}{\sum_{l=1}^{m} S(d_l \mid \widetilde{x})}. \quad (1)$$

Основной диагноз d^* определяется как наиболее вероятный класс по итоговой оценке уверенности:

$$d^* = \arg\max_{d_j \in D} C(d_j \mid \widetilde{x}), \quad (2)$$

а ранжированный список $\pi(\widetilde{x})$ формируется упорядочиванием элементов множества D по невозрастанию $C(d_j \mid \widetilde{x})$. Веса w_k найдены методом SLSQP ($w_1 = 0{,}12$, $w_2 = 0{,}15$, $w_3 = 0{,}21$, $w_4 = 0{,}14$, $w_5 = 0{,}38$).

4. Экспериментальные результаты

Выборка включала 750 случаев пяти типов лимфом, верифицированных по критериям ВОЗ [1, 3]; исходная доля пропусков — 8,4 %. Разбиение train/val/test — 70/15/15 %. На тесте гибридная модель достигла Accuracy = 74,8 % (превысив лучший базовый метод на 6,1 п.п.) и макро-$F_1 = 0{,}75$. При MCAR-пропусках 10/20/30 % её F_1 составил 0,74/0,73/0,72 против 0,59 у Prolog при 30 % пропусков. Снижение F_1 на 4 % подтверждает устойчивость импутации и семантического фильтра.

5. Заключение

Гибридная СППР сочетает машинное обучение с прозрачностью правил Prolog и нечёткого вывода Мамдани. Двухконтурное согласование сохраняет $F_1 = 0{,}72$ при 30 % пропусков, выдавая врачу обоснованный диагноз, альтернативы и объяснение.

Список литературы

[1] М. В. Седых, “Формирование и валидация обучающих данных в задачах медицинской диагностики”, *Проблемы управления в социально-экономических и технических системах: Материалы XXI Международной научно-практической конференции. В 2-х томах*, Издательский центр «Наука», Саратов, 2025, 165–169.

[2] Ю. А. Бродская, “Повышение надежности распознавания образов при использовании рабочих словарей признаков с минимальными затратами ресурсов и времени”, *Устойчивость и процессы управления: Сб. трудов*, **2**, ред. Д. А. Овсянников, Л. А. Петросян, СПб., 2005, 751–759.

[3] Н. И. Стуклов, Г. И. Козинец, Н. Г. Тюрина, *Учебник по гематологии*, Практическая медицина, М., 2018, 336 с.

[4] М. Дженесерет, В. К. Чаудри, *Введение в логическое программирование*, пер. с англ. С. В. Минц, ДМК Пресс, М., 2022, 192 с.

[5] Ю. И. Журавлёв, В. В. Рязанов, О. В. Сенько, *Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения*, Фазис, М., 2006, 176 с.

Статья поступила 9 октября 2026 г.

Hybrid Intelligent System for Differential Diagnosis of Non-Hodgkin Lymphomas

M. V. Sedykh, Y. A. Brodskaya

A hybrid system for non-Hodgkin lymphoma differential diagnosis is proposed, combining statistical and neural models with Prolog rules and Mamdani fuzzy inference. The novelty lies in a dual-loop consensus mechanism that uses semantic constraints to filter clinically invalid hypotheses. The macro-averaged F_1 score on the test set was 0.75.

Keywords: non-Hodgkin lymphoma, hybrid intelligent systems, fuzzy logic, logic programming, machine learning, explainable AI.

References

[1] M. V. Sedykh, "Formation and validation of training data in medical diagnostic problems", *Control Problems in Socio-Economic and Technical Systems: Proc. of the XXI Int. Scientific and Practical Conf. In 2 vols.*, Publishing Center "Nauka", Saratov, 2025, 165–169 (in Russian).

[2] Yu. A. Brodskaya, "Improving the reliability of pattern recognition when using working feature dictionaries with minimal resource and time costs", *Stability and Control Processes: Proc.*, **2**, eds. D. A. Ovsyannikov, L. A. Petrosyan, St. Petersburg, 2005, 751–759 (in Russian).

[3] N. I. Stuklov, G. I. Kozinets, N. G. Tyurina, *Textbook of Hematology*, Practical Medicine, Moscow, 2018 (in Russian), 336 pp.

[4] M. Genesereth, V. K. Chaudhri, *Introduction to Logic Programming*, translated from English by S. V. Mints, DMK Press, Moscow, 2022 (in Russian), 192 pp.

[5] Yu. I. Zhuravlev, V. V. Ryazanov, O. V. Senko, *Recognition. Mathematical Methods. Software System. Practical Applications*, Phasis, Moscow, 2006 (in Russian), 176 pp.

Received on October 9, 2026

Влияние способа построения матрицы смежности на обобщающую способность графовых нейронных сетей при анализе сигналов носимых датчиков

Л. С. Сидоров*, А. И. Майсурадзе‡

В работе проверяется, как способ задания матрицы смежности влияет на macro-F1 графовой нейронной сети. На UCI HAR по 20 парным запускам граф по метаданным каналов сравнивается с дополнением той же степени, с графом без рёбер и с гибридным дообучением. Средняя разность с дополнением составляет 1,5–1,9 п. п. и после поправки Холма значима при всех долях обучающей выборки. Разность с графом без рёбер значима при 5 и 10%. Гибридное дообучение значимо хуже фиксированной матрицы при 10 и 100%. Разброс этой разности внутри одной подвыборки больше, чем между подвыборками. На отрезке начальных графов при полной выборке провала нет.

Ключевые слова: графовые нейронные сети, матрица смежности, многомерные временные ряды, обобщающая способность, распознавание активности.

1. Постановка задачи

Рассматриваются многомерные временные ряды, у каналов которых известны метаданные связи. Наблюдение — матрица $X \in \mathbb{R}^{N\times T}$, каналы — вершины графа. Слой типа GIN [1] вычисляет $Z = \mathrm{ReLU}((X + AX)W)$, где W — общая для вершин свёртка по времени; затем свёртка 1×1 по

* *Сидоров Леонид Станиславович* — аспирант каф. математических методов прогнозирования ф-та ВМК МГУ, e-mail: leon.sidorov@gmail.com, ORCID: 0009-0000-6060-252X.

Sidorov Leonid Stanislavovich — PhD student, Department of Mathematical Methods of Forecasting, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Майсурадзе Арчил Ивериевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математических методов прогнозирования ф-та ВМК МГУ, e-mail: maysuradze@cs.msu.ru, ORCID: 0000-0002-1757-556X.

Maysuradze Archil Iverievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Methods of Forecasting, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

каналам, две временные свёртки и линейный классификатор. Строки априорной матрицы A_0 нормируются до обучения.

Для девяти каналов смартфона (три датчика на три оси) граф метаданных A_{meta} соединяет каналы с общим датчиком или общей осью: степень каждой вершины равна 4. Контроль A_{anti} — дополнение той же степени: ребро проводится, только если различаются и датчик, и ось. Сравниваются три режима. Фиксированный: $A = A_0$ не меняется. Гибридный: A — свободная матрица $N \times N$, инициализированная A_0 и обновляемая тем же шагом Adam, что и веса сети; симметрия, неотрицательность и нормировка строк при обучении не сохраняются. Обучение с нуля отличается лишь инициализацией Ксавье. Начальное приближение на отрезке между ними — $A(\theta) = (1-\theta)A_{\text{meta}} + \theta A_{\text{anti}}$; при $\theta = 1/2$ получается нормированный полный граф.

На электроэнцефалограмме граф по координатам электродов давал более высокое качество, чем более плотный случайный граф [3], а гибридный способ — чем фиксированная матрица [2]. Плотность там не уравнивалась. Здесь при равной степени вершин проверяются три утверждения о средней macro-F1: она выше у графа метаданных, чем у дополнения и у графа без рёбер; гибридный способ не хуже фиксированной матрицы; зависимость от θ имеет провал при $\theta = 1/2$.

2. Данные и протокол

Набор UCI HAR [4]: окна по 128 отсчётов с перекрытием 50%, девять каналов, шесть активностей. Четыре из 21 обучающего участника отложены для выбора модели, тест — 9 остальных. При доле $f < 1$ seed запуска берёт внутри каждого класса долю f окон без возвращения, без стратификации по участникам, и тем же генератором перемешивает батчи. Подвыборка и порядок батчей общие для вариантов одного запуска. Основные сравнения — 20 таких запусков. Дополнительно при 5 и 10% взяты 4 подвыборки и на каждой 5 seed обучения. Долям 5, 10, 25 и 100% отвечают 600, 300, 120 и 30 эпох (Adam, шаг 10^{-3}, батч 128). Разности сравниваются парным t-критерием; значимость — поправка Холма по трём строкам табл. 1. Отрезок $\theta = 0; 0{,}1; \ldots; 1$ пройден при 100% окон, оба режима, по 5 запусков.

3. Результаты

По табл. 1 разность с дополнением значима при всех долях, с графом без рёбер — при 5 и 10%, гибрид хуже фиксированной матрицы при 10 и 100%.

Таблица 1: Разность macro-F1, п. п.: среднее и 95% интервал парного t-критерия, $n = 20$. $*$ — значимо после Холма, $m = 3$.

сравнение	5%	10%	25%	100%
метаданные / дополнение	$+1{,}5\,[0{,}5;\,2{,}4]^*$	$+1{,}5\,[0{,}7;\,2{,}4]^*$	$+1{,}9\,[1{,}1;\,2{,}7]^*$	$+1{,}5\,[0{,}8;\,2{,}2]^*$
метаданные / без рёбер	$+1{,}6\,[0{,}6;\,2{,}6]^*$	$+1{,}1\,[0{,}3;\,2{,}0]^*$	$+0{,}7\,[-0{,}1;\,1{,}5]$	$+0{,}3\,[-0{,}6;\,1{,}3]$
гибридный / фиксир.	$-0{,}3\,[-1{,}0;\,0{,}4]$	$-0{,}7\,[-1{,}2;\,-0{,}2]^*$	$-0{,}3\,[-0{,}7;\,0{,}1]$	$-0{,}6\,[-1{,}0;\,-0{,}2]^*$

При 5 и 10% на 4 подвыборках по 5 seed стандартное отклонение разности «метаданные минус дополнение» внутри подвыборки равно 0,015 и 0,017, а между средними подвыборок — 0,005 и 0,008. Отрезок по θ строился только при 100% окон: macro-F1 лежит в 0,886–0,905, провала при $\theta = 1/2$ нет.

4. Заключение

На UCI HAR граф метаданных лучше своего дополнения той же степени при всех долях обучающей выборки; это не сводится к степени вершин и не объясняется выбором конкретной подвыборки окон. Выигрыш перед графом без рёбер есть при 5 и 10%. Гибридное дообучение не лучше фиксированной матрицы. На полной выборке провала вдоль отрезка начальных графов нет. На другие графы и на электроэнцефалограмму результат не переносится.

Список литературы

[1] K. Xu, W. Hu, J. Leskovec, S. Jegelka, “How powerful are graph neural networks?”, *International Conference on Learning Representations*, 2019, arXiv: 1810.00826.

[2] L. Sidorov, A. Maysuradze, “The influence of graph construction methods on the generalization ability of graph neural networks in neurophysiological EEG analysis”, *Intellectualization of information processing (IOI-2024)* (Grodno, September 23–27, 2024), 2024, 46–47.

[3] L. S. Sidorov, A. I. Maysuradze, “The impact of enriching electroencephalogram in spatial metadata on interpretability and generalization ability of graph neural networks”, *Pattern Recognition and Image Analysis*, **34**:4 (2024), 1255–1263. DOI: 10.1134/S1054661824701323.

[4] D. Anguita, A. Ghio, L. Oneto, X. Parra, J. L. Reyes-Ortiz, “A public domain dataset for human activity recognition using smartphones”, *Proceedings of the 21st European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN 2013)*, 2013, 437–442.

Статья поступила 13 октября 2026 г.

The influence of adjacency matrix construction on the generalization ability of graph neural networks in wearable sensor signal analysis

L. S. Sidorov, A. I. Maysuradze

The paper tests how the choice of the adjacency matrix affects the macro-F1 of a graph neural network. On UCI HAR, over 20 paired runs, a channel-metadata graph is compared with its equal-degree complement, a graph without edges, and hybrid fine-tuning. The mean difference from the complement is 1.5–1.9 percentage points and is significant after the Holm correction at every training fraction. The difference from the graph without edges is significant at 5 and 10%. Hybrid fine-tuning is significantly worse than the fixed matrix at 10 and 100%. The spread of the difference within one subsample exceeds the spread between subsamples. A sweep of initial graphs on the full training set shows no dip.

Keywords: graph neural networks, adjacency matrix, multivariate time series, generalization ability, activity recognition.

References

[1] K. Xu, W. Hu, J. Leskovec, S. Jegelka, "How powerful are graph neural networks?", *International Conference on Learning Representations*, 2019, arXiv: 1810.00826.

[2] L. Sidorov, A. Maysuradze, "The influence of graph construction methods on the generalization ability of graph neural networks in neurophysiological EEG analysis", *Intellectualization of information processing (IOI-2024)* (Grodno, September 23–27, 2024), 2024, 46–47.

[3] L. S. Sidorov, A. I. Maysuradze, "The impact of enriching electroencephalogram in spatial metadata on interpretability and generalization ability of graph neural networks", *Pattern Recognition and Image Analysis*, **34**:4 (2024), 1255–1263. DOI: 10.1134/S1054661824701323.

[4] D. Anguita, A. Ghio, L. Oneto, X. Parra, J. L. Reyes-Ortiz, "A public domain dataset for human activity recognition using smartphones", *Proceedings of the 21st European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN 2013)*, 2013, 437–442.

Received on October 13, 2026

Эффективный аудит текстовых разметок на основе индивидуальных оценок сложности

А. М. Табаченков*, А. И. Майсурадзе‡

Аудит текстовой разметки, включающий обнаружение и исправление ошибочных границ и меток фрагментов, играет ключевую роль в социально-гуманитарных исследованиях, однако его автоматизация требует существенных затрат. Для снижения затрат предлагается метод на основе оценок сложности с эффективной векторизацией и однократным кодированием документов. Сравнение с LLM на трех источниках исправлений показывает сопоставимое качество в ряде задач аудита при значительно меньшем времени работы.

Ключевые слова: аудит разметки; текстовые фрагменты; оценки сложности; коррекция разметки; LLM-проверка.

1. Мотивация и цель исследования

Надежность данных и моделей зависит от качества разметки. Однако неоднозначность и редкие метки [2] затрудняют разметку, а аудит [1] и его автоматизация затратны. Так, большие языковые модели (LLM) [4] требуют генерации ответов, итеративное самообучение [3] — повторного обучения. Диффузионный метод [5] уточняет предсказания NER, а не человеческую разметку. Поэтому наша цель — разработать легковесный System 1-подход, сопоставимый с LLM по качеству.

2. Постановка задачи и типы ошибок

Разметка — набор символьных фрагментов $[b, e)$ с метками Y. Детекция выявляет ошибки [1]; коррекция исправляет либо удаляет фрагменты.

* *Табаченков Андрей Михайлович* — Лаборант, Институт ИИ МГУ, e-mail: tabachenkovam@my.msu.ru, ORCID: 0009-0005-4980-1065.

Tabachenkov Andrey Mikhailovich — Laboratory Assistant, IAI MSU.

‡ *Майсурадзе Арчил Ивериевич* — к. ф.-м. н., в. н. с. Института ИИ МГУ, e-mail: maysuradze@cs.msu.ru, ORCID: 0000-0002-1757-556X.

Maysuradze Archil Iverievich — Cand. of Phys. and Math. Sc., Principal Researcher, IAI MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

3. Предлагаемый метод

Мы предлагаем использовать схему [6]: кодировщик обучается классификации фрагментов по исходной разметке без эталонных исправлений. Документ кодируется однократно; вектор фрагмента объединяет представления граничных токенов, среднее и максимум. Согласно [6], уверенность, отступ, расстояние Махаланобиса и дисперсия градиентов (VoG) отражают сложность фрагментов. Для детекции пороги оценок и их процентильных комбинаций максимизируют TPR−FPR на синтетических искажениях обучающей выборки. При коррекции выбираются метка, затем локальные границы. Отрицательная O означает удаление фрагмента, а в многометочном случае — проверяемой метки. В многометочном случае каждая пара фрагмент — метка проверяется отдельно. Замена принимается по порогу совместной оценки подозрительности и уверенности с учетом процентильного выигрыша кандидата.

Затраты имеют вид $T_d \approx T_{\text{enc}}(d) + K_d T_{\text{score}}$, где K_d — число кандидатов, T_{enc} — время кодирования, T_{score} — векторизации, классификации и оценки кандидата. VoG требует пяти кодирований и градиентов по векторам фрагментов; переобучение не требуется.

4. Схема экспериментов

Существующие бенчмарки [1] сосредоточены преимущественно на детекции. Рассматриваются три источника исправлений: синтетические искажения, реальные исправления и консенсус разметчиков. Из 5934 фрагментов проверочной части английского CoNLL-2003 половина сохраняется, остальные равновероятно получают сдвиг границ до двух символов, другую положительную метку либо оба искажения; для удаления добавляются 297 ложных фрагментов. В CleanCoNLL [7] венгерский алгоритм сопоставляет исходные и исправленные фрагменты по пересечению; изолированная правка границ сохраняет метку, несопоставленные исходные фрагменты считаются удаленными. В Human Values [2] аналогично сопоставляются фрагменты остальных экспертов по метке: эталон задается строгим большинством, границы — медоидом; неподдержанные фрагменты удаляются, недостающие метки добавляются. Разбиение CoNLL соответствует [7], Human Values — как при обучении кодировщика. Эталонные исправления на контрольной выборке служат лишь для оценки качества детекции и коррекции.

Мы сравниваем DeBERTa [6] и Qwen3.5-4B/9B (условный System 2). Вход LLM [4] — задача, метки и фрагмент с контекстом; выход — ошибки

и исправления в JSON. Генерация Qwen жадная, без рассуждений. Эксперименты проведены на NVIDIA Tesla T4 с 16 ГБ видеопамяти. Детекция оценивается по ROC-AUC, AP, precision, recall и F1 [1]; коррекция — по совпадению границ и метки, IoU и отклонению границ.

5. Итоги

На 6231 синтетическом примере CoNLL кодирование и оценка кандидатов DeBERTa занимают около 35 с, отдельно VoG — 82 с, генерация Qwen-4B/9B — 1 ч 9 мин / 3 ч 13 мин (без обучения, настройки и загрузки моделей). При этом на ошибках границ CleanCoNLL усреднение процентилей пяти оценок сложности дает 64,6% точных исправлений против 35,4% у Qwen-9B; на синтетических ошибках меток — 97,1% для DeBERTa и 84,4% для Qwen-9B; на Human Values VoG обнаруживает ошибки границ с ROC-AUC 0,694. Однако на реальных ошибках меток CleanCoNLL Qwen-9B дает 54,8% против 8,8% у DeBERTa. Приведенные результаты коррекции получены при известном действии и не характеризуют качество полного автоматического аудита. Таким образом, System 1 позволяет снизить затраты на аудит без потери качества в ряде задач, однако преимущество того или иного подхода зависит от типа ошибки.

Список литературы

[1] J.-C. Klie, B. Webber, I. Gurevych, “Annotation Error Detection: Analyzing the Past and Present for a More Coherent Future”, *Computational Linguistics*, **49**:1 (2023), 157–198. DOI: 10.1162/coli_a_00464.

[2] O. Rink et al., “Automated Detection of Human Values in Texts: ML Challenges and Performance Benchmarks”, *Social Computing and Social Media*, 2025, 304–321. DOI: 10.1007/978-3-031-93536-7_22.

[3] T. Ehsan, T. Solorio, “A Scalable Framework for Automated NER Annotation Correction in Low-Resource Languages”, *Findings of EACL*, 2026, 4138–4151. DOI: 10.18653/v1/2026.findings-eacl.215.

[4] H. Kim et al., “MEGAnno+: A Human-LLM Collaborative Annotation System”, *EACL: System Demonstrations*, 2024, 168–176. DOI: 10.18653/v1/2024.eacl-demo.18.

[5] L. H. Trieu, H. M. Phi, M. Miwa, “Reviving Iterative Refinement in Diffusion-based NER with an Initializer-Restorer Approach”, *ACL*, 2026, 877–882. DOI: 10.18653/v1/2026.acl-short.72.

[6] A. I. Maysuradze, A. M. Tabachenkov, “Adaptation and Interpretation of Various Instance Hardness Assessments for Text Spans”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **47**:6 (2026), 2845–2860. DOI: 10.1134/S1995080226618540.

[7] S. Rücker, A. Akbik, “CleanCoNLL: A Nearly Noise-Free Named Entity Recognition Dataset”, *EMNLP*, 2023, 8628–8645. DOI: 10.18653/v1/2023.emnlp-main.533 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Efficient Audit of Text Annotations Using Instance Hardness Assessments

A. M. Tabachenkov, A. I. Maysuradze

Detecting and correcting span boundary and label errors is essential in social sciences and humanities but costly to automate. To reduce costs, we propose a method using instance hardness assessments, efficient vectorization, and one-time document encoding. Comparison with LLMs on three correction sources shows comparable quality on several auditing tasks with substantially shorter runtimes.

Keywords: annotation auditing; text spans; instance hardness; annotation correction; LLM-as-a-judge.

References

[1] J.-C. Klie, B. Webber, I. Gurevych, "Annotation Error Detection: Analyzing the Past and Present for a More Coherent Future", *Computational Linguistics*, **49**:1 (2023), 157–198. DOI: 10.1162/coli_a_00464.

[2] O. Rink et al., "Automated Detection of Human Values in Texts: ML Challenges and Performance Benchmarks", *Social Computing and Social Media*, 2025, 304–321. DOI: 10.1007/978-3-031-93536-7_22.

[3] T. Ehsan, T. Solorio, "A Scalable Framework for Automated NER Annotation Correction in Low-Resource Languages", *Findings of EACL*, 2026, 4138–4151. DOI: 10.18653/v1/2026.findings-eacl.215.

[4] H. Kim et al., "MEGAnno+: A Human-LLM Collaborative Annotation System", *EACL: System Demonstrations*, 2024, 168–176. DOI: 10.18653/v1/2024.eacl-demo.18.

[5] L. H. Trieu, H. M. Phi, M. Miwa, "Reviving Iterative Refinement in Diffusion-based NER with an Initializer-Restorer Approach", *ACL*, 2026, 877–882. DOI: 10.18653/v1/2026.acl-short.72.

[6] A. I. Maysuradze, A. M. Tabachenkov, "Adaptation and Interpretation of Various Instance Hardness Assessments for Text Spans", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **47**:6 (2026), 2845–2860. DOI: 10.1134/S1995080226618540.

[7] S. Rücker, A. Akbik, "CleanCoNLL: A Nearly Noise-Free Named Entity Recognition Dataset", *EMNLP*, 2023, 8628–8645. DOI: 10.18653/v1/2023.emnlp-main.533.

Received on October 24, 2026

Контрастивная адаптация поисковых представлений с ограничением опорной геометрии

И. В. Тарлинский*, С. Т. Главацкий‡

В методе AnchorBank контрастивная адаптация корректируется реляционным критерием по замороженным реперам. Описаны контролируемое подпространство и локальные свойства проекции; приведено сравнение с InfoNCE на четырёх коллекциях.

Ключевые слова: информационный поиск, контрастивное обучение, KL-дивергенция, проекция градиента.

1. Введение

Плотный поиск ранжирует документы по релевантности запросу на основе сходства их векторных представлений. Двуэнкодерная модель DPR [1] обучается по парам запрос–документ. Однако качество на обучающем домене не определяет качество переноса: BEIR [2] выявил ограничения обобщения плотных поисковых моделей на другие задачи и коллекции.

Донастройка на целевой коллекции меняет взаимное расположение векторов и может нарушать семантические отношения исходной модели, влияя на ранжирование вне целевого домена. Рассматривается задача адаптации с ограничением изменения исходной геометрии представлений.

Сохранение отношений между объектами используется в реляционной дистилляции [3]; проекция градиента для ограничения забывания применяется в A-GEM [4]. В предлагаемом методе AnchorBank эти идеи связывает банк замороженных реперов: отношения сходства с ними задают критерий коррекции градиента. Описываются контролируемое подпространство и локальные свойства шага; адаптация проверяется на четырёх коллекциях.

* *Тарлинский Игорь Викторович* — аспирант каф. теоретической информатики мех.-мат. факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `itarlinskiy@gmail.com`.

Tarlinsky Igor Viktorovich — PhD student, Department of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Главацкий Сергей Тимофеевич* — доцент каф. теоретической информатики мех.-мат. факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: `sergey.glavatsky@math.msu.ru`.

Glavatsky Sergei Timofeevich — Associate Professor, Department of Theoretical Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Метод и локальные свойства

Для B пар запрос–документ положим $q_i = f_\theta^q(x_i)$, $p_i = f_\theta^p(y_i) \in \mathbb{R}^d$; векторы нормированы. В матрице $S_{ij} = \langle q_i, p_j \rangle$ размера $B \times B$ диагональ отвечает правильным документам. Критерий InfoNCE [5]:

$$R(\theta) = -\frac{1}{B} \sum_{i=1}^{B} \log \frac{\exp(S_{ii}/\tau_r)}{\sum_{j=1}^{B} \exp(S_{ij}/\tau_r)}, \quad \tau_r > 0. \tag{1}$$

Банк ёмкости M хранит $m \le M$ пар (a_ℓ^q, a_ℓ^p) прошлых микробатчей, вычисленных замороженным энкодером θ_r. Индекс i относится к микробатчу, ℓ — к банку; q_i^r, p_i^r — представления текущих входов при θ_r. Знаменатель (1) не расширяется.

Пусть $\mathcal{A}_i$ — индексы реперов без совпадений по идентификаторам запроса, документа или содержимого. При $\tau_a > 0$ положим $F_i^p(v) = \mathrm{softmax}((\langle v, a_\ell^p \rangle/\tau_a)_{\ell \in \mathcal{A}_i})$; F_i^q определяется по a_ℓ^q аналогично. Для $\mathcal{I} = \{i : \mathcal{A}_i \neq \varnothing\}$ зададим

$$C = \frac{1}{2|\mathcal{I}|} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left[\mathrm{KL}\big(F_i^p(q_i^r) \| F_i^p(q_i)\big) + \mathrm{KL}\big(F_i^q(p_i^r) \| F_i^q(p_i)\big) \right]. \tag{2}$$

При пустом $\mathcal{I}$ коррекция пропускается. В C обе модели работают без dropout, с градиентом по θ. Затем в банк добавляются (q_i^r, p_i^r) и сохраняются последние M пар (FIFO).

Утверждение 1. *Пусть* $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^d$, $m \ge 1$, $\tau > 0$ *и* $F(v) = \mathrm{softmax}((\langle v, a_\ell \rangle/\tau)_{\ell=1}^m)$. *Тогда*

$$\mathrm{KL}(F(w) \| F(v)) = 0 \iff v - w \in V^\perp, \quad V = \mathrm{span}\{a_\ell - a_1 : \ell = 2, \dots, m\}.$$

Следовательно, $\dim V \le \min(d, m-1)$; при $m = 1$ критерий нулевой. Ёмкость ограничивает число контролируемых направлений; полный ранг зависит от разнообразия реперов.

Зафиксируем микробатч, банк, маску и реализацию случайности. Пусть $g = \nabla R$, $c = \nabla C$. Выбирается $u = \arg\min_{c^\top u \ge 0} \frac{1}{2}\|u - g\|^2$.

Теорема 1. *Единственное решение имеет вид*

$$u = \begin{cases} g, & c^\top g \ge 0 \text{ или } c = 0, \\ g - \dfrac{c^\top g}{\|c\|^2} c, & c^\top g < 0. \end{cases} \tag{3}$$

При этом $c^\top u \ge 0$, $g^\top u = \|u\|^2$ *и* $\|u\| \le \|g\|$.

Обоснование. Утверждение следует из $\log(F(v)_\ell/F(v)_1) = \langle v, a_\ell - a_1\rangle/\tau$. Формула (3) — проекция на полупространство; тождества следуют из $u \perp (g-u)$.

Лемма о спуске при L_R, L_C-липшицевости градиентов в окрестности отрезка $[\theta, \theta-\eta u]$ даёт $R(\theta-\eta u) \le R(\theta) - \eta(1 - L_R\eta/2)\|u\|^2$ и $C(\theta-\eta u) \le C(\theta) + L_C\eta^2\|u\|^2/2$. Рост C второго порядка возможен и при $c = 0$. Нужны точный шаг $-\eta u$ и фиксированная опора; для AdamW, накопления и FIFO эти оценки не гарантируются и не характеризуют качество поиска.

Экспериментальные результаты. InfoNCE и AnchorBank ($M = 1024$) обучались на Qwen3-Embedding-0.6B отдельно для Habr, Universe, FiQA, Legal. Одна эпоха охватывает все положительные связи `train` (одна пара на связь); в FiQA исключены 35 пар с пустым документом. Инициализация и порядок пар у двух методов совпадали.

rsLoRA: все линейные проекции внимания и MLP всех блоков; ранг $r = 16$, $\alpha = 32$, масштаб $\alpha/\sqrt{r} = 8$, dropout 0,05. В микробатче до 8 пар. В AnchorBank g, c делятся на 4 перед проекцией (3). Направления суммируются до шага AdamW ($2 \cdot 10^{-5}$) после четырёх микробатчей либо в конце эпохи. Температура τ_r обучаемая, начальное значение 0,05; $\tau_a = 0{,}05$ фиксирована. Коррекция — после пяти шагов оптимизатора.

Поиск — точный косинусный по полному корпусу; оценён последний чекпойнт без выбора по тестовой метрике. Для Habr, Universe, FiQA использован `test`; для Legal — `development_test`, использованный при разработке; есть смысловые пересечения разбиений, независимость теста не заявляется. Значения nDCG@10 (InfoNCE → AnchorBank, рис. 1): Habr 0,8424 → 0,8598; Universe 0,7081 → 0,7178; FiQA 0,4667 → 0,4789; Legal 0,6029 → 0,6170.

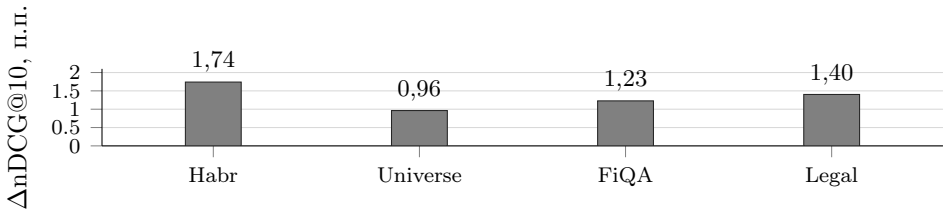


Рис. 1: Прирост AnchorBank относительно InfoNCE, $M = 1024$.

Результаты предварительные: разброс и статистическая значимость не оценивались; перенос вне обучающего домена не исследовался.

Список литературы

[1] V. Karpukhin, B. Oguz, S. Min, P. Lewis, L. Wu, S. Edunov, D. Chen, W.-t. Yih, "Dense Passage Retrieval for Open-Domain Question Answering", *Proceedings of EMNLP*, 2020, 6769–6781. DOI: 10.18653/v1/2020.emnlp-main.550.

[2] N. Thakur, N. Reimers, A. Rücklé, A. Srivastava, I. Gurevych, "BEIR: A Heterogenous Benchmark for Zero-shot Evaluation of Information Retrieval Models", *NeurIPS Datasets and Benchmarks*, 2021, arXiv: 2104.08663.

[3] W. Park, D. Kim, Y. Lu, M. Cho, "Relational Knowledge Distillation", *Proceedings of IEEE/CVF CVPR*, 2019. DOI: 10.1109/CVPR.2019.00409.

[4] A. Chaudhry, M. Ranzato, M. Rohrbach, M. Elhoseiny, "Efficient Lifelong Learning with A-GEM", *Proceedings of ICLR*, 2019, arXiv: 1812.00420.

[5] A. van den Oord, Y. Li, O. Vinyals, "Representation Learning with Contrastive Predictive Coding", arXiv: 1807.03748 .

Статья поступила 25 октября 2026 г.

Contrastive adaptation of retrieval representations with an anchor geometry constraint

I. V. Tarlinsky, S. T. Glavatsky

AnchorBank corrects contrastive adaptation using relations to frozen anchors. We describe its controlled subspace and local projection properties and compare it with InfoNCE on four collections.

Keywords: information retrieval, contrastive learning, KL divergence, gradient projection.

References

[1] V. Karpukhin, B. Oguz, S. Min, P. Lewis, L. Wu, S. Edunov, D. Chen, W.-t. Yih, "Dense Passage Retrieval for Open-Domain Question Answering", *Proceedings of EMNLP*, 2020, 6769–6781. DOI: 10.18653/v1/2020.emnlp-main.550.

[2] N. Thakur, N. Reimers, A. Rücklé, A. Srivastava, I. Gurevych, "BEIR: A Heterogenous Benchmark for Zero-shot Evaluation of Information Retrieval Models", *NeurIPS Datasets and Benchmarks*, 2021, arXiv: 2104.08663.

[3] W. Park, D. Kim, Y. Lu, M. Cho, "Relational Knowledge Distillation", *Proceedings of IEEE/CVF CVPR*, 2019. DOI: 10.1109/CVPR.2019.00409.

[4] A. Chaudhry, M. Ranzato, M. Rohrbach, M. Elhoseiny, "Efficient Lifelong Learning with A-GEM", *Proceedings of ICLR*, 2019, arXiv: 1812.00420.

[5] A. van den Oord, Y. Li, O. Vinyals, "Representation Learning with Contrastive Predictive Coding", arXiv: 1807.03748.

Received on October 25, 2026

Обратный синтез нечётких операторов агрегации в однородных моделях оценки риска

Ф. А. Федотов*, А. П. Рыжов‡

Рассматривается обратная задача выбора нечёткого конъюнктивного агрегатора в однородной древовидной модели оценки риска. Требуется, чтобы агрегатор был устойчив к фоновым изменениям и достаточно чувствительно реагировал на локальный инцидент. В классе строгих архимедовых t-норм показано, что корневое значение однородного дерева и его локальные чувствительности выражаются через аддитивный генератор и его профиль. На этой основе формулируется оптимизационная задача выбора агрегатора; в степенном классе профилей она сводится к одномерной оптимизации.

Ключевые слова: нечёткая агрегация, t-норма, аддитивный генератор, однородная модель, оценка риска, обратная задача, чувствительность.

Рассматривается модель оценки риска в виде дерева с $n \geq 2$ листьями, в которых заданы нормированные оценки состояния $x_1, \ldots, x_n \in (0, 1]$. Большие значения соответствуют более благоприятному состоянию, а значение в корне дерева определяет итоговую оценку системы. Такие модели естественно возникают в задачах оценки риска и информационной безопасности [1]. Если итоговая оценка должна учитывать одновременное выполнение нескольких требований, агрегация имеет конъюнктивный характер; поэтому используются t-нормы и общая теория функций агрегации [2, 3]. Цель работы состоит в обратном выборе агрегатора по требованиям к его реакции на локальный инцидент и к устойчивости относительно фоновых изменений.

* *Федотов Фёдор Алексеевич* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: fedor.a.fedotov@math.msu.ru, ORCID: 0009-0001-7307-9122.

Fedotov Fedor Alekseevich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Рыжов Александр Павлович* — д.т.н., профессор каф. интеллектуальных информационных технологий ф-та ВМК МГУ, e-mail: ryjov@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7022-5166.

Ryjov Alexander Pavlovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Intelligent Information Technologies, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

В качестве базового класса берутся строгие архимедовы t-нормы с аддитивным генератором [2, 4]:

$$T(x,y) = g^{-1}\big(g(x) + g(y)\big),$$

где $g : (0,1] \to [0,+\infty)$, $g(1) = 0$, g строго убывает и $g(x) \to +\infty$ при $x \to 0+$. Показано, что при использовании одного и того же локального оператора во всех внутренних вершинах дерева корневое значение имеет вид

$$R(x_1,\dots,x_n) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right).$$

В силу ассоциативности T это значение не зависит от формы дерева.

Пусть g непрерывно дифференцируема и $h(x) = -g'(x) > 0$ — профиль генератора. Тогда локальная чувствительность корня по отдельному листу выражается формулой

$$\frac{\partial R}{\partial x_k} = \frac{h(x_k)}{h(R)}.$$

Дополнительно вводится условие невозрастания h, обеспечивающее глобальную 1-липшицевость агрегатора относительно нормы ℓ_1 [5].

Требования к агрегатору формализуются в инцидентно-фоновом сценарии $(t,a,\dots,a)$: здесь t — значение инцидентного листа, а a — общий фоновый уровень. Пара (t,a) берётся из области

$$\Omega_+ = \{(t,a) : a \in [a_-,a_+],\ t \in [t_{\min},\eta a]\}, \quad 0 < \eta < 1,$$

где $0 < a_- \le a_+ \le 1$ и $0 < t_{\min} \le \eta a_-$. В фоновом состоянии $R_n(a) = g^{-1}(ng(a))$, а при одном инцидентном листе

$$R_n(t,a) = g^{-1}\big(g(t) + (n-1)g(a)\big).$$

Вводится несколько важных характеристик:

$$I_n(t,a) = \frac{h(t)}{h(R_n(t,a))}, \qquad B_n(t,a) = (n-1)\frac{h(a)}{h(R_n(t,a))},$$

$$\Gamma_n(t,a) = \frac{I_n(t,a)}{B_n(t,a)} = \frac{1}{n-1}\frac{h(t)}{h(a)} \quad \text{— селективность,}$$

$$D_n(t;a) = R_n(a) - R_n(t,a) \quad \text{— детекция.}$$

Регуляризатор

$$J_{\mathrm{reg}}(T) = \sup_{(t,a)\in\Omega_+} \ln\frac{h(t)}{h(a)}$$

ограничивает чрезмерную резкость профиля, а целевым функционалом служит максимальная фоновая шумовая чувствительность $J_{\text{noise}}(T) = \sup_{(t,a)\in\Omega_+} B_n(t,a)$. Положим $\Gamma_\Omega^{\min}(T) = \inf_{(t,a)\in\Omega_+} \Gamma_n(t,a)$ и $D_\Omega^{\min}(T) = \inf_{(t,a)\in\Omega_+} D_n(t;a)$. При заданных порогах $\Gamma^* > 0$, $D^* > 0$, $M \geq 0$ ставится обратная задача:

$$\min_T J_{\text{noise}}(T), \qquad \Gamma_\Omega^{\min}(T) \geq \Gamma^*, \quad D_\Omega^{\min}(T) \geq D^*, \quad J_{\text{reg}}(T) \leq M.$$

Для выделения явного подкласса агрегаторов вводится дополнительное требование относительной инвариантности селективности: $\Gamma_n(t,a) = \Phi(t/a)$ при всех $0 < t < a \leq 1$ для некоторой функции Φ. Показано, что это условие приводит к степенному виду профиля

$$h_\alpha(x) = Cx^{-\alpha}, \qquad \alpha \geq 1.$$

Соответствующие операторы принадлежат семейству t-норм Швейцера–Склара [2].

В степенном классе условия на селективность и регулярность дают явные границы параметра α, определяющие базовый интервал $I_0 = [\alpha_L, \alpha_M]$ при условии его непустоты. Остальные характеристики также выражаются через α, однако соответствующие ограничения и целевой функционал имеют более сложный вид. Поэтому окончательная задача решается численно:

$$\min_{\alpha\in A_{\text{pow}}} J_{\text{noise}}(T_\alpha), \qquad A_{\text{pow}} = \{\alpha \in I_0 : D_\Omega^{\min}(T_\alpha) \geq D^*\}.$$

Для иллюстрации при $n = 5$, $\eta = 0.97$, $t_{\min} = 0.2$, $a_- = 0.4$, $a_+ = 0.64$, $\Gamma^* = 0.27$, $D^* = 0.0015$, $M = 10$ численно получены $I_0 \approx [2.5267, 8.5973]$, $A_{\text{pow}} \approx [3.5995, 8.5973]$, $\alpha_{\text{opt}} \approx 5.0280$ и $J_{\text{noise}}(T_{\alpha_{\text{opt}}}) \approx 0.6174$. В данном сценарии ограничение на детекцию уточняет нижнюю границу допустимого множества. В общем случае характер активных ограничений и положение оптимума зависят от параметров задачи.

Полученная схема задаёт процедуру выбора конъюнктивного агрегатора с учётом реакции на инцидент и фоновые изменения. Намечены её расширения на многопараметрические профили, неоднородные и взвешенные схемы агрегации.

Список литературы

[1] Joint Task Force Transformation Initiative, *Guide for Conducting Risk Assessments. NIST Special Publication 800-30, Revision 1*, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 2012. DOI: 10.6028/NIST.SP.800-30r1.

[2] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9540-7.

[3] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. DOI: 10.1017/CBO9781139644150.

[4] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, "Generated triangular norms", *Kybernetika*, **36**:3 (2000), 363–377.

[5] A. Kolesárová, "1-Lipschitz aggregation operators and quasi-copulas", *Kybernetika*, **39**:5 (2003), 615–629 .

Статья поступила 6 октября 2026 г.

Inverse Synthesis of Fuzzy Aggregation Operators in Homogeneous Risk Assessment Models

F. A. Fedotov, A. P. Ryjov

We consider an inverse problem of choosing a fuzzy conjunctive aggregation operator in a homogeneous tree-based risk assessment model. The aggregator is required to be stable with respect to background changes and sufficiently sensitive to a local incident. In the class of strict Archimedean t-norms, the root value of a homogeneous tree and its local sensitivities are expressed through an additive generator and its profile. This leads to an optimization problem for choosing the aggregator; in the power class of profiles, the problem is reduced to one-dimensional optimization.

Keywords: fuzzy aggregation, t-norm, additive generator, homogeneous model, risk assessment, inverse problem, sensitivity.

References

[1] Joint Task Force Transformation Initiative, *Guide for Conducting Risk Assessments. NIST Special Publication 800-30, Revision 1*, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 2012. DOI: 10.6028/NIST.SP.800-30r1.

[2] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9540-7.

[3] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. DOI: 10.1017/CBO9781139644150.

[4] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, "Generated triangular norms", *Kybernetika*, **36**:3 (2000), 363–377.

[5] A. Kolesárová, "1-Lipschitz aggregation operators and quasi-copulas", *Kybernetika*, **39**:5 (2003), 615–629.

Received on October 6, 2026

Версионная архитектура интеллектуальной системы поддержки групповых решений по классификации объектов аналитического хранилища

А. С. Филатов*

Предложена версионная архитектура интеллектуальной системы для группового решения о включении объектов аналитического хранилища в контур управления персональными данными. Прогноз модели, ответы экспертов и итоговая метка привязаны к версии объекта; подтверждение требует согласия участников и наличия обязательных ролей. На контрольной выборке из 9 379 столбцов локальная модель получила $F_1 = 0{,}883$.

Ключевые слова: аналитическое хранилище, происхождение данных, персональные данные, групповое решение.

1. Постановка задачи

Объекты аналитического хранилища меняются от версии к версии, поэтому решение о включении объекта в контур управления персональными данными (ПДн) принимается для пары «объект–версия» по метаданным. Метка DI означает, что основание для включения есть, NPD — что в данной версии оно не найдено. За решение отвечают конкретные роли, и метка должна быть связана с версией объекта, моделью и ответами людей. Средства сквозного происхождения [1] фиксируют данные, код и модели конвейера машинного обучения, но не управленческое решение и его участников. Методы передачи решения эксперту [2] распределяют объекты между моделью и экспертами по ожидаемой точности и нагрузке и не учитывают полномочий ролей. По данным метаанализа [3], совместная работа человека и модели в среднем уступает лучшему из них, поэтому эксперту стоит передавать только те случаи, где проверка окупается.

В отличие от [1], решение хранится как неизменяемая запись, привязанная к версии объекта, модели и ответам экспертов. Компетентность

* *Филатов Александр Сергеевич* — аспирант, Московский государственный университет технологий и управления имени К. Г. Разумовского (Первый казачий университет), Москва, e-mail: shzgudzh@gmail.com.

Filatov Alexander Sergeevich — PhD student, K. G. Razumovsky Moscow State University of Technologies and Management (the First Cossack University), Moscow.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

эксперта, в отличие от [2], используется только для его выбора, а подтвердить или заблокировать метку могут лишь обязательные роли и роли с правом вето. Политика отбора на проверку сравнивает ожидаемые потери автоматической метки со стоимостью проверки и дополнительно учитывает расхождение моделей и неполноту метаданных.

2. Модель решения и архитектура

Версия t хранилища описывается типизированным графом $\mathcal{G}^{(t)}$ объектов, метаданных, преобразований и связей происхождения. Опубликованные записи не перезаписываются: изменение объекта создает новую версию. Поэтому для каждой метки восстанавливаются использованные снимок, модель и участники [1].

Локальная модель оценивает калиброванную вероятность p_i^L класса DI по метаданным, а модель с фиксированной графовой агрегацией — вероятность p_i^G с учетом окрестности в $\mathcal{G}^{(t)}$; GraphSAGE [4] проверяется как отдельная альтернатива. Пусть $m_i \in [0,1]$ — доля отсутствующих метаданных, $\kappa_i = |p_i^L - p_i^G|$ — расхождение моделей, а

$$L_{\mathrm{DI}} = c_{\mathrm{FP}}(1 - p_i^L), \qquad L_{\mathrm{NPD}} = c_{\mathrm{FN}} p_i^L, \qquad L_R = c_R + c_{\mathrm{res}}.$$

Здесь c_{FP} и c_{FN} — стоимости ошибок, c_R — стоимость экспертной проверки, c_{res} — остаточный риск после нее. Политика Ψ_i выбирает класс с меньшим L_c, если $\min_c L_c < L_R$, $m_i \le m_{\max}$ и $\kappa_i \le \kappa_{\max}$; иначе объект получает действие REVIEW.

Эксперт e дает ответ $a_{ie} \in \{\mathrm{DI}, \mathrm{NPD}, \perp\}$, где $\perp$ означает отсутствие решения. Класс c подтверждается, если по каждой обязательной роли получен ответ c, ни один ответ обязательной роли ему не противоречит и отсутствует возражение роли с правом вето; иначе назначается новый раунд или эскалация. Критерии архитектуры — восстановимость версии, модели и участников; неизменяемость опубликованных записей; прохождение моделью quality gate. В прототипе проверены связь машинных артефактов с версией и quality gate с ограничениями $\mathrm{Recall}_{\mathrm{DI}} \ge 0{,}60$ и $\mathrm{AP} \ge 0{,}35$; неизменяемость и ролевой протокол заданы как проектные инварианты.

3. Проверка на прототипе и выводы

Прототип проверен на снимке метаданных хранилища предприятия электронной коммерции: 5 148 объектов, 64 675 столбцов, граф из 69 823 вершин и 130 019 отношений. Слабые целевые метки сформированы эвристи-

ками по именам и описаниям столбцов. Обучающая часть содержит 48 840 столбцов (2 013 DI), калибровочная — 3 185 (191 DI), валидационная — 3 271 (229 DI), контрольная — 9 379 (286 DI) из 219 компонентов связности графа происхождения. Между частями нет графовых связей и точных совпадений текстового представления.

Локальная модель использует признаки TF-IDF по word n-grams ($n = 1$–2) и char n-grams ($n = 3$–5) для имен базы, схемы, таблицы и столбца, типа и описания; использована логистическая регрессия с балансировкой классов и $C = 32$. Фиксированная графовая модель объединяет 96-мерные векторы SVD с усредненными по типам связей векторами соседей и степенями вершин ($C = 0{,}5$). Типизированная GraphSAGE имеет два слоя по 128 признаков, dropout 0,2 и обучается Adam с learning rate 10^{-3} не более 100 эпох, ранней остановкой после 15 эпох и ансамблем пяти запусков. Вероятности калиброваны методом temperature scaling; пороги 0,780, 0,803 и 0,903 соответственно выбраны по валидационной части при $\mathrm{Recall}_{\mathrm{DI}} \geq 0{,}60$.

Таблица 1: Качество классификации столбцов (класс DI)

Модель	Точность	Полнота	F_1	AP
Логистическая регрессия по TF-IDF	0,871	0,895	0,883	0,896
Фиксированная агрегация по графу	0,532	0,441	0,482	0,481
Типизированная GraphSAGE	0,853	0,465	0,602	0,654

Графовые модели уступили локальной и по F_1, и по средней точности AP. 95 %-й доверительный интервал F_1 локальной модели равен [0,820; 0,938] (percentile cluster bootstrap): 1 000 раз с возвращением выбирались 219 компонентов связности со всеми их столбцами.

В политике заданы $c_{\mathrm{FN}} = 5$, $c_{\mathrm{FP}} = 1$, $c_R = 0{,}35$, $c_{\mathrm{res}} = 0{,}05$, $m_{\max} = 0{,}75$ и $\kappa_{\max} = 0{,}60$. На проверку направлены 583 из 9 379 столбцов (6,216 %). Среди остальных 60 ошибок: 8 пропусков DI (FN) и 52 ложных срабатывания (FP).

При слабых метках, построенных по именам и описаниям столбцов, граф происхождения не улучшил классификацию по сравнению с метаданными самого столбца, а политика отбора передала экспертам около 6 % столбцов.

Список литературы

[1] M. Schlegel, K.-U. Sattler, "Capturing end-to-end provenance for machine learning pipelines", *Information Systems*, **132** (2025), 102495. DOI: 10.1016/j.is.2024.102495.

[2] C. Nguyen, T.-T. Do, G. Carneiro, "Probabilistic Learning to Defer: Handling Missing Expert Annotations and Controlling Workload Distribution", *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Learning Representations*, 2025.

[3] M. Vaccaro, A. Almaatouq, T. Malone, "When combinations of humans and AI are useful: A systematic review and meta-analysis", *Nature Human Behaviour*, **8**:12 (2024), 2293–2303. DOI: 10.1038/s41562-024-02024-1.

[4] W. L. Hamilton, R. Ying, J. Leskovec, "Inductive Representation Learning on Large Graphs", *Advances in Neural Information Processing Systems 30*, 2017, 1024–1034, arXiv: 1706.02216.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

A Versioned Architecture of an Intelligent Group Decision Support System for Classifying Analytical Data Warehouse Objects

A. S. Filatov

A versioned architecture of an intelligent information system is proposed for group decisions on placing analytical data warehouse objects under personal data governance. Model predictions, expert answers and final labels are tied to the object version; confirmation requires expert agreement and the presence of all mandatory roles. On a held-out set of 9,379 columns, a local model reached $F_1 = 0.883$.

Keywords: data warehouse, data lineage, personal data, group decision.

References

[1] M. Schlegel, K.-U. Sattler, "Capturing end-to-end provenance for machine learning pipelines", *Information Systems*, **132** (2025), 102495. DOI: 10.1016/j.is.2024.102495.

[2] C. Nguyen, T.-T. Do, G. Carneiro, "Probabilistic Learning to Defer: Handling Missing Expert Annotations and Controlling Workload Distribution", *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Learning Representations*, 2025.

[3] M. Vaccaro, A. Almaatouq, T. Malone, "When combinations of humans and AI are useful: A systematic review and meta-analysis", *Nature Human Behaviour*, **8**:12 (2024), 2293–2303. DOI: 10.1038/s41562-024-02024-1.

[4] W. L. Hamilton, R. Ying, J. Leskovec, "Inductive Representation Learning on Large Graphs", *Advances in Neural Information Processing Systems 30*, 2017, 1024–1034, arXiv: 1706.02216.

Received on October 10, 2026

Решение задачи раскраски графов на основе DSatur и PI-GNN

Д. А. Филатов*

В данной работе исследуется синергетический (гибридный) подход к решению задачи раскраски графов, основанный на интеграции классического эвристического алгоритма DSatur и физически-информированной графовой нейронной сети PI-GNN. Предложенный подход направлен на улучшение точности и стабильности раскраски по сравнению с изолированным использованием нейросетевых моделей. Приводятся результаты сравнительного анализа предложенного метода с другими алгоритмами на графах различной размерности.

Ключевые слова: задача раскраски графов, Graph Coloring Problem, GCP, графовые нейронные сети, GNN, PI-GNN, DSatur.

1. Введение

Задача раскраски графов (GCP) заключается в поиске минимального количества цветов для разметки вершин графа, при котором любые две смежные вершины имеют разные цвета. В данной статье исследуется синергетический (гибридный) подход к ее решению, основанный на интеграции классического эвристического алгоритма DSatur и физически-информированной графовой нейронной сети PI-GNN.

2. Описание предложенного подхода

Для раскраски графов эффективны графовые нейронные сети (GNN), обрабатывающие топологические структуры. Особый интерес представляет концепция PI-GNN (Physics-Informed Graph Neural Networks) [3], внедряющая математические ограничения в функцию потерь нейросети. Гибридные методы позволяют сочетать сильные стороны различных алгоритмов [1]. В данной работе описывается интеграция алгоритма DSatur в результаты модели PI-GNN [2].

* *Филатов Д. А.* — аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., e-mail: filatoff.denis2018@yandex.ru.

Filatov D. A. — Postgraduate student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Используемая модель построена на базе архитектуры PIGCN из 4 сверточных слоев, функционирующих по принципу передачи сообщений (Message Passing), где каждый слой агрегирует информацию от соседей с помощью полносвязных блоков. Обучение выполнялось без учителя с помощью оптимизатора Adam и планировщика CosineAnnealingLR на основе функции потерь из работы [3]. Обучающая выборка формировалась методом тихой подстановки (Quiet Planting) [4], синтезирующим графы с известным эталонным решением. Процедура обучения и раскраски базируется на алгоритмах из [3]. В экспериментах использовались синтетические графы с хроматическим числом $\chi = 5$ и средней степенью вершины c, $12.5 \leq c \leq 15.0$. Подробное описание модели и ее программная реализация приведены в [2]. Интеграция PI-GNN с DSatur заключается в поиске конфликтных вершин при использовании PI-GNN и их устранении с помощью DSatur. Конфликтными признаются вершины, имеющие общие одноцветные рёбра; их цвета сбрасываются, после чего они последовательно перекрашиваются по критерию максимальной насыщенности DSatur. При отсутствии свободного цвета вершине присваивается цвет с минимальным числом локальных конфликтов.

3. Результаты и выводы

В таблице 1 представлены результаты сравнительного анализа решения GCP методами PI-GNN, гибридным подходом, жадным алгоритмом (Greedy), DSatur и имитацией отжига (SA). Эксперименты выполнялись на Python в Google Colab на базе GPU NVIDIA A100 для 30 графов связности c.

Модели PI-GNN, гибридный метод и SA ограничены бюджетом в 5 цветов ($\chi = 5$) и минимизируют долю конфликтов. Эвристики Greedy и DSatur используют стратегию расширения палитры, вводя дополнительный цвет. Таким образом, прямые показатели недопустимых рёбер у двух групп методов отражают несколько разные методологические подходы к управлению ресурсами палитры: поиск точной раскраски путем минимизации хроматического числа против аппроксимации в жестко фиксированном количестве цветов. Настройки SA: начальная температура $T_0 = 10.0$, скорость охлаждения $\alpha = 0.995$, лимит 2000 итераций. В ходе наблюдений за результатами работы программы допустимой долей конфликтов (одноцветных ребер) было принято значение не более 2%. Для оценки статистической значимости в таблицу внесены 95%-е доверительные интервалы (95% ДИ) для средней доли конфликтов, рассчитанные на основе t-распределения Стьюдента.

Таблица 1: Сравнительный анализ на графах различной размерности

Показатель	Графы с 5 тыс. вершин					Графы с 10 тыс. вершин				
	PI-GNN	PI-GNN + DSatur	Greedy	DSatur	SA	PI-GNN	PI-GNN + DSatur	Greedy	DSatur	SA
Минимальная доля конфликтов	2,04 %	1,63 %	6,94 %	0,00 %	14,92 %	1,71 %	1,71 %	6,31 %	0,00 %	18,09 %
Средняя доля конфликтов	2,19 %	1,89 %	6,94 %	0,00 %	15,54 %	1,83 %	1,78 %	6,31 %	0,00 %	18,31 %
95% ДИ для конфликтов	[2,17; 2,21]	[1,83; 1,95]	[6,94; 6,94]	[0,00; 0,00]	[15,38; 15,70]	[1,81; 1,85]	[1,77; 1,79]	[6,31; 6,31]	[0,00; 0,00]	[18,25; 18,37]
Максимальная доля конфликтов	2,27 %	1,98 %	6,94 %	0,00 %	16,29 %	1,93 %	1,79 %	6,31 %	0,00 %	18,64 %
Доля успешных запусков (< 2% конфл.)	0,00 %	100 %	0,00 %	100 %	0,00 %	100 %	100 %	0,00 %	100 %	0,00 %
Среднее время решения (мс)	153,93	5238,11	17,67	7492,14	12542,87	247,22	8189,54	39,07	12075,57	16961,00
Стандартное отклонение	0,05 %	0,17 %	0,00 %	0,00 %	0,46 %	0,04 %	0,03 %	0,00 %	0,00 %	0,15 %
Коэффициент вариации	2,41 %	9,16 %	0,00 %	0,00 %	2,95 %	2,37 %	1,81 %	0,00 %	0,00 %	0,84 %
Число цветов	5	5	6	6	5	5	5	6	6	5

На графах с 10 тыс. вершин гибридный подход улучшил точность раскраски по сравнению с чистой PI-GNN: снизились максимальная и средняя доли конфликтов, а коэффициент вариации уменьшился на четверть. Недостаток — увеличение времени работы, однако метод работает быстрее DSatur и SA. Алгоритмы DSatur и Greedy потребовали на один цвет больше. Для графов с 5 тыс. вершин выводы аналогичны. Важное отличие: гибрид значительно уменьшает долю конфликтов, что подтверждает эффективность интеграции DSatur в модель PI-GNN для графов небольшой размерности. Эксперименты на графах со 100 тыс. вершин вывели результаты только для PI-GNN и Greedy; остальные методы остановлены по тайм-ауту. Жадный алгоритм использовал 6 цветов при конфликтах около 6%, тогда как PI-GNN показала разброс конфликтов менее 2% [2]. Эксперименты проведены на ансамбле синтетических planted-графов. В дальнейшем планируется провести верификацию модели на разреженных, структурных и реальных графах.

4. Заключение

Таким образом, в данной работе было показано, что комбинация DSatur и PI-GNN увеличивает время работы по сравнению с изолированной нейросетевой моделью PI-GNN, для графов большой размерности результат не выводится из-за комбинаторных ограничений DSatur. Для улучшения качества раскраски требуется более точное внедрение DSatur в модель PI-GNN либо использование другого гибридного подхода. Однако для графов относительно небольшой размерности (до 10 тыс. вершин) предложенный гибрид способен эффективно снижать долю конфликтов в условиях фиксированного цветового бюджета.

Список литературы

[1] А. В. Гагарин, Р. К. Газизов, “Гибридный генетический нейросетевой алгоритм в задаче идентификации параметров цифровых моделей”, *Вестник УГАТУ*, **13**:2 (2009), 246–256.

[2] Д. А. Филатов, “Решение задачи раскраски графов с помощью графовых нейронных сетей”, *Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы*, XXV Междунар. конф. (Тула, 06–10 октября 2026 года), ТГПУ им. Толстого Л. Н., Тула, 2026, 221–225.

[3] L. Colantonio, A. Cacioppo, F. Scarpati, M. Chiara Angelini, F. Ricci-Tersenghi, S. Giagu, “Efficient Graph Coloring with Neural Networks: A Physics-Inspired Approach for Large Graphs”, *Nature Machine Intelligence*, **6** (2024), 942–953.

[4] F. Krzakala, L. Zdeborová, “Hiding quiet solutions in random constraint satisfaction problems”, *Physical Review Letters*, **102**:23 (2009), 238701. DOI: 10.1103/physrevlett.102.238701.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

Solving the Graph Coloring Problem via DSatur and PI-GNN

D. A. Filatov

This paper explores a synergistic (hybrid) approach to solving the Graph Coloring Problem (GCP), based on the integration of the classic heuristic DSatur algorithm and the physics-informed graph neural network. The proposed hybrid approach aims to improve coloring accuracy and stability compared to using neural network models in isolation. The results of a comparative analysis of the proposed method against classical algorithms on graphs of various sizes are presented.

Keywords: graph coloring problem, GCP, graph neural networks, GNN, PI-GNN, DSatur.

References

[1] A. V. Gagarin, R. K. Gazizov, “Hybrid genetic neural network algorithm in the problem of identifying parameters of digital models”, (In Russian), *Vestnik UGATU*, **13**:2 (2009), 246–256.

[2] D. A. Filatov, “Graph Coloring Using Graph Neural Networks”, *Algebra, Number Theory, Discrete Geometry and Multiscale Modeling: Modern Problems, Applications and Problems of History: Materials of the XXV International Conference*, TSPU, Tula, 2026, 221–225 (in Russian).

[3] L. Colantonio, A. Cacioppo, F. Scarpati, M. C. Angelini, F. Ricci-Tersenghi, S. Giagu, “Efficient Graph Coloring with Neural Networks: A Physics-Inspired Approach for Large Graphs”, *Nature Machine Intelligence*, **6** (2024), 942–953.

[4] F. Krzakala, L. Zdeborová, “Hiding quiet solutions in random constraint satisfaction problems”, *Physical Review Letters*, **102**:23 (2009), 238701. DOI: 10.1103/physrevlett.102.238701.

Received on October 10, 2026

Экспоненциальная нижняя оценка размерности эмбеддингов для ранжирования лемм

Р. А. Хрулев*

Леммы-кандидаты для тактик Lean 4 часто отбирают векторным поиском по скалярному произведению эмбеддингов цели и леммы. Показано, что не существует фиксированной размерности эмбеддингов, достаточной для точного ранжирования лемм: уже на явном семействе лемм-переписываний, шаблон которых состоит из m блоков по m^2 разностей, необходимая размерность растёт экспоненциально по m.

Ключевые слова: поиск лемм, эмбеддинги, автоматическое доказательство теорем, Lean 4, нижние оценки.

Пусть X — состояние доказательства в системе Lean 4 (цель и гипотезы), Λ — библиотека лемм. Тактика (`rw`, `apply`) проверяет, применима ли лемма $\ell \in \Lambda$ к X, получая на вход одновременно и X, и ℓ. Проверять так все леммы на каждом шаге доказательства (т. е. для каждого нового состояния X) дорого, поэтому кандидатов отбирают векторным поиском [1]: эмбеддинг $g(\ell)$ каждой леммы вычисляется заранее, один раз, а на каждом шаге вычисляется только эмбеддинг $f(X)$ текущего состояния; затем тактикой проверяются лишь несколько лемм с наибольшей оценкой $S(X, \ell) = \langle f(X), g(\ell)\rangle = \sum_{k=1}^{d} f_k(X)\, g_k(\ell)$. Здесь f и g — любые отображения в $\mathbb{R}^d$, но, в отличие от тактики, f видит только X, а g — только ℓ. Эмбеддинги *точно ранжируют* набор целей и лемм, если для каждой цели все применимые леммы оцениваются строго выше неприменимых.

Мы доказываем, что точное ранжирование лемм может требовать экспоненциальной размерности. Для этого строится семейство лемм-переписываний, шаблон которых состоит из m блоков по m^2 разностей; лемма применима к цели, если хотя бы в одном из m мест цели пройдены все проверки (разд. 1). Для этого семейства нужно $d \geq 2^{cm} - 1$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная (теорема 1).

* *Хрулев Руслан Александрович* — аспирант каф. МаТИС мех.-мат. факультета МГУ; научный руководитель: Боков Григорий Владимирович, e-mail: `ra.khrulev@gmail.com`, ORCID: 0009-0000-3423-775X.

Khrulev Ruslan Aleksandrovich — PhD student, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University; scientific supervisor: Bokov Grigory Vladimirovich.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

1. Модель применимости

Лемма-переписывание имеет вид $\ell:\ \forall a,b,\dots\ Л(a,b,\dots)=П(a,b,\dots)$, где Л — *шаблон*. Вместо переменных шаблона $a,b,\dots$ можно подставлять любые термы, а переменные цели фиксированы. *Сопоставить* шаблон с подтермом t цели — найти подстановку, после которой шаблон совпадает с t; при этом Lean отождествляет некоторые термы, равные по определению. Тактика `rw [ℓ]` ищет такой подтерм и заменяет его правой частью. Например, лемма `sub_self`: $a-a=0$ переписывает цель $(x-y)+(z-z)=w$ в $(x-y)+0=w$, а на цели $(x-y)+(y-x)=w$ не срабатывает. *Повтор переменной в шаблоне — это проверка равенства*: подтермы цели на позициях этой переменной обязаны совпасть. *Место* — подтерм цели, к которому прикладывается шаблон; `rw [ℓ]` срабатывает $\iff$ есть место, где пройдены все проверки.

Определение 1 (семейство $\mathcal{G}_{m,L}$)**.** Все термы имеют тип $\mathbb{Z}$ и строятся из переменных операциями $+,-,\cdot$, причём в произведениях скобки всюду расставлены слева направо: $abc=(ab)c$. Все буквы ниже — переменные. *Лемма* ℓ_Y, $Y\in\{0,1\}^{m\times L}$, имеет шаблон $\prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{L}(u_{kj}-v_{kj})$; множители с одним k образуют *блок* k. Все u_{kj} различны; $v_{kj}=u_{kj}$ при $Y_{kj}=1$, а при $Y_{kj}=0$ v_{kj} — новая переменная. Правая часть на применимость не влияет; годится, например, произведение тех же множителей в обратном порядке. *Цель* с таблицей $X\in\{0,1\}^{m\times L}$ имеет вид $P_1+\dots+P_m=w$. Каждое слагаемое P_i (*место* i) устроено как шаблон: это произведение m блоков по L разностей. Блок i в P_i равен $(t_{i1}-t'_{i1})\cdots(t_{iL}-t'_{iL})$, где $t'_{ij}=t_{ij}$ при $X_{ij}=0$, а при $X_{ij}=1$ переменная t'_{ij} отлична от t_{ij}; остальные блоки $k\neq i$ равны $(e-e)\cdots(e-e)$.

В семействе $\mathcal{G}_{m,L}$ сопоставление сводится к буквальному совпадению (вычитание и умножение на $\mathbb{Z}$ при сопоставлении не раскрываются), поэтому вид шаблона в цели имеют только $P_1,\dots,P_m$, и при сопоставлении с P_i j-я разность k-го блока шаблона прикладывается к j-й разности k-го блока P_i. Нетривиальные проверки возникают только в блоке i (пары $(e-e)$ проходят любую проверку), т. е. строка i таблицы Y — требования к месту i.

Пусть даны лемма ℓ_Y и цель с таблицей X. Назовём j-ю разность блока i в месте P_i *препятствием*, если лемма требует равенства её членов ($Y_{ij}=1$: в шаблоне стоит $(u_{ij}-u_{ij})$), а в цели они различны ($X_{ij}=1$: стоит $(t_{ij}-t'_{ij})$, $t'_{ij}\neq t_{ij}$). Поэтому число препятствий в месте i равно $c_i(X,Y)=\sum_{j=1}^{L}X_{ij}Y_{ij}$.

Утверждение 1. *Переписывание* `rw [`ℓ_Y`]` *срабатывает на цели* $X \iff$ *в ней есть место без препятствий, т. е.* $c_i(X,Y) = 0$ *при некотором* i.

Пример: $m = L = 2$, $X = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $P_1 = (x-y)(z-z)\cdot(e-e)(e-e)$, $P_2 = (e-e)(e-e)\cdot(x-x)(y-z)$. Две леммы:

$Y = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $(a-a)(b-p)\cdot(q-r)(s-h)$, $(c_1,c_2) = (1,0)$: применима;
$Y = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $(a-a)(b-p)\cdot(q-r)(s-s)$, $(c_1,c_2) = (1,1)$: неприменима.

2. Нижняя оценка

Определение 2. Пусть R — матрица из нулей и единиц. Вещественная матрица B того же размера *согласована по знакам* с R, если $B[X,Y] > 0$ при $R[X,Y] = 1$ и $B[X,Y] < 0$ при $R[X,Y] = 0$. *Знаковый ранг* $\operatorname{sr}(R)$ — минимум $\operatorname{rank} B$ по всем таким матрицам B.

Теорема Разборова–Шерстова ([2])**.** *Для* $X, Y \in \{0,1\}^{m\times L}$ *положим* $H_{m,L}[X,Y] = \bigwedge_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{L}(X_{ij}\wedge Y_{ij})$. *Существует* $c > 0$ *такое, что* $\operatorname{sr}(H_{m,m^2}) \geq 2^{cm}$ *при всех достаточно больших* m.

Теорема 1. *Если эмбеддинги* $f(X), g(\ell) \in \mathbb{R}^d$ *точно ранжируют* $\mathcal{G}_{m,m^2}$, *то при всех достаточно больших* m *выполнено* $d \geq 2^{cm} - 1$, *где* c — *постоянная из теоремы Разборова–Шерстова.*

Доказательство. Пусть $L = m^2$, $H = H_{m,L}$. Возьмём по одной цели с каждой таблицей X и все леммы ℓ_Y. Рассмотрим матрицы со строками X и столбцами Y: оценок $S[X,Y] = \langle f(X), g(\ell_Y)\rangle$ и *применимости* A: $A[X,Y] = 1$, если `rw [`ℓ_Y`]` срабатывает на цели X, иначе 0.

Шаг 1. Покажем, что $\operatorname{rank} S \leq d$. Имеем $S = FG^{\top}$, где строки матриц F и G — векторы $f(X)$ и $g(\ell_Y)$ длины d, поэтому $\operatorname{rank} S \leq \operatorname{rank} F \leq d$; здесь существенно, что f не видит лемму, а g — цель.

Шаг 2. Покажем, что $\operatorname{sr}(A) \leq d+1$. Ранжирование точное, поэтому для каждой строки X есть порог θ_X, меньший оценок всех применимых лемм и больший оценок всех неприменимых. Матрица $T[X,Y] = S[X,Y] - \theta_X$ согласована по знакам с A и отличается от S на матрицу ранга не более 1, поэтому $\operatorname{sr}(A) \leq \operatorname{rank} T \leq \operatorname{rank} S + 1 \leq d+1$ по определению 2.

Шаг 3. Покажем, что $\operatorname{sr}(A) = \operatorname{sr}(H) \geq 2^{cm}$. По утверждению 1 $A[X,Y] = 0 \iff c_i(X,Y) \geq 1$ при всех i, т. е. при всех i есть j с $X_{ij}Y_{ij} = 1$, а это и есть $H[X,Y] = 1$. Значит, $A = 1 - H$, и $\operatorname{sr}(A) = \operatorname{sr}(H)$: B согласована по знакам с $A \iff -B$ согласована с H, а $\operatorname{rank}(-B) = \operatorname{rank} B$. Наконец, в $\mathcal{G}_{m,L}$ есть цели и леммы со *всеми* таблицами X и Y, поэтому H — вся матрица H_{m,m^2}, и $\operatorname{sr}(H) \geq 2^{cm}$ по теореме Разборова–Шерстова. Вместе с шагом 2 получаем $d+1 \geq \operatorname{sr}(A) = \operatorname{sr}(H) \geq 2^{cm}$. □

Таким образом, точно ранжировать произвольные леммы эмбеддингами фиксированной размерности нельзя: размерность должна расти экспоненциально по числу блоков в шаблоне леммы. Оценка касается только точного ранжирования. Приближённый поиск, при котором среди нескольких лемм с наибольшей оценкой достаточно найти хотя бы одну применимую, — другая задача и тема дальнейших исследований.

Список литературы

[1] K. Yang et al., “LeanDojo: Theorem proving with retrieval-augmented language models”, *Advances in Neural Information Processing Systems*, NeurIPS, **36**, 2023, 21573–21612. DOI: 10.52202/075280-0944.

[2] A. A. Razborov, A. A. Sherstov, “The sign-rank of AC^0”, *SIAM J. Comput.*, **39**:5 (2010), 1833–1855. DOI: 10.1137/080744037 .

Статья поступила 23 октября 2026 г.

An Exponential Lower Bound on Embedding Dimension for Lemma Ranking

R. A. Khrulev

Lean 4 tactics often take candidate lemmas from vector search by the inner product of goal and lemma embeddings. We show that no fixed embedding dimension suffices to rank lemmas exactly: already on an explicit family of rewrite lemmas whose patterns consist of m blocks of m^2 differences, the required dimension grows exponentially in m.

Keywords: premise selection, embeddings, automated theorem proving, Lean 4, lower bounds.

References

[1] K. Yang et al., “LeanDojo: Theorem proving with retrieval-augmented language models”, *Advances in Neural Information Processing Systems*, NeurIPS, **36**, 2023, 21573–21612. DOI: 10.52202/075280-0944.

[2] A. A. Razborov, A. A. Sherstov, “The sign-rank of AC^0”, *SIAM J. Comput.*, **39**:5 (2010), 1833–1855. DOI: 10.1137/080744037.

Received on October 23, 2026

Критериальная система универсальности минимальных функций, реализуемых нейронными схемами

А. А. Хусаенов*

В настоящей работе определена приведенная критериальная система замкнутых по операциям суперпозиции классов для проверки функций $f(x, y)$, реализуемых нейронными схемами $\sum$ из 5 элементов множества $B = \{x + y, \frac{1}{2}x, -x, \theta(x)\}$, где $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$, на универсальность в классе кусочно-параллельных функций над кольцом двоично-рациональных чисел [2].

Ключевые слова: минимальные универсальные функции, класс кусочно-параллельных функций, нейронные схемы.

1. Введение

Мы используем операции суперпозиции из [1]. В работах [4, 5] показано, что в классе $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ кусочно-параллельных функций [2] над кольцом двоично-рациональных чисел $\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}} = \left\{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ существует функция, реализуемая схемой из пяти элементов множества B и являющаяся универсальной функцией — то есть функцией, из которой с использованием операции суперпозиции можно получить все функции из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$. В работе [3] показано, что сложность схем $\sum$ в базисе B, реализующих универсальные функции, не может быть меньше 5 и найдены все схемы сложности 5, реализующие универсальные функции, которые называются минимальными универсальными функциями.

В настоящей работе определена критериальная система замкнутых по операциям суперпозиции классов, невключение в каждый класс которой функции сложности 5 равносильно ее универсальности. Эта система

Хусаенов Артём Азатович — младший научный сотрудник кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, преподаватель кафедры финансовых технологий и анализа данных факультета компьютерных наук Высшей школы экономики, исполнительный директор по исследованию данных департамента цифровых каналов ПАО Сбербанк, e-mail: a.khusaenov@mail.ru, ORCID: 0009-0004-5291-4645.

Khusaenov Artem Azatovich — Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems junior research fellow, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; lecturer of Faculty of Computer Science, Higher School of Economics; Executive Director of Data Research, Digital Channels Department, Sberbank.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

является приведенной, то есть после удаления из нее любого класса полученная система не является критериальной, и состоит из максимальных по включению собственных подмножеств $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$. Линейные составляющие функции из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ являются однородными аффинными функциями вида:

$$l_f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \text{где } a_i \in \mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}},\ i = \overline{1, n} \qquad (1)$$

Важно заметить, что класс $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ [2] содержит, например, нейроны модели Мак-Каллока и Питтса [6] с весами из кольца двоично-рациональных чисел и все нейронные схемы, получаемые суперпозициями таких нейронов. При этом двоично-рациональными числами можно приближать действительные числа с любой заданной точностью. То есть использование функций из $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ не создает ограничения общности в вопросе представимости функций, реализуемых нейронными схемами в модели Мак-Каллока и Питтса.

2. Основные результаты

Для проверки функций сложности 5 на минимальную универсальность получена приведенная критериальная система замкнутых классов $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$:

$$J' = \{T_1, T_2, T_{int}, T_{\leq 1}, T_{\geq 0}, A_3, A_5\} \qquad (2)$$

где:

$$T_1 = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), f(1, ..., 1) = 1\},$$
$$T_2 = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}), f(2, ..., 2) = 2\},$$

$$T_{int} = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то } a_i \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1, n}\},$$

$$T_{\geq 0} = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то } a_i \geq 0,\ i = \overline{1, n}\},$$

$$T_{\leq 1} = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то } \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 1, i = \overline{1, n}\},$$

$$A_p = \{f \mid f \in L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}}),\ \text{если для } f \text{ выполнено (1), то}$$
$$\frac{m'}{2^{n'}} = \sum_{i=1}^{n} a_i, p|(m' - 2^{n'})\}.$$

Теорема 1. *Функция $f(x,y)$ из множества кусочно-параллельных функций $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$, реализуемая схемой из 5 элементов в базисе $B = \{x+y, \frac{1}{2}x, -x, \theta(x)\}$, является универсальной тогда и только тогда, когда она не содержится полностью ни в одном из классов $J' = \{T_1, T_2, T_{int}, T_{\leq 1}, T_{\geq 0}, A_3, A_5\}$.*

Теорема 2. *Классы, содержащиеся в множестве J', являются предполными в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$ и образуют приведенную критериальную систему для минимальных универсальных функций в $L(\mathbb{Q}_{\frac{m}{2^n}})$.*

Список литературы

[1] С. В. Яблонский, *Введение в дискретную математику*, издание 2, Наука, М., 1986.

[2] В. С. Половников, "О задаче проверки функциональной полноты в классе кусочно-параллельных функций", *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, механика.*, **63**:6 (2008), 31–35.

[3] А. А. Часовских, М. В. Агафонова, А. А. Хусаенов, Е. И. Яковенко, "Минимальные универсальные элементы в классе нейронных схем", *Дискретная математика*, **37**, 2025, 130–144. DOI: 10.4213/dm1893.

[4] М. В. Агафонова, "О классе нейронных функций с двоично-рациональными параметрами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **22**:1 (2018), 7–19.

[5] М. В. Агафонова, "О минимальной Шефферовой функции в классе кусочно-параллельных функций, определенных над двоично-рациональными числами", *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **23**:1 (2019), 107–116.

[6] W. S. McCulloch, W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

A criterial system for the universality of minimal functions implemented by neural schemes

A. A. Khusaenov

In this paper, we define a specific criterion system for classes of functions closed under the operation of superposition. This system is used to test whether functions $f(x,y)$ realizable by neural schemes $\sum$ consisting of 5 elements from the set $B = \{x+y, \frac{1}{2}x, -x, \theta(x)\}$ are universal within the class of piecewise-parallel functions [2].

Keywords: minimal universal functions, class of piecewise parallel functions, neural schemes.

References

[1] S. V. Yablonsky, *Introduction to discrete mathematics*, 2nd ed., Nauka, Moscow, 1986.

[2] V. S. Polovnikov, "Problem of checking the functional completeness in the class of piecewise parallel functions", *Moscow University Mathematics Bulletin*, **63**:6 (2008), 31–35.

[3] A. A. Chasovskikh, M. V. Agafonova, A. A. Khusaenov, E. I. Yakovenko, "Minimal universal elements in the class of neural circuits", *Diskretnaya Matematika*, **37**, 2025, 130–144. DOI: 10.4213/dm1893.

[4] M. V. Agafonova, "On a class of neural functions with binary-rational parameters", *Intelligent systems. Theory and applications*, **22**:1 (2018), 7–19.

[5] M. V. Agafonova, "On a minimal Sheffer function in the class of piecewise-parallel functions defined over binary rational numbers", *Intelligent systems. Theory and applications*, **23**:1 (2019), 107–116.

[6] W. S. McCulloch, W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**:4 (1943), 115–133.

Received on November 10, 2026

Синтаксический анализ с помощью больших языковых моделей: влияние форматов генерации

Е. Д. Шамаева*, Н. В. Лукашевич‡

Статья посвящена исследованию генеративных подходов к синтаксическому анализу на основе большой языковой модели (LLM). Исследуется влияние скобочных форматов (GRCT и LCT) генерации синтаксического представления на качество анализа. Установлено, что возможно успешное дообучение LLM для каждого из форматов: по метрике LAS_LLM результаты генерации превосходят результаты классических нейросетевых синтаксических анализаторов Stanza и DeepPavlov. При этом большая языковая модель, дообученная для синтаксического анализа на текстах одного домена, корректно работает на текстах другого домена.

Ключевые слова: синтаксический анализ, дообучение, большие языковые модели, деревья зависимостей, формат скобочной последовательности.

Синтаксический анализ — важный этап лингвистического анализа текстов. В этой области актуальным является применение больших языковых моделей (Large Language Model, LLM), в частности, их дообучение (fine-tuning) для генерации синтаксического дерева зависимостей. Классический формат CoNLL-U является трудным для генерации с помощью LLM, поскольку связь между главным и зависимым выражается через их номера в предложении. Поэтому одним из важных направлений исследований является генерация дерева зависимостей в скобочном формате. На момент исследования существует небольшое количество работ про применение LLM для синтаксического анализа русского языка в скобочном формате, в частности, посвященных дообучению для формата GRCT [1].

В данной статье рассматривается дообучение LLM для генерации результата синтаксического анализа в двух разных скобочных форматах

* *Шамаева Елена Денисовна* — сотрудник каф. алгоритмических языков ф-та ВМК МГУ, e-mail: derinhelm@yandex.ru, ORCID: 0009-0002-6233-8958.

Shamaeva Elena Denisovna — Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Algorithmic Languages.

‡ *Лукашевич Наталья Валентиновна* — д.т.н., зав.каф. алгоритмических языков ф-та ВМК МГУ, e-mail: louk_nat@mail.ru, ORCID: 0000-0002-1883-4121.

Loukachevitch Natalia Valentinovna — Doctor of Technical Sciences, Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Department of Algorithmic Languages.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

дерева зависимостей, GRCT и LCT, введенных в [3]. Синтаксическое дерево зависимостей состоит из слов и знаков препинания предложения в качестве вершин и связей между ними в качестве ребер (с метками типа связи). Для генерации синтаксического дерева зависимостей с помощью LLM дерево зависимостей преобразуется в скобочный формат GRCT (Grammatical Relation Centered Tree) или LCT (Lexical Centered Tree). Для этого метки типа связей преобразуются в вершины, затем происходит обход в глубину модифицированного дерева зависимостей. В формате GRCT вершины типа связи являются главными для вершин формы слова, в формате LCT — наоборот. Например, в формате GRCT дерево зависимостей будет выглядеть как [root[nsubj[Дети]][играют]], а в формате LCT — [играют[Дети[nsubj]]][root]].

Особенностью генерации дерева зависимостей с помощью LLM является зависимость процесса генерации от сгенерированного фрагмента. Для форматов GRCT и LCT различается порядок генерации элементов дерева зависимостей: при генерации в формате GRCT сначала фиксируется тип связи, а потом форма слова, в формате LCT — наоборот. Различается и порядок генерации вершины формы слова и ее поддеревьев: в формате LCT вершина формы слова всегда идет до описания ее поддеревьев, в формате GRCT на это влияет порядок слов в предложении.

Цель данного исследования — сравнение обобщающей способности LLM при дообучении для генерации дерева зависимостей в форматах GRCT и LCT. Дообучение производилось на наиболее крупном датасете русскоязычных деревьев зависимостей SynTagRus, а тестирование — на тестовых выборках трех датасетов деревьев зависимостей: SynTagRus (8800 предложений, v2.9), GSD (601 пред., v2.5), Taiga (881 пред., v.2.6). У этих датасетов принципиально отличаются принципы построения: SynTagRus основан на художественной прозе и публицистике, GSD — на текстах русскоязычной версии Wikipedia, Taiga — на текстах электронной коммуникации. Эксперименты по дообучению проведены для инструктивных LLM размером 0.6 и 4 миллиарда параметров(Qwen3-0.6B и Qwen3-4B). Дополнительно проведены эксперименты для модели RuadaptQwen3-4B-Hybrid, которая является адаптацией для русского языка модели Qwen3-4B [2]. Для каждой модели выполнено дообучение для генерации в формате GRCT и LCT [1]. Для дообучения выбран метод Q-LoRA (Quantized-LoRA), параметры дообучения взяты из [1]. При дообучении использовались предложения из обучающей выборки, для которых длина обучающего примера

[1] при дообучении на вход модели — текст предложения и эталонное дерево в формате GRCT или LCT, при тестировании — только текст предложения, использовалась «жадная» генерация со значением температуры 0, ограничение длины — 5000 токенов, для декодирования — стандартные алгоритмы из [1].

после токенизации не превышала 512 субтокенов. Общее количество таких предложений зависело от токенизатора LLM и составляло около 70,000 предложений (валидационная выборка — 8906 предложений). Для сравнения использовались классические нейросетевые синтаксические анализаторы DeepPavlov (модель syntax_ru_syntagrus_bert) и Stanza (модель ru_syntagrus).

Для оценки результатов дообученных моделей авторами предложены метрики UAS_LLM и LAS_LLM. Классические метрики UAS и LAS с точки зрения корректности главного слова (UAS) и главного слова с типом связи (LAS) оценивают точность (доля корректных среди предсказанных), полноту (среди эталонных) и F-меру (их гармоническое среднее). Эти метрики неприменимы для оценки результатов LLM, так как не устойчивы к изменению предложения. Модифицированные метрики UAS_LLM и LAS_LLM в числителе сравнивают ребра (а не вершины) с точки зрения совпадения форм главных и зависимых слов (и типа связи для LAS_LLM), знаменатели остаются неизменными. В данном исследовании происходит усреднение метрик по всем тестовым предложениям датасета (для предложений с неуспешным результатом — метрика 0).

Для обоих форматов для датасета SynTagRus адаптированная и неадаптированная модели размером 4 млрд по метрике LAS_LLM превзошли DeepPavlov и Stanza[2], по метрике UAS_LLM показали сопоставимые результаты. На датасетах Taiga и GSD для обоих форматов только неадаптированная модель размером 4 превзошла DeepPavlov и Stanza по метрике LAS_LLM[3]. При этом на устойчивость к смене формата влияет размер модели и не влияет ее адаптация к русскому языку (для модели размером 0.6 млрд в формате GRCT — более высокие результаты, для моделей размером 4 млрд разница не установлена).

Проведенное исследование показало устойчивость дообучения LLM к изменению порядка следования формы слова и типа связи в скобочных форматах дерева зависимостей. Кроме того, установлено, что большая языковая модель, дообученная на текстах одного домена, может качественно работать на других доменах и превосходить по качеству классические нейросетевые синтаксические анализаторы.

Список литературы

[2]По метрике LAS_LLM на SynTagRus Ruadapt_4B_GRCT: 0.92, Qwen_4B_GRCT, Qwen_4B_LCT, Ruadapt_4B_LCT: 0.91, Stanza: 0.9, DeepPavlov: 0.87.

[3]На Taiga Qwen_4B_GRCT, Qwen_4B_LCT: 0.76, Stanza: 0.73, DeepPavlov: 0.71; на GSD Qwen_4B_LCT: 0.84, Qwen_4B_GRCT: 0.81, DeepPavlov: 0.8, Stanza: 0.79.

[1] C. Hromei, C. D. Croce, R. Basili, "U-DepPLLaMA: Universal Dependency Parsing via Auto-regressive Large Language Models", *IJCoL. Italian Journal of Computational Linguistics*, 2024. DOI: 10.4000/125nm.

[2] M. Tikhomirov, D. Chernyshev, "Facilitating large language model Russian adaptation with learned embedding propagation", *Journal of Language and Education*, **10**:4. DOI: 10.17323/jle.2024.22224 (2024).

[3] D. Croce, A. Moschitti, R. Basili, "Structured lexical similarity via convolution kernels on dependency trees", *Proceedings of the 2011 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*, 2011, 1034–1046, https://aclanthology.org/D11-1096/ .

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

LLM-based syntactic parsing: impact of generating formats

E. D. Shamaeva, N. V. Loukachevitch

This article studies generative LLM-based syntactic parsing. The impact of bracketed syntactic representation formats (GRCT and LCT) on parsing quality is investigated. Research has established that an LLM can be successfully fine-tuned for analysis on each of the formats. For both formats, according to the LAS_LLM metric, the fine-tuned Qwen3-4B model exceeds the classic neural network parsers Stanza and DeepPavlov. Moreover, the fine-tuned LLM is resistant to domain shift.

Keywords: parsing, fine-tuning, large language models, dependency tree, bracketed format.

References

[1] C. Hromei, C. D. Croce, R. Basili, "U-DepPLLaMA: Universal Dependency Parsing via Auto-regressive Large Language Models", *IJCoL. Italian Journal of Computational Linguistics*, 2024. DOI: 10.4000/125nm.

[2] M. Tikhomirov, D. Chernyshev, "Facilitating large language model Russian adaptation with learned embedding propagation", *Journal of Language and Education*, **10**:4. DOI: 10.17323/jle.2024.22224 (2024).

[3] D. Croce, A. Moschitti, R. Basili, "Structured lexical similarity via convolution kernels on dependency trees", *Proceedings of the 2011 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*, 2011, 1034–1046, https://aclanthology.org/D11-1096/.

Received on November 9, 2026

Часть 7
Символьные вычисления

Субрезультантный алгоритм для наибольшего общего делителя полиномов с несколькими параметрами

С. А. Абрамов*, А. А. Рябенко‡

Предлагается алгоритм, на вход которого подаются два полинома, зависящих, кроме основной переменной ("неизвестной") x, еще и от переменных $a_1, \ldots, a_s$, выступающих как параметры, которые могут принимать различные значения. Исследуется вопрос о наибольшем общем делителе исходных полиномов в зависимости от использованных значений параметров.

Ключевые слова: полиномы с параметрами, цепочка субрезультантов, наибольший общий делитель, компьютерная алгебра.

1. Субрезультантный алгоритм

Исходные данные — два полинома $u, v \in K[x, a_1, \ldots, a_s]$, $\deg_x u = m$, $\deg_x v = n$, в которых $a_1, \ldots, a_s$ рассматриваются как параметры, принимающие значения в поле K или некотором его расширении. Результант $\mathrm{Res}_x(u, v) \in K[a_1, \ldots, a_s]$ — полином, обращающийся для конкретных значений $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$ параметров в 0, если и только если полиномы u, v имеют при этих значениях наибольший общий делитель (НОД) положительной степени по x.

Для случая одного параметра задача определения вида НОД в зависимости от значений параметра решена в [1, 2]. В настоящей заметке мы переносим этот же подход на случай нескольких параметров. Полиномы нескольких переменных имеют свою специфику, которая может препятствовать привлечению подходов, вполне успешных в случае одной переменной. В нашей работе это сказалось, в основном, на представлении итогов выполнения алгоритма — разд. 2.

* *Абрамов Сергей Александрович* — доктор физ.-мат. наук, главный науч. сотр., Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, e-mail: sergeyabramov@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7745-5132.

Abramov Sergei Aleksandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS.

‡ *Рябенко Анна Андреевна* — канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотр. Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, e-mail: anna.ryabenko@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5780-7743.

Ryabenko Anna Andreevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Federal Research Center "Computer Science and Control" RAS.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Этот подход дает, в частности, возможность установить для заданного натурального t, существуют ли такие значения параметров, для которых степень НОД рассматриваемых полиномов становится равной t, и указать вид такого НОД при положительном ответе. Для нахождения значений параметров, обеспечивающих это, может потребоваться рассмотрение и решение системы нелинейных алгебраических уравнений.

Связь субрезультантов с общими делителями и с операцией деления полиномов с остатком обсуждалась, например, в [5, 6].

Построив цепочку субрезультантов (см., например, [5], [6])

$$S_0(x), S_1(x), \ldots, S_{\min(m,n)}(x), \tag{1}$$

можно затем выписать условия, которым должны удовлетворять обнуляющие S_0 значения $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$ параметров, для того, чтобы полином НОД(u, v) для таких значений имел положительную степень t (В коэффициенты полинома НОД(u, v) могут входить $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$). Должны существовать значения $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s$ при которых коэффициент при x^t в полиноме S_t не равен 0, но для каждого $i = 0, \ldots, t-1$ при этих значениях параметров будет нулевым коэффициент при x^i в S_i (отметим, что $\deg_x S_t \le t$ во всех возможных случаях).

2. На выходе алгоритма

Выписываются все возможности, соответствующие предположениям, что для данных значений параметров какое-то число первых элементов $S_0, \ldots, S_{i-1}$ цепочки (1) имеют нулевые коэффициенты при степенях $x^0, \ldots, x^{i-1}$ соответственно. Применение алгоритма дает список пар полиномов

$$(L_i(a_1, \ldots, a_s), \;\; F_i(x, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s)), \;\; i = 0, \ldots, \min(m, n).$$

Если $L_0(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) \neq 0$, то полиномы u, v имеют лишь тривиальный делитель: $F_0 = 1$. Для $i > 0$ если $L_0(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) = \cdots = L_{i-1}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) = 0$, но $L_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s) \neq 0$, то искомый НОД — это $F_i(x, \tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_s)$.

3. Пример

Рассмотрим полиномы $u = (a+b)x^2 + ax + b$, $v = 3x^2 + 2x + 1$ от переменной x с двумя параметрами a, b. Цепочка субрезультантов: $S_0 = 2(a-2b)^2$, $S_1 = (-a+2b)x + a - 2b$, $S_2 = 3x^2 + 2x + 1$. Первая пара полиномов: $L_0 = S_0$, $F_0 = 1$. Если $a \neq 2b$, то полиномы u, v имеют лишь тривиальный общий

делитель. Вторая пара: $L_1 = -a + 2b$, $F_1 = S_1$. Для $L_0 = 0$ существует решение $a = 2b$, но при этом не выполняется $L_1 \neq 0$, т.е. не существует общего делителя u, v степени 1. Третья пара: $L_2 = 3$, $F_2 = S_2$. Для u, v существует общий делитель $3x^2 + 2x + 1$, поскольку существует решение $a = 2b$ системы $L_0 = 0$, $L_1 = 0$ и при этом выполняется $3 \neq 0$.

4. Возможное применение

Для дифференциальной системы, лорановы коэффициенты которой заданы алгоритмически, алгоритм [4] строит все лорановы решения до любой заданной степени. Используется индуцированная рекуррентная система, которой удовлетворяют последовательности коэффициентов лорановых решений исходной дифференциальной системы. При необходимости к индуцированной системе применяется алгоритм EG-исключений [3] для получения системы с невырожденной ведущей матрицей. Этот же алгоритм может быть применен в случае усеченной дифференциальной системы при использовании алгоритма вычисления наибольшего общего делителя полиномов одной переменной с несколькими параметрами.

Список литературы

[1] С.А. Абрамов, К.Ю. Квашенко, “Наибольший общий делитель полиномов, зависящих от параметра”, *Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*, 1993, № 2, 65–71.

[2] S.A. Abramov, K.Yu. Kvashenko, “On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter”, *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Association for Computing Machinery, 1993, 152–156. DOI: 10.1145/164081.164112.

[3] S. Abramov, “EG–eliminations”, *J. of Difference Equations and Applications*, 1999, № 5, 393–433. DOI: 10.1080/10236199908808199.

[4] S. Abramov, M.A. Barkatou, D.E.Khmelnov, “On full rank differential systems with power series coefficients”, *Journal of Symbolic Computation*, **68** (2015), 120–137. DOI: 10.1016/j.jsc.2014.08.010.

[5] Р. Лоос, “Обобщенные последовательности полиномиальных остатков”, *Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления*, ред. Б. Бухбергер, Дж. Коллинз и Р. Лоос, Мир, 1986, 151–177.

[6] Bhubaneswar Mishra, *Algorithmic algebra*, Springer-Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-4344-1.

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

Subresultant algorithm for the greatest common divisor of polynomials with several parameters

S. A. Abramov, A. A. Ryabenko

An algorithm is proposed that takes as input two polynomials; in addition to the primary variable ("unknown") x, these polynomials also depend on variables $a_1, \ldots, a_s$, which act as parameters that can take on various values. The study examines the greatest common divisor of the original polynomials as a function of the values assigned to these parameters.

Keywords: polynomials with parameters, subresultant chain, greatest common divisor, computer algebra.

References

[1] S.A. Abramov, K.Yu. Kvashenko, "The greatest common divisor of polynomials depending on a parameter", *Moscow University Journal. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics*, 1993, № 2, 65–71 (in Russian).

[2] S.A. Abramov, K.Yu. Kvashenko, "On the greatest common divisor of polynomials which depend on a parameter", *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Association for Computing Machinery, 1993, 152–156. DOI: 10.1145/164081.164112.

[3] S. Abramov, "EG–eliminations", *J. of Difference Equations and Applications*, 1999, № 5, 393–433. DOI: 10.1080/10236199908808199.

[4] S. Abramov, M.A. Barkatou, D.E.Khmelnov, "On full rank differential systems with power series coefficients", *Journal of Symbolic Computation*, **68** (2015), 120–137. DOI: 10.1016/j.jsc.2014.08.010.

[5] R. Loos, "Generalized polynomial remainder sequences", *Computer Algebra. Symbolic and Algebraic Computation. Computing Supplementum*, **4**, eds. B. Buchberger, G.E. Collins, R. Loos, Springer, Vienna, 1982, 115–137. DOI: 10.1007/978-3-7091-3406-1_9.

[6] Bhubaneswar Mishra, *Algorithmic algebra*, Springer-Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-1-4612-4344-1.

Received on November 10, 2026

Стандартизированный доказательный текст как объект символьных вычислений и источник спецификаций для обучения LLM

И. Б. Казаков*

Рассматривается проблема отсутствия единых стандартов логического изложения математических доказательств. На основе аналогии между математическим текстом и программным кодом, а также принципов «чистого кода» и формальной логики предлагается унифицированный стандарт написания определений, формулировок теорем и доказательств. Обсуждается возможность представления доказательного текста, построенного по предложенным правилам, в виде формального объекта — вывода в грамматике шагов; намечено, как такой объект мог бы синтезироваться символьным решателем и проверяться верификатором. Описание правил стандарта может служить структурированной спецификацией (промптом) для обучения специализированной LLM, генерирующей доказательные наброски под контролем символьной проверки.

Ключевые слова: символьные вычисления, математическая логика, структура доказательства, стандартизация, синтез доказательств, верификация, большие языковые модели, формализация.

Актуальность и цель. Сущностью математической деятельности является проведение доказательств — вывода теорем из аксиом по правилам формальной логики [1]. В программной инженерии код пишется один раз, но читается многократно, поэтому приняты жёсткие стандарты оформления («чистый код») и код-ревью [2]. В математическом сообществе подобные практики формализованы слабо: доказательства часто излагаются в свободном стиле, что затрудняет их проверку и усвоение. Цель работы — разработать унифицированный стандарт математического письма, повышающий логическую прозрачность и верифицируемость текстов, и показать, что он встраивается в парадигму символьных вычислений и может служить спецификацией для обучения специализированных LLM.

* *Казаков Илья Борисович* — к.ф.-м.н., доцент РЭУ им. Г. В. Плеханова; доцент МГТУ им. Н. Э. Баумана, e-mail: i_b_kazakov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-3506-7673.

Kazakov Ilia Borisovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Plekhanov Russian University of Economics; Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Предлагаемый стандарт. Стандарт основывается на схеме «Определение — Теорема — Доказательство» и состоит из четырёх частей.

1. *Определения.* Определение вводит новый предикат и состоит из декларации переменных («Пусть...»), названия понятия («Будем говорить, что...») и содержания понятия («...если»). На этапе декларации запрещено накладывать условия на переменные, но допускается зависимая типизация.
2. *Формулировки теорем.* Формулировка подчиняется схеме импликации: декларация переменных («Пусть...»), посылки («Если...») и вывод («То...»).
3. *Доказательства.* Доказательство организуется как иерархическая последовательность нумерованных пунктов-силлогизмов; каждый пункт содержит явные ссылки на посылки и основание вывода. Типы шагов: умозаключение (с указанием типа основания), управление кванторами («Зафиксируем...», «Расфиксируем...», «Выберем...», «Предъявим...»), конструктивные шаги («Положим...») и структурные блоки («Докажем, что...»). Подход адаптирован для доказательства от противного, разбора случаев и индукции.
4. *Связность.* Локальный уровень: определённость терминов; жизненный цикл переменных и временных гипотез (введение при открытии блока, снятие при закрытии); инкапсуляция блоков (наружу экспортируется лишь заявленный вывод — импликация или, для доказательства от противного, отрицание; внутренние пункты и гипотезы снаружи недоступны); обоснованность ссылками на пункты, находящиеся в области видимости на момент выполнения шага; завершённость доказательств. Глобальный уровень: определённость типов, неопределяемые понятия (тип «множество» и отношение принадлежности), аксиомы ZFC как первичные утверждения, запрет циклических ссылок.

Доказательный текст как синтезируемое решение задачи. Обсуждается возможность представления доказательного текста, построенного по предложенным правилам, в виде формального объекта — вывода в грамматике шагов. Линейной последовательности пунктов для такого представления недостаточно: гипотетические рассуждения — доказательство импликаций, доказательство от противного, разбор случаев — по существу требуют вложенных шагов. Блок «Докажем, что...» и есть синтаксическое средство для вложенных шагов: у блока могут быть собственные посылки (их набор может быть, в частности, пустым) и есть

заявленный вывод, а его внутренние пункты недоступны снаружи. Семантически открытию блока соответствует помещение нового контекста (его посылок и переменных) в стек, а закрытию — их снятие; блоки и стек контекстов представляют собой синтаксическую и семантическую стороны одной структуры вложенности. Блок закрывается тогда, когда внутри него доказывается утверждение, тождественное его заявленному выводу. После закрытия блока во внешний контекст экспортируется утверждение $(P_1 \wedge \cdots \wedge P_n) \to C$, где $P_1, \ldots, P_n$ — посылки блока, а C — его вывод. К примеру, для доказательства от противного создается блок с посылкой A и заявленным выводом $\bot$, который экспортирует импликацию $A \to \bot$. Из неё по пропозициональной тавтологии $(A \to \bot) \to \neg A$ в следующем пункте выводится $\neg A$. Намечено, как такой доказательный текст мог бы синтезироваться специализированным решателем и проверяться верификатором, который контролирует ссылки, области видимости переменных и тождественность полученного вывода заявленному. Полная формальная грамматика, правила вывода с условиями применимости и алгоритм верификации выходят за рамки настоящих тезисов и составляют предмет дальнейшей работы.

Пример доказательного текста (теорема Кантора): Пусть X, Y — множества. Если Y является булеаном X, то X не равномощно Y.

Доказательство.

1. Докажем противоречие в предположении, что X равномощно Y.

1.1. Так как X равномощно Y [п.1], то существует функция F из X в Y такая, что F является биекцией. Выберем такую функцию F.

1.2. Положим $D = \{x \in X \mid x \notin F(x)\}$.

1.3. Так как $D \subset X$ [п.1.2], Y — булеан X [по условию], то $D \in Y$.

1.4. Так как $D \in Y$ [п.1.3], $F : X \to Y$ является биекцией [п.1.1], то существует элемент $d \in X$ такой, что $F(d) = D$. Выберем такой элемент $d \in X$.

1.5. Докажем противоречие в предположении, что $d \in D$.

1.5.1. Так как $d \in D$ [п.1.5], $D = \{x \in X \mid x \notin F(x)\}$ [п.1.2], то $d \notin F(d)$.

1.5.2. Так как $d \notin F(d)$ [п.1.5.1], $F(d) = D$ [п.1.4], то $d \notin D$.

1.5.3. Так как $d \in D$ [п.1.5], $d \notin D$ [п.1.5.2], то получено противоречие. Пункт 1.5 доказан.

1.6. Из п.1.5 следует, что выполнено $d \notin D$.

1.7. Так как $d \notin D$ [п.1.6], $F(d) = D$ [п.1.4], то $d \notin F(d)$.

1.8. Так как $d \notin F(d)$ [п.1.7], $D = \{x \in X \mid x \notin F(x)\}$ [п.1.2], то $d \in D$.

1.9. Так как $d \in D$ [п.1.8], $d \notin D$ [п.1.6], то получено противоречие. Пункт 1 доказан.

2. Из п.1 следует, что X не равномощно Y. Теорема доказана.

Стандарт как промпт и спецификация для обучения LLM. Описание правил стандарта — шаблонные обороты, типы шагов, требования к ссылкам и области видимости переменных — образует структурированную спецификацию, пригодную как промпт для LLM, специализированной на составлении доказательств. Такая LLM генерирует не свободный текст, а доказательные наброски в терминах разрешённых шагов стандарта; корректность проверяется внешним символьным верификатором, а его замечания возвращаются модели как обратная связь. Корпус доказательств, оформленных по стандарту, может служить обучающим материалом для дообучения LLM и для генерации с ограничениями грамматики (grammar-constrained decoding). Это совмещает гибкость языковых моделей со строгостью символьной проверки.

Обсуждение и перспективы. Стандарт формулируется в общем виде и допускает применение к классическим примерам из теории множеств, математического анализа и теории чисел: он минимизирует неоднозначность интерпретации, приближает доказательство к формальному коду и облегчает автоматическую верификацию, а стандартизированный текст естественно рассматривается как объект символьных вычислений, синтезируемый решателем и проверяемый верификатором. Дальнейшее развитие связано с созданием инструментов на базе LaTeX для проверки синтаксиса стандарта, реализацией парсера и верификатора доказательных текстов, разработкой решателя, синтезирующего доказательства в терминах стандарта, и обучением LLM, генерирующих доказательные наброски под контролем символьного верификатора. Эти направления соотносятся с существующими пруф-ассистентами, прежде всего Coq [3], и дополняют их промежуточным слоем, в котором доказательство остаётся человекочитаемым, но пригодным для машинной обработки. От универсальных декларативных языков Mizar и Isabelle/Isar стандарт отличается не только тем, что не является входным языком пруф-ассистента и не требует полной формализации в фиксированной логике, но и расстановкой акцентов: в Mizar и Isar управление кванторами — одна из многих конструкций, тогда как стандарт выдвигает его на первый план, ориентируясь на определения и утверждения с чередованием кванторов, каноническим примером которых служат понятие предела и связанные с ним теоремы. Именно здесь явное управление областями видимости переменных даёт наибольший выигрыш — и для педагогических целей, и для машинной проверки.

Список литературы

[1] В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско, *Вводный курс математической логики*, Физматлит, Москва, 2004, 128 с.

[2] Р. Мартин, *Чистый код: создание, анализ и рефакторинг*, Питер, Санкт-Петербург, 2019, 464 с.

[3] C. Paulin-Mohring, "Introduction to the Coq proof-assistant for practical software verification", *Tools for Practical Software Verification*, Lecture Notes in Computer Science, **7682**, Springer, Berlin, 2012, 45–95. DOI: 10.1007/978-3-642-35746-6_3.

Статья поступила 29 октября 2026 г.

Standardized Proof Text as a Symbolic Computation Object and a Specification Source for LLM Training

I. B. Kazakov

The paper addresses the lack of unified standards for the logical presentation of mathematical proofs. Drawing an analogy between mathematical text and program code, and building on the principles of Clean Code and formal logic, we propose a unified standard for writing definitions, theorem statements, and proofs. We discuss the possibility of representing a proof text constructed according to the proposed rules as a formal object — a derivation in the grammar of steps — and outline how such an object could be synthesized by a symbolic solver and checked by a verifier. The description of the standard's rules can serve as a structured specification (a prompt) for training a specialized LLM that generates proof sketches under the control of symbolic verification.

Keywords: symbolic computation, mathematical logic, proof structure, standardization, proof synthesis, verification, large language models, formalization.

References

[1] V. A. Uspenski, N. K. Vereshchagin & V. E. Plisko, *Vvodnyj kurs matematicheskoj logiki [An introductory course in mathematical logic]*, FIZMATLIT, Moscow, Russia, 2004 (in Russian), 128 pp.

[2] R. Martin, *Chistyj kod: sozdanie, analiz i refaktoring [Clean Code: A Handbook of Agile Software Craftsmanship]*, Piter, Saint Petersburg, Russia, 2019 (in Russian), 464 pp.

[3] C. Paulin-Mohring, "Introduction to the Coq proof-assistant for practical software verification", *Tools for Practical Software Verification*, Lecture Notes in Computer Science, **7682**, Springer, Berlin, 2012, 45–95. DOI: 10.1007/978-3-642-35746-6_3.

Received on October 29, 2026

Детерминированное приведение операторных матриц к слабой форме Попова

А. В. Носов*

Для матриц дифференциальных операторов первого порядка с невырожденной ведущей матрицей предложен детерминированный алгоритм dWPF, строящий слабую форму Попова с наименьшей среди результатов WPF суммарной степенью коэффициентов. Оптимум в одном столбце дает минимальное остовное дерево, столбцы согласуются перебором с отсечением. Дано сравнение с реализациями алгоритма WPF в SageMath и AbstractAlgebra.jl.

Ключевые слова: символьные вычисления, операторные матрицы, слабая форма Попова, рост коэффициентов.

1. Введение

Классический алгоритм WPF [1, 2] приводит операторную матрицу к слабой форме Попова элементарными операциями над строками. Он недетерминирован: выбор столбца, пары строк и заменяемой строки произволен, а результаты разных сценариев существенно различаются суммарной степенью коэффициентов [3]. Предложенный алгоритм dWPF строит однозначно определенный результат WPF с наименьшей такой степенью.

2. Постановка задачи

Рассматривается система $A_1y' + A_0y = 0$, где $A_1, A_0 \in \mathbb{Q}[x]^{m\times m}$ и $\det A_1 \neq 0$. Ей отвечает операторная матрица первого порядка $L = A_1\partial + A_0 \in \mathbb{Q}[x][\partial]^{m\times m}$ ($\partial = d/dx$) с элементами $l_{ij} = a_{ij}\partial + b_{ij}$. Так как $\det A_1 \neq 0$, в каждой строке есть элемент с $a_{ij} \neq 0$, и *опорный индекс* строки определяется как $I_i = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$. Матрица находится в *слабой форме Попова*, если опорные индексы ее строк попарно различны.

* *Носов Анатолий Владимирович* — аспирант каф. алгоритмических языков факультета ВМК МГУ, e-mail: t.nosv2016@yandex.ru.

Nosov Anatoly Vladimirovich — PhD student, Department of Algorithmic Languages, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Если $I_i = I_j = p$ (*конфликт* в столбце p), то редукция строки i с помощью строки j ($i \leftarrow j$) выполняется как

$$L_{i,*}^{\text{new}} = \frac{\lambda}{a_{ip}} L_{i,*} - \frac{\lambda}{a_{jp}} L_{j,*}, \qquad \lambda = \operatorname{lcm}(a_{ip}, a_{jp}), \tag{1}$$

с последующим сокращением строки на НОД и нормированием (целые взаимно простые коэффициенты, старший коэффициент при ∂ в опорном столбце положителен). При этом коэффициент при ∂ в столбце p обращается в нуль, и опорный индекс строки i растет. Для строки $u = (a_1\partial + b_1, \ldots, a_m\partial + b_m)$ величина $\operatorname{totdeg} u$ — сумма степеней всех ее ненулевых многочленов a_j, b_j. *Стоимость* матрицы определяется как $c(M) = \sum_i \operatorname{totdeg} M_{i,*}$. Через $\mathcal{W}(L)$ обозначим множество результатов алгоритма WPF для L. Задача — детерминированно найти $W \in \mathcal{W}(L)$ с минимальной стоимостью $c(W)$.

Неоднозначность алгоритма WPF проявляется, например, при обработке матрицы $\begin{bmatrix} (x+1)\partial - x & (2x+1)\partial + x \\ \partial - 1 & -2 \end{bmatrix}$: одной редукции достаточно, но замена первой строки дает результат стоимости 2, а второй — 6.

3. Алгоритм dWPF

В алгоритме dWPF объединены три идеи. Во-первых, *дисциплина крайнего левого столбца*: редукция выполняется только в самом левом столбце $p^*(M)$ с конфликтом, и ни одна матрица из $\mathcal{W}(L)$ при этом не теряется. Строки с $I_i < p^*(M)$ больше не меняются, что дает монотонную нижнюю границу стоимости $h(M) = \sum_{i:\, I_i < p^*(M)} \operatorname{totdeg} M_{i,*}$.

Во-вторых, выбор среди t строк $r_1, \ldots, r_t$ с опорным индексом p сводится к задаче на полном графе G_t, где вес ребра $\{i, j\}$ равен totdeg строки, полученной редукцией r_i с помощью r_j по формуле (1). Разрешение конфликта соответствует корневому дереву графа: корень — строка, сохраняющая опорный индекс p, остальные строки редуцируются с помощью родителя. Наименьший суммарный totdeg строк после разрешения конфликта равен $\operatorname{MST}(G_t, w) + \min_{v_0} \operatorname{totdeg} r_{v_0}$, где MST — вес минимального остовного дерева.

В-третьих, оптимум для одного столбца не гарантирует глобального, так как отредуцированная строка может затем участвовать в конфликте в одном из следующих столбцов. Например, для матрицы L_{ex} со строками $(\partial, \partial, 0, \partial)$, $(\partial, (x-1)\partial, 0, 0)$, $(\partial, x+1, \partial, 0)$, $(0, (x-1)\partial, 0, 2)$ минимальное остовное дерево в столбце 1 (вес 2 против 3 у другого дерева) приводит к итоговой стоимости 7 вместо 4. Поэтому алгоритм перебирает с возвра-

том все корневые деревья, храня наименьшую найденную стоимость c^*, и отсекает ветвь с промежуточной матрицей N, если $h(N) > c^*$.

При равных стоимостях выбирается *каноническая* матрица с лексикографически наименьшим (порядок $\prec$) кодом $\kappa(M)$ из степеней и коэффициентов элементов по строкам.

Теорема 1. *Матрица W, возвращаемая алгоритмом dWPF, 1) принадлежит $\mathcal{W}(L)$; в частности, находится в слабой форме Попова и $W = UL$, где $U \in \mathbb{Q}(x)^{m\times m}$, $\det U \neq 0$; 2) имеет минимальную стоимость среди матриц из $\mathcal{W}(L)$; 3) канонична относительно порядка $\prec$ среди матриц минимальной стоимости и потому однозначно определяется входом.*

4. Реализация и сравнение

Алгоритм реализован в пакете `dwpf` для SageMath 10.9. При $\det A_1 \neq 0$ множители редукций лежат в $\mathbb{Q}(x)$, и к L как к полиномиальной матрице над $\mathbb{Q}(x)[\partial]$ применимы реализации WPF `weak_popov_form` из SageMath и `weak_popov` из AbstractAlgebra.jl [4] (в них опорная позиция крайняя правая, поэтому порядок столбцов обращается, а результат нормируется). Ниже $\bar{c}$ — средняя стоимость на 100 случайных матрицах при $m = 3$ и 4, q — доля матриц, где у dWPF она меньше:

Реализация	$\bar{c}$, $m=3$	q	$\bar{c}$, $m=4$	q
dWPF	9,01	—	18,33	—
SageMath	10,14	51 %	21,01	64 %
AbstractAlgebra.jl	10,08	47 %	20,25	58 %

По времени dWPF уступает: 0,25 и 4,84 с на набор при $m = 3$ и 4 против не более 0,13 с. Отсечение по h (400 матриц, $m = 3$) сократило число раскрытых состояний на 19,5 %, не изменив ответов.

5. Заключение

Открытыми остаются случай $\det A_1 = 0$ и согласование столбцов без перебора.

Список литературы

[1] T. Mulders, A. Storjohann, “On lattice reduction for polynomial matrices”, *Journal of Symbolic Computation*, **35**:4 (2003), 377–401. DOI: 10.1016/S0747-7171(02)00139-6.

[2] B. Beckermann, H. Cheng, G. Labahn, "Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials", *Journal of Symbolic Computation*, **41**:5 (2006), 513–543. DOI: 10.1016/j.jsc.2005.10.002.

[3] А. В. Носов, А. А. Панфёров, "Эвристический алгоритм приведения операторных матриц по строкам", *Ломоносовские чтения. Научная конференция: тезисы докладов*, МАКС Пресс, М., 2025, 182–184.

[4] C. Fieker, W. Hart, T. Hofmann, F. Johansson, "Nemo/Hecke: Computer algebra and number theory packages for the Julia programming language", *Proc. 2017 ACM Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC'17)*, ACM, New York, 2017, 157–164. DOI: 10.1145/3087604.3087611.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Deterministic computation of the weak Popov form of an operator matrix

A. V. Nosov

For first-order differential operator matrices with a nonsingular leading matrix, a deterministic algorithm dWPF is proposed that constructs a weak Popov form of minimum total coefficient degree among the results of WPF. The optimum for one column is given by a minimum spanning tree; columns are coordinated by branch and bound. The results are compared with WPF implementations in SageMath and AbstractAlgebra.jl.

Keywords: symbolic computation, operator matrices, weak Popov form, coefficient growth.

References

[1] T. Mulders, A. Storjohann, "On lattice reduction for polynomial matrices", *Journal of Symbolic Computation*, **35**:4 (2003), 377–401. DOI: 10.1016/S0747-7171(02)00139-6.

[2] B. Beckermann, H. Cheng, G. Labahn, "Fraction-free row reduction of matrices of Ore polynomials", *Journal of Symbolic Computation*, **41**:5 (2006), 513–543. DOI: 10.1016/j.jsc.2005.10.002.

[3] A. V. Nosov, A. A. Panferov, "Evristicheskii algoritm privedeniya operatornykh matrits po strokam", *Lomonosovskie chteniya. Nauchnaya konferentsiya: tezisy dokladov*, MAKS Press, Moscow, 2025, 182–184 (in Russian).

[4] C. Fieker, W. Hart, T. Hofmann, F. Johansson, "Nemo/Hecke: Computer algebra and number theory packages for the Julia programming language", *Proc. 2017 ACM Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC'17)*, ACM, New York, 2017, 157–164. DOI: 10.1145/3087604.3087611.

Received on November 9, 2026

От тритов к битам в солвере z3: ускорение трипликации сильных стартеров

О. С. Оганджанянц*, С. Ю. Садов‡

Для построения сильных стартеров в циклических группах $\mathbb{Z}_{3m}$ методом трипликации с использованием SAT/SMT солвера z3 ранее использовалась система условий с неизвестными из множества $\{0,1,2\}$. Эмуляция её системой с булевыми неизвестными привела к повышению производительности на несколько порядков.

Ключевые слова: сильный стартер, трипликация, солвер z3.

1. Сильные стартеры и метод трипликации

Сильный стартер в циклической группе $\mathbb{Z}_n$, $n = 2q+1$, — это разбиение множества $\{1,\dots,n-1\}$ на q пар $\{x_i, y_i\}$, такое, что все разности $\pm(x_i - y_i)$ по модулю n различны и не равны 0 и то же верно для сумм $x_i + y_i$. Например, $\{\{2,3\},\{4,6\},\{5,1\}\}$ — сильный стартер в $\mathbb{Z}_7$.

Приведем новую интерпретацию сильных стартеров как **расстановок неатакующих ферзей** на шахматной доске специального вида.

Горизонтали доски — окружности $C_j = \{|z| = \cos\frac{j\pi}{n}\}$ на комплексной плоскости ($j = 0,\dots,q$). Для $0 \le k \le n-1$, *вертикаль* V_k — диаметр окружности C_0, проходящий через корень из единицы $\omega^k = e^{2\pi ik/n}$, а *диагональ* D_k — окружность радиуса $1/2$, касающаяся C_0 внутренним образом в точке ω^k. Точка 0 исключается из V_k и D_k. Точки $Q_{k,\ell} = D_k \cap D_\ell$ ($k \ne \ell$) назовем *внутренними*, а $Q_{k,k} = \omega^k$ — *внешними полями* доски. Имеем $Q_{k,\ell} \in V_s \cap C_d$, где $d = \min\{|k-\ell|, n-|k-\ell|\}$, $2s \equiv k+\ell \pmod n$. *Ферзь* атакует поля на своей горизонтали, вертикали и диагоналях.

Предложение. *Разбиение $\{(x_j, y_j)\}_{j=1,\dots,q}$ множества $\{1,\dots,n-1\}$ является сильным стартером тогда и только тогда, когда ферзи, расположенные на полях Q_{x_j,y_j} и на $Q_{0,0}$, не атакуют друг друга* (рис. 1).

При этом, если внутренние ферзи имеют массу 2, а внешний — массу 1, то центр масс системы $q+1$ ферзей находится в центре доски.

* *Оганджанянц Олег Сергеевич* — Ph.D., ст. преподаватель, С.-Петербургский Педагогический ун-т им. А.И. Герцена, e-mail: oo4706@mun.ca, ORCID: 0000-0001-8476-9113.

Ogandzhanyants Oleg Sergeevich — Ph.D., Senior Lecturer, S.-Petersburg Herzen Pedagogical University.

‡ *Садов Сергей Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, частный преподаватель, г. Москва, e-mail: serge.sadov@gmail.com, ORCID: 0000-0002-9069-6894.

Sadov Sergey Yurievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Private tutor, Moscow.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

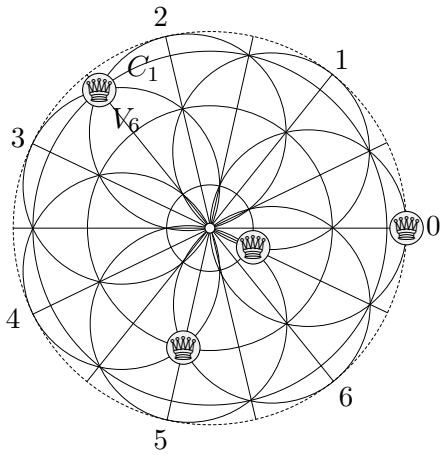


Рис. 1: Расстановка ферзей на полях $Q_{0,0}, Q_{2,3}, Q_{4,6}, Q_{5,1}$, соответствующая сильному стартеру $\{(2,3),(4,6),(5,1)\}$ в $\mathbb{Z}_7$

Эксперты уверены, что сильные стартеры существуют в $\mathbb{Z}_n$ при $n = 7$ и всех нечетных $n \geq 11$, но это доказано лишь для n, не кратных 3.

Метод трипликации для построения сильных стартеров в циклических группах порядка $3m$ предложен в [1] и развит в [2],[3]. В простейшем случае $m \not\vdots 3$ строятся две таблицы одинаковой структуры — Σ_m с элементами из $\mathbb{Z}_m$ и Σ_3 с элементами из $\mathbb{Z}_3$. По китайской теореме об остатках из них строится сильный стартер в $\mathbb{Z}_{3m}$ в форме таблицы Σ_{3m}.

Таблица Σ_m формируется из пар выбранного сильного стартера в $\mathbb{Z}_m$ с использованием параметра — ключа трипликации t. Пара в неполной строке имеет вид (t, t). Каждая полная строка содержит пару (x, y) исходного стартера и пары $(x + t, y + t)$ и $(t - y, t - x)$, см. Табл. 1.

Заполнение таблицы Σ_3 сводится к системе линейных неравенств по модулю 3. В примерах, рассмотренных в [1], эта задача, названная *модульным Судоку*, решалась вручную, а в [2],[3] использовался солвер z3 [4]. Условия модульного Судоку формулировались в терминах целочисленной арифметики. Здесь мы изучаем эффект перевода условий на булев язык.

Σ_7

	4, 4	
2, 3	6, 0	1, 2
4, 6	1, 3	5, 0
5, 1	2, 5	3, 6

$+$

Σ_3

	2, 0	
0, 2	1, 2	2, 2
1, 2	0, 0	2, 1
0, 1	1, 1	1, 0

$\Rightarrow$

Σ_{21}

	11, 18	
9, 17	13, 14	8, 2
4, 20	15, 3	5, 7
12, 1	16, 19	10, 6

Таблица 1: Трипликация сильного стартера, как на рис. 1; ключ $t = 4$

2. Булева эмуляция троичной задачи и её эффект

Для перевода условий с неизвестными из области $T = \mathbb{Z}_3$ в систему с неизвестными из области $B = \{\texttt{True}, \texttt{False}\}$ использована кодировка: $0 \to 00$, $1 \to 01$, $2 \to 10$. Каждой неизвестной x из T ставим в соответствие две неизвестных x_1, x_2 из B, добавляя условие $\neg(x_1 \wedge x_2)$ (код 11 запрещен).

Все условия в формулировке задачи для z3 выражаются через арифметические операции $+, -\pmod 3$ и тернарный предикат `Distinct(x,y,z)`, то есть условие $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$. Приведем короткие выражения для эмулирующих операторов в функциональном базисе $\{\wedge, =\}$.

Операция	формула над T	формула над B
Сложение	$z = x + y \pmod 3$	$z_1 = (x_2 = y_2) \wedge ((x_1 = x_2) = y_1)$ $z_2 = (x_1 = y_1) \wedge ((y_1 = y_2) = x_2)$
Вычитание	$z = x - y \pmod 3$	$z_1 = (x_2 = y_1) \wedge ((x_1 = x_2) = y_2)$ $z_2 = (x_1 = y_2) \wedge ((x_1 = x_2) = y_1)$
Различие	$\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$	$(x_1 = (y_1 = z_1)) \wedge (x_2 = (y_2 = z_2))$

Эмулирующие вставки непосредственно внедрены в опубликованную программу-трипликатор на Python [3, Appendix 3] без прочих изменений.

Результаты численного эксперимента

Использовался тот же компьютер, что и в работе [2]: fanless mini PC, процессор 11th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1165G7 2.80GHz, 32 GB, ОС Windows 11, солвер z3py версии 5.3.3. Базовые стартеры трипликации предварительно сгенерированы методом hill-climbing with restarts.

Для базовых стартеров порядков $m \leq 599$ результаты показаны на рис. 2. Трипликация выполнялась при всех $(m-1)/2$ допустимых (см. [2]) значениях ключа t и вычислялось среднее время, как в [2, §8.4].

По сравнению с прежней версией время решения одного Судоку снизилось примерно в 10^2–10^4 раз. Например, $m = 19$: 1.4/0.07 сек; $m = 97$: 90/0.3 сек; $m = 251$: 2750/0.83 сек; $m = 499$: 17962/1.4 сек. Вычисления в [2] доведены до $m_{\max} = 499$; новая текущая граница: $m_{\max} = 8001$.

Отметим сильную зависимость времени решения от внешних по отношению к солверу факторов: загрузки процессора, ресурса памяти, авторегулировки тактовой частоты. Нерегулярность и немонотонность по порядку заметнее при больших порядках. Вот данные (порядок/время в сек.) для пяти испробованных порядков между 6000 и 7000 (ключ выбирался случайно): 6001/17170, 6201/2439, 6401/919, 6601/1244, 6801/672.

Вычисления в новой версии подтверждают тезис (не формализованный) [2, p. 332] о низкой асимптотической сложности задачи трипликации.

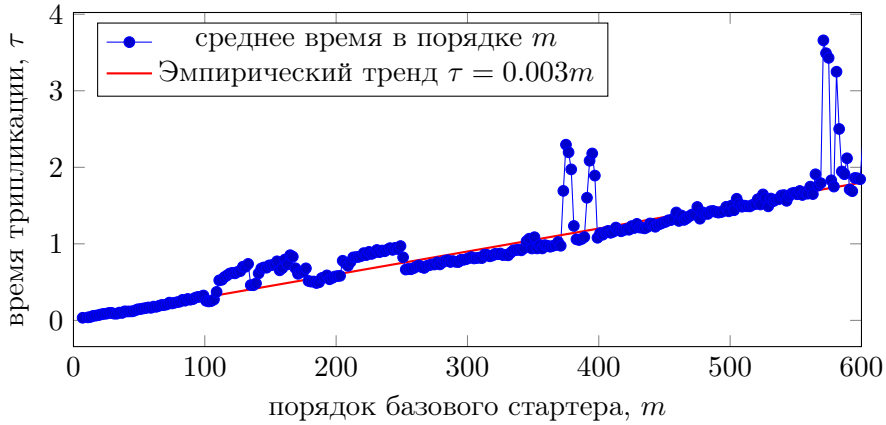


Рис. 2: Среднее время решения (сек.) для порядков $m < 600$

Список литературы

[1] O. Ogandzhanyants, *New constructions of strong and Skolem starters*, PhD thesis, Memorial University of Newfoundland, St. John's, 2025, 145 pp.

[2] O. Ogandzhanyants, S. Sadov, M. Kondratieva, "Constructing strong starters of orders $3p$: triplication with SAT solver", *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **126** (2025), 317–338. DOI: 10.61091/jcmcc126-23.

[3] O. Ogandzhanyants, S. Sadov, M. Kondratieva, "The triplication method for constructing strong starters", *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **131** (2026), 115–160. DOI: 10.61091/jcmcc131-08.

[4] Microsoft Corp., *z3 Official Guide*, https://microsoft.github.io/z3guide/docs.

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

From trits to bits in z3 solver: a high-performance triplication of strong starters

O. S. Ogandzhanyants, S. Y. Sadov

The triplication method for constructing strong starters in cyclic groups $\mathbb{Z}_{3m}$ was earlier implemented with SAT/SMT solver z3 using constraints for unknowns with values in $\{0, 1, 2\}$. Emulation by Boolean constraints boosted performance by several orders of magnitude.

Keywords: strong starter, triplication, SAT solver z3.

Received on November 10, 2026

Часть 8
Интеллектуальные системы в естественных науках

AI-Driven Analysis of Stochastic Longitudinal Vibrations in a Viscoelastic Cable with Moving Boundaries

V. L. Litvinov*, K. V. Litvinova‡

The study addresses the modeling and analysis of resonance characteristics in mechanical systems with moving boundaries. The focus is on the use of artificial intelligence (AI), specifically the hybrid neural network ResonanceNet (CNN + LSTM), to predict resonant frequencies, amplitudes, and prevent resonance. The computational method for solving integro-differential equations developed by the authors is applied. The problem is formulated as a boundary value problem for a partial differential equation with a moving boundary and reduced to a system of stochastic differential equations. The neural network is used offline for fast estimation; if confidence is low, a classical numerical module is activated. Comparative analysis showed that the hybrid approach reduces prediction error to 2.1% and prevents resonance in 96% of cases, which is 34% more accurate and 5 times faster than classical methods.

Keywords: viscoelasticity, moving boundaries, stochastic vibrations, resonance, artificial intelligence, neural networks, Monte Carlo method, TB-ANALYSIS 7 package.

1. Introduction

Systems with moving boundaries are widespread in technology (ropes of hoisting installations [1–4], flexible transmission links, etc.). The presence of moving boundaries causes significant difficulties in describing such systems. Exact solution methods are limited by the wave equation and relatively simple boundary conditions [6]. Of the approximate methods, the most effective is the method for constructing solutions of integro-differential equations described in [5, 8], as well as the Kantorovich–Galerkin method [7, 10].

The solution is implemented in dimensionless variables using the TB-ANALYSIS 7 software package [11] developed in the MATLAB environment. The package contains a module — resonance phenomena management

Litvinov Vladislav Lvovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, e-mail: vladlitvinov@rambler.ru, ORCID: 0000-0002-6108-803X

‡*Litvinova Kristina Vladimirovna* — PhD student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru, ORCID: 0000-0002-1711-9273

Published under CC-BY 4.0

— designed to determine the resonance region and to identify resonance prevention conditions imposed on the model parameters using AI. A key feature of the package is the hybrid architecture that integrates classical numerical methods with machine learning algorithms into a single iterative workflow. Using artificial intelligence, the resonant frequencies of the system, as well as the conditions under which resonance can be prevented, were determined [9]. The hybrid neural network ResonanceNet was trained on this data, enabling it to predict dangerous resonant frequencies and propose optimal parameters. Section 3 compares its accuracy and performance with classical methods.

2. Problem Formulation and Solution Method

Consider the stochastic longitudinal vibrations of a viscoelastic cable of variable length $l_0(t) = l_0 - v_0 t$, placed on an elastic foundation, taking into account the resistance forces of the environment [8]. The differential equation describing the longitudinal vibrations is

$$\rho U_{tt} - \rho a^2 U_{xx} + \lambda U_t + \mu U_{xxt} + k_0 U = 0, \tag{1}$$

where $U(x,t)$ is the longitudinal displacement, ρ is the linear mass density, $a = \sqrt{T/\rho}$ is the longitudinal wave velocity, T is the tension, μ is the viscoelasticity parameter, λ is the medium resistance, and k_0 is the foundation stiffness.

The boundary conditions on the moving boundary are

$$U(0,t) = 0, \qquad U(l_0(t),t) = B\cos W_0(\omega_0 t). \tag{2}$$

Stochasticity is introduced through random initial conditions and random parameters (stiffness, damping, boundary velocity). After passing to dimensionless variables and applying the Kantorovich–Galerkin procedure [7, 8], problem (1)–(2) reduces to the system of stochastic differential equations

$$\mu_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{0n}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau}\cos W(\tau). \tag{3}$$

For predicting the resonance characteristics, a specialized hybrid architecture, ResonanceNet (Multimodal Multi-task Resonance Prediction Network), was developed. Its input layer accepts a normalized multidimensional feature vector X, including static system parameters (k, c, V_0), dynamic features obtained via a brief preliminary calculation (amplitude values, the first N FFT harmonics), and external stimulus parameters. The network architecture includes: (1) a convolutional block (2 layers of 1D convolutions, 32 and 64

kernels, ReLU) for extracting local patterns; (2) a bidirectional LSTM layer (64 neurons) for capturing long-term dependencies; (3) an attention block for weighting important time intervals; and (4) multi-task output layers (two fully connected layers of 128 and 64 neurons) branching into three outputs: f_{res} (resonant frequency), $A_{\max}$ (amplitude), and R_{risk} (risk category).

A training set of $50,000$ examples was generated using the numerical simulation modules of TB-ANALYSIS 7. The split was 70/15/15%. Training used the Adam optimizer (initial learning rate 10^{-3}, 10-fold decrease on plateau) with dropout (0.3) and early stopping (patience=20). The network does not replace but complements classical methods: if the prediction variance (estimated via Monte Carlo dropout) exceeds a threshold, the advanced classical numerical module is automatically activated.

For real-time tuning, the control actions are the increments of stiffness and damping of the dominant modes. The measured quantities are the current amplitude and frequency extracted by FFT. The adaptation law is a classical model-reference scheme: the action is corrected in proportion to the deviation of the measured amplitude from its reference value. The neural network is used only at the tuning stage (reference amplitude and initial gains) and is not part of the real-time loop.

The software package implements a step-by-step error estimation algorithm. The error in calculating the square of the amplitude is $R = 2E_n^2(\tau_2)R_{\text{int}}[R_{\text{int}} + I_1 + I_2]$, where R_{int} is the integration error, controlled by the MATLAB `quad` function.

3. Results

To quantitatively evaluate the advantages of the hybrid approach, comparative testing was conducted on 1,000 test cases covering a wide range of system parameters. For each case, calculations were performed using three methods: (1) the classical asymptotic method (AM); (2) the classical approximate method for solving integro-differential equations (IDE); and (3) the hybrid method (HM) using ResonanceNet. The comparison criteria were the relative error in determining the resonant frequency $\Delta = |f_{\text{pred}} - f_{\text{ref}}|/f_{\text{ref}}$, the computational time T, and the resonance prevention success rate.

The analysis of the averaged results showed that the hybrid method achieves the lowest average error of 2.1%, compared to 4.8% for the asymptotic method and 3.2% for the IDE method. In terms of computational time, the hybrid approach requires an average of 1.8 s, which is significantly faster than 12.5 s and 8.7 s, respectively. The resonance prevention success rate reaches 96% for the hybrid method, outperforming the classical approaches (85% and

88%). Thus, the hybrid method demonstrates a 34% improvement in accuracy over the best classical method (IDE), while being on average 4.8 times faster than the IDE method and 6.9 times faster than the asymptotic method.

4. Conclusion

The study resulted in the development and validation of the TB-ANALYSIS 7 software package for mathematical modeling and analysis of resonance characteristics in mechanical systems with moving boundaries. The scientific novelty lies in the creation of a hybrid approach combining classical numerical methods with artificial intelligence. The proposed ResonanceNet network demonstrated high accuracy in predicting resonant frequencies and vibration amplitudes. Testing confirmed that the hybrid approach provides a 34% improvement in prediction accuracy compared to the best classical method while accelerating calculations by an average of 5 times. Prospects for further development involve expanding the functionality of the system and adapting the proposed methods to solve more complex classes of boundary value problems.

References

[1] L. B. Kolosov, T. I. Zhigula, "Longitudinal-transverse vibrations of the rope of the lifting installation", *Izv. Universities. Mining Journal*, 1981, № 3, 83–86 (in Russian).

[2] W. D. Zhu, Y. Chen, "Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control", *J. Vibr. Acoust.*, 2006, № 1, 66–78. DOI: 10.1115/1.2128640.

[3] L. Wang, Y. Zhao, "Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations", *J. Sound Vib.*, **319**:1–2 (2009), 1–14. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.08.020.

[4] Y. Zhao, L. Wang, "On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to-one internal resonance", *J. Sound Vib.*, **294**:4–5 (2006), 1073–1093. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.01.004.

[5] O. A. Goroshko, G. N. Savin, *Introduction to the Mechanics of Deformable One-Dimensional Bodies of Variable Length*, Nauk. dumka, Kiev, 1971 (in Russian), 290 pp.

[6] V. L. Litvinov, V. N. Anisimov, *Mathematical Modeling and Research of Oscillations of One-Dimensional Mechanical Systems with Moving Boundaries: monograph*, Samara State Technical Univ., Samara, 2017 (in Russian), 149 pp.

[7] V. L. Litvinov, V. N. Anisimov, "Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries", *Bull. Russ. Acad. Sci. Rigid Body Mech.*, 2018, № 2, 70–77 (in Russian. DOI: 10.3103/s0025654418020085).

[8] V. L. Litvinov, K. V. Litvinova, "An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro-differential equations", *Comput. Math. Math. Phys.*, **62**:6 (2022), 945–954 (in Russian. DOI: 10.1134/S0965542522060112).

[9] V. L. Litvinov, K. V. Litvinova, "On one inverse method for solving problems of oscillations of mechanical systems with moving boundaries", *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2024, № 3, 53–59 (in Russian. DOI: 10.3103/S0027133024700122).

[10] V. L. Litvinov, K. V. Litvinova, "Application of the Kantorovich–Galerkin method for analyzing the resonance characteristics of systems with damping", *Theor. Math. Phys.*, **224**:1 (2025), 129–138 (in Russian. DOI: 10.1134/S0040577925070098).

[11] V. L. Litvinov, *Certificate of State Registration of a Computer Program No. 2025613649*, 2025.

Received on October 3, 2026

Внутрикортикальная возбудимость как управляющий сигнал нейроинтерфейса

А. Н. Васильев*, Ю. Г. Шевцова‡, А. Я. Каплан§

Разработан интерфейс мозг–компьютер (ИМК), использующий новый для ИМК тип маркеров — показатели внутрикортикальной возбудимости моторной коры. Эти показатели определяют по транскраниальным вызванным потенциалам (ТВП), регистрируемым при подпороговой транскраниальной магнитной стимуляции. У 18 испытуемых точность распознавания мысленного представления движения по ТВП в режиме реального времени составила $77{,}4 \pm 12{,}5\,\%$ и не коррелировала с точностью ИМК на основе мю-ритма. Информативным признаком служило ослабление компонента N100 при мысленном представлении движения. Гибридный ИМК (ТВП и мю-ритм) обеспечил точность $83{,}6 \pm 8{,}6\,\%$.

Ключевые слова: нейроинтерфейс, транскраниальные вызванные потенциалы, внутрикортикальная возбудимость, представление движения, мю-ритм.

Введение. В интерфейсах мозг–компьютер (ИМК), основанных на мысленном представлении движения, признаком служит десинхронизация сенсомоторного мю-ритма; такие ИМК применяются в нейрореабилитации для идеомоторного тренинга [1]. Однако мю-ритм является неспецифическим показателем соматосенсорного внимания [2] и не характеризует возбудимость моторной коры, поэтому при тренинге подкрепляется десинхронизация мю-ритма, а не изменение корковой возбудимости. Внутрикортикальную возбудимость и распространение возбуждения между корковыми структурами отражают ответы ЭЭГ на импульсы транскраниальной магнитной стимуляции (ТМС) — транскраниальные вызванные

* *Васильев Анатолий Николаевич* — канд. биол. наук, ст. науч. сотр., МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: a.n.vasilev.home@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1573-0730.

Vasilyev Anatoly Nikolaevich — Cand. Sci. (Biol.), Senior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

‡ *Шевцова Юлия Геннадьевна* — аспирант, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: shevtsova.jg@gmail.com, ORCID: 0009-0003-8508-0280.

Shevtsova Yulia Gennadievna — PhD Student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

§ *Каплан Александр Яковлевич* — д-р биол. наук, профессор, зав. лабораторией, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: akaplan@mail.ru, ORCID: 0000-0002-3912-4639.

Kaplan Alexander Yakovlevich — Dr. Sci. (Biol.), Professor, Head of Laboratory, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

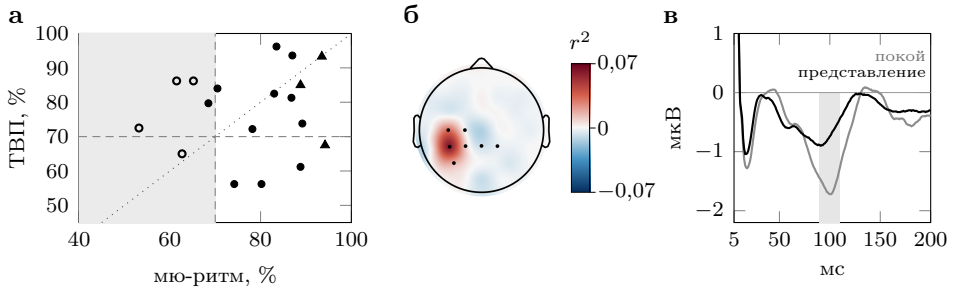


Рис. 1: (а) Точность ИМК на основе ТВП и мю-ритма. Закрашенными маркерами обозначены испытуемые с точностью распознавания по мю-ритму выше случайного уровня; треугольниками — испытуемые с ВМО. (б) Различие признаков в интервале 90–110 мс между представлением движения и покоем (r^2 со знаком), среднее по испытуемым; точки — электроды классификатора. (в) ТВП в отведении CP3 при представлении движения и в покое, усреднённые по испытуемым; выделен компонент N100.

потенциалы (ТВП; в данном случае — ТМС-вызванные потенциалы) [3], которые изменяются при подготовке движения [4]. Цель работы — оценить возможность использования ТВП при подпороговой ТМС моторной коры в качестве признаков ИМК.

Методы. В исследовании участвовали 18 здоровых добровольцев (9 мужчин и 9 женщин, 18–34 года). Каждая серия включала 40 шестисекундных проб, во время которых испытуемые по инструкции мысленно представляли движение правой кисти либо находились в покое. В трёх сериях проводили непрерывную навигационную ТМС левой моторной коры с межимпульсным интервалом 1,3–1,5 с и интенсивностью ниже моторного порога (медиана 45 % максимального выхода стимулятора) и регистрировали 64-канальную ЭЭГ и ЭМГ мышц правой кисти. Признаками служили амплитуды ТВП в интервале 20–150 мс на электродах над левой сенсомоторной корой. Классификатор на основе линейного дискриминантного анализа обучали на данных первой серии. В последующих сериях его переобучали после каждых 10 новых ответов, причём каждый ответ сначала классифицировали и лишь затем включали в обучающую выборку. Для сравнения точность ИМК на основе мю-ритма оценивали в отдельной серии без ТМС. В гибридном ИМК объединяли решения двух классификаторов: один использовал ТВП, другой — мю-ритм, зарегистрированный в межимпульсных интервалах тех же проб.

Результаты. Точность ИМК на основе ТВП в режиме реального времени (доля правильно распознанных проб) составила $77{,}4 \pm 12{,}5\,\%$ и превышала случайный уровень ($50\,\%$) у 16 из 18 испытуемых ($p < 0{,}05$). Информативные признаки соответствовали компоненту N100 над левой сенсомоторной корой (рис. 1б, в): при мысленном представлении движения выраженность этого компонента уменьшалась (критерий Уилкоксона, $p = 0{,}001$), что согласуется с ослаблением N100 при подготовке движения, связанным с повышением возбудимости моторной коры [4]. При контрольной стимуляции других областей (вертекса и задней теменной коры) различий между представлением движения и покоем не наблюдалось. Исключение трёх испытуемых с вызванными моторными ответами (ВМО; треугольники на рис. 1а) не изменило результата ($76{,}5 \pm 12{,}6\,\%$).

Точность ИМК на основе мю-ритма ($78{,}3 \pm 12{,}2\,\%$) не коррелировала с точностью ИМК на основе ТВП ($\rho = 0{,}09$; рис. 1а). Высокая точность распознавания по ТВП достигалась в том числе у испытуемых, для которых ИМК на основе мю-ритма был неэффективен (точность ниже $70\,\%$ [5]). Объединение решений двух классификаторов в тех же пробах (гибридный ИМК) обеспечило точность $83{,}6 \pm 8{,}6\,\%$.

Заключение. Таким образом, ТВП при подпороговой ТМС позволяют распознавать мысленное представление движения независимо от мышечных ответов и использовать показатели внутрикортикальной возбудимости моторной коры в качестве управляющего сигнала ИМК. В перспективе такой подход позволит сделать корковую возбудимость непосредственной мишенью нейрообратной связи при идеомоторном тренинге.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова № 121032300070-1.

Список литературы

[1] R. Mane, T. Chouhan, C. Guan, “BCI for stroke rehabilitation: motor and beyond”, *Journal of Neural Engineering*, **17**:4 (2020), 041001. DOI: 10.1088/1741-2552/aba162.

[2] K. L. Anderson, M. Ding, “Attentional modulation of the somatosensory mu rhythm”, *Neuroscience*, **180** (2011), 165–180. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2011.02.004.

[3] N. C. Rogasch, P. B. Fitzgerald, “Assessing cortical network properties using TMS–EEG”, *Human Brain Mapping*, **34**:7 (2013), 1652–1669. DOI: 10.1002/hbm.22016.

[4] V. V. Nikulin, D. Kičić, S. Kähkönen, R. J. Ilmoniemi, “Modulation of electroencephalographic responses to transcranial magnetic stimulation: evidence for changes in cortical excitability related to movement”, *European Journal of Neuroscience*, **18**:5 (2003), 1206–1212. DOI: 10.1046/j.1460-9568.2003.02858.x.

[5] C. Vidaurre, B. Blankertz, “Towards a cure for BCI illiteracy”, *Brain Topography*, **23**:2 (2010), 194–198. DOI: 10.1007/s10548-009-0121-6.

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Intracortical excitability as a brain–computer interface control signal

A. N. Vasilyev, Y. G. Shevtsova, A. Y. Kaplan

We developed a brain–computer interface (BCI) that uses a class of markers new to BCIs: indices of intracortical excitability. These indices are derived from transcranial evoked potentials (TEPs) elicited by subthreshold transcranial magnetic stimulation of the motor cortex. In 18 participants, online accuracy for distinguishing motor imagery from rest using TEPs reached $77.4 \pm 12.5\,\%$ and did not correlate with mu-rhythm BCI accuracy. The discriminative feature was attenuation of the N100 component during motor imagery. Combining TEP and mu-rhythm classifiers in a hybrid BCI yielded an accuracy of $83.6 \pm 8.6\,\%$.

Keywords: brain–computer interface, transcranial evoked potentials, intracortical excitability, motor imagery, mu rhythm.

References

[1] R. Mane, T. Chouhan, C. Guan, “BCI for stroke rehabilitation: motor and beyond”, *Journal of Neural Engineering*, **17**:4 (2020), 041001. DOI: 10.1088/1741-2552/aba162.

[2] K. L. Anderson, M. Ding, “Attentional modulation of the somatosensory mu rhythm”, *Neuroscience*, **180** (2011), 165–180. DOI: 10.1016/j.neuroscience.2011.02.004.

[3] N. C. Rogasch, P. B. Fitzgerald, “Assessing cortical network properties using TMS–EEG”, *Human Brain Mapping*, **34**:7 (2013), 1652–1669. DOI: 10.1002/hbm.22016.

[4] V. V. Nikulin, D. Kičić, S. Kähkönen, R. J. Ilmoniemi, “Modulation of electroencephalographic responses to transcranial magnetic stimulation: evidence for changes in cortical excitability related to movement”, *European Journal of Neuroscience*, **18**:5 (2003), 1206–1212. DOI: 10.1046/j.1460-9568.2003.02858.x.

[5] C. Vidaurre, B. Blankertz, “Towards a cure for BCI illiteracy”, *Brain Topography*, **23**:2 (2010), 194–198. DOI: 10.1007/s10548-009-0121-6.

Received on October 24, 2026

Разработка и апробация стимулятора пассивных движений для нейрореабилитации на основе интерфейсов мозг-компьютер

И. П. Ганин*, И. Б. Бейлина‡, А. Н. Васильев§, А. Я. Каплан¶

Разработан стимулятор пассивных движений пальца, апробированный у 24 здоровых испытуемых. В отдельных режимах активное внимание по сравнению с отвлечённым сопровождалось увеличением амплитуды P300, точности классификации вызванных потенциалов и десинхронизации мю-ритма. Рассматривается развитие устройства и обратной связи по ЭЭГ для сенсомоторного тренинга и нейрореабилитации.

Ключевые слова: пассивные движения, соматосенсорные вызванные потенциалы, активное внимание, P300, мю-ритм, интерфейс мозг-компьютер, нейрореабилитация.

1. Введение

Электрическая стимуляция пальцев может использоваться в интерфейсах мозг-компьютер (ИМК) на волне P300 [1], а пассивные движения рассматриваются как средство вовлечения сенсомоторной системы в ИМК на основе представления движений [2].

Ганин Илья Петрович — канд. биол. наук, ст. науч. сотр., МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: ipganin@mail.ru, ORCID: 0000-0002-7422-925X.

Ganin Ilya Petrovich — Cand. Sci. (Biol.), Senior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

‡*Бейлина Ирина Борисовна* — студент магистратуры, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: irinaborisovna2004@gmail.com.

Beylina Irina Borisovna — Master's student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

§*Васильев Анатолий Николаевич* — канд. биол. наук, ст. науч. сотр., МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: a.n.vasilev.home@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1573-0730.

Vasilyev Anatoly Nikolaevich — Cand. Sci. (Biol.), Senior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

¶*Каплан Александр Яковлевич* — д-р биол. наук, профессор, зав. лабораторией, МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: akaplan@mail.ru, ORCID: 0000-0002-3912-4639.

Kaplan Alexander Yakovlevich — Dr. Sci. (Biol.), Professor, Head of Laboratory, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Пассивные движения создают проприоцептивную афферентацию без произвольного двигательного акта. Сочетание стимуляции с различением целевых стимулов позволяет исследовать взаимодействие сенсорного притока и направленного внимания.

Предполагается, что распознавание целевых движений включает сопоставление ощущений с сенсорным образом в рабочей памяти, а внимание и кинестетическое или сенсорное представление дополнительно вовлекают сенсомоторные контуры мозга. Обратная связь по ЭЭГ могла бы поддерживать тренинг этих процессов; гипотеза требует проверки.

На выполненном этапе решалась задача создания стимулятора и оценки того, как активное внимание к различающимся по физическим параметрам движениям влияет на вызванные потенциалы (ВП), их классификацию и ритмическую активность.

2. Стимулятор и экспериментальные протоколы

Стимулятор содержит два электромагнита, управляемых Arduino Nano. Их взаимодействие с неодимовым магнитом на накладном ногте вызывает сгибание или разгибание указательного пальца правой руки. Слабые стимулы создавались одним электромагнитом, сильные — двумя. Электромагниты работали без слышимого звука. Положение пальца подбирали индивидуально для субъективного различения воздействий; механические параметры не измеряли. Предъявление стимулов управлялось приложением на основе программного фреймворка Resonance.

Участвовали 24 здоровых праворуких добровольца 18–24 лет. В блоке «Пассивное внимание» предъявляли однотипные стимулы, в блоках «Отвлеченное внимание» и «Активное внимание» — редкие и частые стимулы в соотношении 1:3, в пяти режимах: редкий сильный, слабый, сгибательный, разгибательный или длинный стимул, по 200 стимулов в записи. Интервал между началами стимулов составлял 700 мс, длительность — 75 мс, длинного редкого стимула — 150 мс.

При отвлечённом внимании испытуемые подсчитывали геометрические элементы изображения на экране, при активном — подсчитывали целевые стимулы.

ВП классифицировали офлайн линейным дискриминантом Фишера с проверкой по одной исключаемой эпохе и балансировкой классов при расчёте точности. Анализировали также P300 и изменения мощности ЭЭГ в диапазоне 8–12 Гц. Фиксированный порядок блоков не исключает его влияния на различия между условиями внимания.

3. Результаты апробации

Активное внимание сопровождалось значимым увеличением амплитуды P300 по сравнению с отвлечённым вниманием в обоих режимах различения по силе, при редком сгибании и при редком длинном стимуле. Для P300 и точности классификации применяли двухфакторный дисперсионный анализ с поправкой Шидака, для режима различения длительности — парный t-тест.

Точность классификации при активном внимании значимо превышала показатели при отвлечённом во всех режимах, кроме редкого сгибания, и достигала в среднем около 70% при редком сильном стимуле. Результат относится к офлайн-анализу физически различающихся стимулов; вклад внимания оценивался сопоставлением блоков с разными инструкциями.

По правилу 20%-го усечения крайних значений мощности исключены четыре испытуемых; во всех режимах анализировали одну выборку ($n = 20$). Значимое усиление десинхронизации мю-ритма при активном внимании по сравнению с отвлечённым выявлено при редком слабом стимуле (сравнение с поправкой Шидака, $p < 0{,}01$).

4. Развитие устройства и ИМК-обратной связи

Планируются повышение эргономичности, увеличение числа стимулируемых пальцев и испытания новой версии с регистрацией отклонения пальца при варьировании параметров стимуляции.

Обратную связь предполагается строить на классификации ВП по принципу ИМК-P300 и/или изменениях мю-ритма и другой ритмической активности. Задания могут включать внимание к редким движениям и последующее кинестетическое или сенсорное представление. Предполагается, что обратная связь поможет изменять стратегию внимания или представления ощущений.

Протоколы и воспроизводимость маркеров предстоит исследовать на здоровых испытуемых; позднее возможно привлечение пациентов с нарушениями движений кисти, в том числе после инсульта.

Разработка стимулятора и апробация протоколов создают основу для поиска нейрофизиологических маркеров восприятия пассивных движений и разработки ИМК с обратной связью для сенсомоторного тренинга.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М. В. Ломоносова № 121032300070-1.

Список литературы

[1] J. Li, J. Pu, H. Cui, X. Xie, S. Xu, T. Li, Y. Hu, "An Online P300 Brain–Computer Interface Based on Tactile Selective Attention of Somatosensory Electrical Stimulation", *Journal of Medical and Biological Engineering*, **39** (2019), 732–738. DOI: 10.1007/s40846-018-0459-x.

[2] M. Arvaneh, C. Guan, K. K. Ang et al., "Facilitating motor imagery-based brain–computer interface for stroke patients using passive movement", *Neural Computing and Applications*, **28** (2017), 3259–3272. DOI: 10.1007/s00521-016-2234-7 .

Статья поступила 23 октября 2026 г.

Development and testing of a passive movement stimulator for neurorehabilitation based on brain–computer interfaces

I. P. Ganin, I. B. Beylina, A. N. Vasilyev, A. Y. Kaplan

A passive finger movement stimulator was developed and tested in 24 healthy participants. In specific stimulation conditions, active attention was associated with greater P300 amplitude, higher evoked potential classification accuracy, and stronger mu-rhythm desynchronization than distracted attention. Further development of the device and EEG-based feedback for sensorimotor training and neurorehabilitation is discussed.

Keywords: passive movements, somatosensory evoked potentials, active attention, P300, mu rhythm, brain–computer interface, neurorehabilitation.

References

[1] J. Li, J. Pu, H. Cui, X. Xie, S. Xu, T. Li, Y. Hu, "An Online P300 Brain–Computer Interface Based on Tactile Selective Attention of Somatosensory Electrical Stimulation", *Journal of Medical and Biological Engineering*, **39** (2019), 732–738. DOI: 10.1007/s40846-018-0459-x.

[2] M. Arvaneh, C. Guan, K. K. Ang et al., "Facilitating motor imagery-based brain–computer interface for stroke patients using passive movement", *Neural Computing and Applications*, **28** (2017), 3259–3272. DOI: 10.1007/s00521-016-2234-7.

Received on October 23, 2026

Модель гомеостаза эндокринной системы человека

Э. Э. Гасанов*, Н. И. Дейнека‡

В работе представлена математическая модель регуляции гомеостаза глюкозы, описывающая взаимодействие клеток поджелудочной железы, печени и периферических тканей. На основе дискретной динамической системы построена система обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой установлены глобальное существование, единственность и аналитичность решений. Доказано существование и единственность положения равновесия системы.

Ключевые слова: эндокринная система, гибридный автомат, поджелудочная железа, глюкоза, инсулин, глюкагон, гликоген.

1. Введение

Поддержание концентрации глюкозы в крови обеспечивается сложным механизмом взаимодействия α- и β-клеток поджелудочной железы, печени, тканей, а также почек [1]. В работе рассматривается математическая модель регуляции уровня глюкозы, учитывающая секрецию инсулина и глюкагона клетками поджелудочной железы, поступление глюкозы из печени и её потребление различными группами тканей. Результат работы модели представлен дискретной динамической системой, на основе которой построена система обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования, единственности и аналитичности решений полученной системы, а также существования и единственности её положения равновесия. Параметры используемых в модели уравнений подобраны таким образом, чтобы результаты функционирования составляющих элементов модели соответствовали физиологическим показателям метаболически здорового человека с индексом массы тела (ИМТ) в диапазоне 22–26 кг/м^2. Индекс массы тела представляет собой

Гасанов Эльяр Эльдарович — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

‡*Дейнека Наталья Игоревна* — старший преподаватель, Филиал МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, e-mail: dina_ukr@mail.ru, ORCID: 0009-0004-7661-3775.

Deyneka Natalya Igorevna — Lomonosov Moscow State University branch in Tashkent.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

показатель, рассчитываемый как отношение массы тела в килограммах к квадрату роста в метрах. Учёт ИМТ позволяет задать антропометрические характеристики человека, для которого разрабатывается модель, поскольку масса тела и состав тканей могут влиять на процессы обмена глюкозы [1]. Для упрощения расчётов в качестве базового значения массы тела принято 70 кг.

2. Основные понятия и формулировка результата

Модель, описывающая эндокринную систему, строится из четырех гибридных автоматов, описывающих функционирование соотвественно поджелудочной железы, печени, тканей и почек. Гибридный автомат — это автомат, у которого состояния, входные и выходные значения изменяются в дискретном времени, но являются вещественными числами. Предполагается отсутствие питания и нулевой запас гликогена печени в начальный момент.

Считаем, что длительность одного модельного шага равна h, а состояние системы на n-с модельном шаге описывается тремя переменными: концентрацией глюкозы s_n, инсулина i_n и глюкагона g_n.

Обозначим $\sigma(x) = 1/(1 + e^{-x})$. Введём две промежуточные величины: $\widetilde{g}_n = g_n + 17\sigma(10 - s_n), \widetilde{s}_n = s_n + \frac{44.16}{0.45}\sigma(0.02\widetilde{g}_n - 8)$, где $\widetilde{g}_n$ — количество глюкагона после работы альфа-клеток поджелужочной железы, а $\widetilde{s}_n$ — концентрация глюкозы после производства её печенью, но до клеточного потребления.

После подстановки гибридных автоматов друг друга в соответствии с тем как они подключены друг к другу в организме суммарный функционал эндокринной системы описывается системой рекурентных уравнений:

$$\begin{cases} s_{n+1} = s_n + \dfrac{h}{0.45}(44.16\sigma(0.02\widetilde{g}_n - 8) + \ 0.3\sigma(0.6\widetilde{s}_n - 4.5) - + \\ \qquad + 0.2\sigma(0.6\widetilde{s}_n - 6)), \\ i_{n+1} = i_n + h(i_n + 136.8\sigma(s_n - 8) - 0.66i_n), \\ g_{n+1} = g_n + h(13\sigma(10 - s_n) - 0.24g_n). \end{cases} \tag{1}$$

Численные эксперименты, которые проводились с моделью показывают, что независимо от начального состояния системы, она всегда сходится к одной и той же точке равновесия. Чтобы обосновать этот факт попробуем перейти к системе дифференциальных уравнений.

Вводим непрерывные аналоги промежуточных величин: $\widetilde{g}(t) = g(t) + 17\sigma(10 - s(t))$, $\widetilde{s}(t) = s(t) + \frac{44.16}{0.45}\sigma(0.02\widetilde{g}(t) - 8)$. Полагая

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{h} \approx \dot{s}, \qquad \frac{i_{n+1} - i_n}{h} \approx \dot{i}, \qquad \frac{g_{n+1} - g_n}{h} \approx \dot{g},$$

получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{1}{0.45}(44.16\,\sigma(0.02\widetilde{g} - 8) - 0.3\,\sigma(0.6\widetilde{s} - 4.5) - 0.2\,\sigma(0.6\widetilde{s} - 6)), \\ \dot{i} = 136.8\,\sigma(s - 8) - 0.66\,i, \\ \dot{g} = 13\,\sigma(10 - s) - 0.24\,g. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1 (Глобальная разрешимость)**.** *Для любых начальных данных* $(s_0, i_0, g_0) \in \mathbb{R}^3$ *система* (2) *имеет единственное решение, определённое при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и вещественно-аналитическое по времени.*

Идея доказательства. Правая часть системы является вещественно-аналитической на $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, локально липшицевой, что обеспечивает локальное существование и единственность решения [2].

Ограниченность логистической функции позволяет установить условие линейного роста. Это исключает возникновение особенностей за конечное время и обеспечивает глобальное продолжение решения. Аналитичность решения следует из аналитичности правой части системы.

Теорема 2 (Существование и единственность положения равновесия)**.** *Система* (2) *имеет ровно одно положение равновесия* $x_* = (s_*, i_*, g_*) \in \mathbb{R}^3$, *которое при достаточно малом шаге дискретизации* h *является единственной неподвижной точкой дискретного оператора* (1)*.*

Идея доказательства. Условия равновесия позволяют выразить концентрации инсулина и глюкагона через концентрацию глюкозы и свести задачу к скалярному уравнению $\Phi(s) = 0$, где

$$\Phi(s) = 44.16\,\sigma\left(0.02\left(\frac{13}{0.24} + 17\right)\sigma(10 - s) - 8\right) -$$

$$- 0.3\,\sigma\left(0.6\left(s + \frac{44.16}{0.45}\sigma\left(0.02\left(\frac{13}{0.24} + 17\right)\sigma(10 - s) - 8\right)\right) - 4.5\right) -$$

$$- 0.2\,\sigma\left(0.6\left(s + \frac{44.16}{0.45}\sigma\left(0.02\left(\frac{13}{0.24} + 17\right)\sigma(10 - s) - 8\right)\right) - 6\right).$$

Доказывается, что $\Phi'(s) < 0$ при всех $s \in \mathbb{R}$, причём

$$\lim_{s \to -\infty} \Phi(s) > 0, \qquad \lim_{s \to +\infty} \Phi(s) < 0.$$

Следовательно, уравнение имеет единственный действительный корень, определяющий единственное положение равновесия системы.

Следует отметить, что поведение дискретной модели хорошо согласуется с экспериментальными данными для описанной ситуации отсутствия питания и нулевого запаса гликогена печени [3].

Список литературы

[1] Н. Т. Старкова, *Клиническая эндокринология.*, М, 1991.

[2] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1974, 331 с.

[3] G. Freckmann, S. Hagenlocher, A. Baumstark, N. Jendrike, R. C. Gillen, K. Rössner, C. Haug, "Continuous Glucose Profiles in Healthy Subjects under Everyday Life Conditions and after Different Meals", *Journal of Diabetes Science and Technology*, **1**:5 (2007), 695-703. DOI: 10.1177/193229680700100513.

Статья поступила 5 ноября 2026 г.

A model of homeostasis in the human endocrine system

E. E. Gasanov, N. I. Deyneka

This paper presents a mathematical model of glucose homeostasis regulation describing the interaction between pancreatic cells, the liver, and peripheral tissues. Based on a discrete dynamical system, a system of ordinary differential equations is constructed, for which the global existence, uniqueness, and analyticity of solutions are established. The existence and uniqueness of an equilibrium point of the system are proved.

Keywords: endocrine system, hybrid automata, pancreas, glucose, insulin, glucagon, glycogen.

References

[1] N. T. Starkova, *Clinical Endocrinology.*, M, 1991 (in Russian).

[2] L. S. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1974 (in Russian), 331 pp.

[3] G. Freckmann, S. Hagenlocher, A. Baumstark, N. Jendrike, R. C. Gillen, K. Rössner, C. Haug, "Continuous Glucose Profiles in Healthy Subjects under Everyday Life Conditions and after Different Meals", *Journal of Diabetes Science and Technology*, **1**:5 (2007), 695-703. DOI: 10.1177/193229680700100513.

Received on November 5, 2026

Об одном подходе к моделированию регуляции физиологических параметров

Э. Э. Гасанов*, М. Э. Ширинян‡

В статье предлагается использовать модель горизонтального пружинного маятника с переменным коэффициентом упругости пружины для моделирования регуляции физиологических параметров организма с помощью отрицательной обратной связи. Предполагается, что система находится под воздействием внешней силы, которое вызывает противодействие пружины, снижающее амплитуду отклонения системы. Предложен метод управления коэффициентом упругости пружины, позволяющий контролировать координаты маятника, удерживая его в допустимых пределах.

Ключевые слова: регуляция физиологических параметров, отрицательная обратная связь, горизонтальный пружинный маятник.

В норме физиологические параметры организма поддерживаются в состоянии динамического гомеостаза за счет регуляторных механизмов, активизирующихся при отклонении этих показателей и направленных на восстановление их исходных значений. При этом большинство регуляторных систем функционирует по принципу отрицательной обратной связи, которая носит стабилизирующий характер.

В статье в качестве модели регуляторного механизма предлагается использовать механическую систему, состоящую из бруска, размещенного на горизонтальной поверхности, с закрепленной к нему пружиной, свободный конец которой прикреплен к вертикальной стойке (рис.1а). Координата бруска ассоциируется с наблюдаемым физиологическим параметром организма. В начальный момент времени система находится в состоянии покоя, при этом нулевая координата ($x = 0$) соответствует

Гасанов Эльяр Эльдарович — д. ф.-м. н., зав. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: el_gasanov@mail.ru, ORCID: 0000-0002-0739-0967.

Gasanov Elyar Eldarovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

‡*Ширинян Маринэ Эдгаровна* — канд. биол. наук, науч. сотр. лаб. фармакологии и патогистологии Научно-технологического центра органической и фармацевтической химии НАН Армении, e-mail: mshirinian@physiol.sci.am, ORCID: 0009-0002-8334-3983.

Shirinyan Marine Edgarovna — Candidate of Biological Sciences, Research Scientist, Scientific Technological Center of Organic and Pharmaceutical Chemistry NAS of Armenia, Laboratory of Pharmacology and Histopathology.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

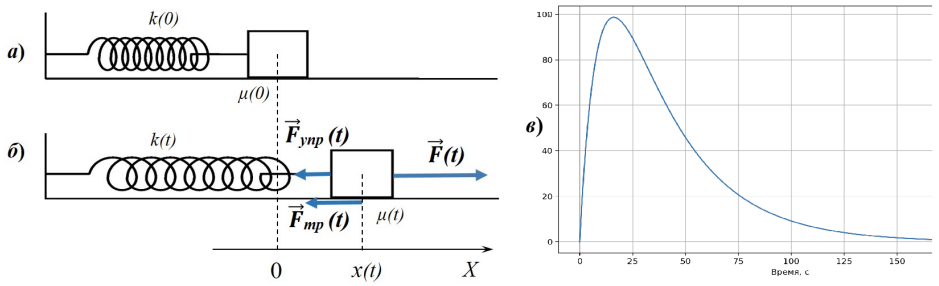


Рис. 1: а,б) Механическая система с бруском и пружиной, в) Внешняя сила, порождаемая влиянием фенилэфрина

номинальному (нормальному) значению исследуемого физиологического параметра. Введение внешней силы $F(t)$ вызывает смещение системы из положения равновесия. В результате на брусок начинают действовать две силы: сила упругости пружины, моделирующая основной регуляторный механизм, и сила трения, ассоциируемая с остальными тормозящими механизмами, не зависящими напрямую от внешнего воздействия $F(t)$ (рис.1б).

Тем самым система задается дифференциальным уравнением

$$F(t) - k(t) \cdot x(t) - \mu(t) \cdot mg \cdot \operatorname{sign}(\dot{x}(t)) = m \cdot \ddot{x}(t) \tag{1}$$

с начальными условиями $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$, где $k(t)$ — переменный коэффициент упругости пружины, выступающий в роли управляющего параметра системы, а $\mu(t)$ — коэффициент трения, который предполагается постоянным либо слабо меняющимся во времени.

В качестве объекта верификации разработанной модели выбран артериальный барорецепторный рефлекс (АБР) в режиме острого прессорного теста (Оксфордского теста) [1]. Данный рефлекс является одним из основных механизмов нейрогенной регуляции артериального давления (АД), который активируется при резком изменении АД и направлен на минимизацию отклонения АД от исходного уровня. При тестировании депрессорной функции АБР имитируют острое повышение АД путем внутривенного введения сосудосуживающего препарата фенилэфрина (ФЭ). Регистрируемые при этом ответные реакции организма определяют функциональную состоятельность АБР, главным показателем которой выступает степень (и скорость) минимизации вызванного сдвига АД. В рамках предложенной модели, координата бруска будет ассоциироваться с величиной АД, коэффициент $k(t)$ — с депрессорной функцией АБР, сила $F(t)$ — с влиянием ФЭ на АД, вид которой изображен на рис.1в. В случае

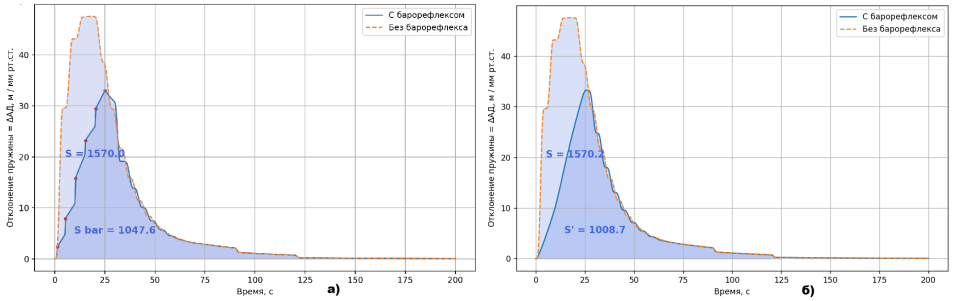


Рис. 2: а) Импульсное управление, б) Пороговое управление.

численного моделирования системы с нарушенной функцией АБР, то есть когда управляющий параметр $k(t)$ неизменен во времени, реакция АД на воздействие силы $F(t)$ соответствует верхней кривой на рис. 2а. В то же время результаты экспериментов на здоровых животных демонстрируют существенно меньшую амплитуду отклонения АД. Зарегистрированные в ходе опыта значения [2] нанесены круглыми маркерами на нижний график рис. 2а.

Возникает вопрос: можно ли подобрать такое управление параметром $k(t)$, чтобы траектория $x(t)$ проходила через наблюдаемые в эксперименте точки. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{(\tau_i, p_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n, p_0 = 0\}$ *— множество пар (момент времени – значение наблюдаемого параметра организма). Пусть* $F(t)$ *— гладкая функция, которая сначала возрастает, а потом убывает, функция* $\mu(t)$ *известна заранее и не зависит от функции управления* $k(t)$ *и силы возмущающего воздействия* $F(t)$ *напрямую. Тогда существует такое управление параметром* $k(t)$*, что решение* $x(t)$ *дифференциального уравнения (1) для любых* $i = 1, 2, \ldots, n$ *будет удовлетворять условию* $x(\tau_i) = p_i$*.*

Существует множество стратегий достижения данного результата. Метод, предложенный в доказательстве теоремы, состоит из трех этапов: свободного движения (при неизменном $k(t)$), импульсного воздействия (при скачкообразном росте $k(t)$ для обнуления ускорения и фиксации целевой скорости) и стабилизации (докатывания), в рамках которой поддерживается постоянная скорость движения. Длительность этих этапов может меняться. В частности, стратегия, где половину периода между измерениями занимает свободное движение, сменяющееся однократным мощным импульсом и последующим движением с постоянной скоростью,

определяется как импульсное управление. Пример такого режима приведен на нижнем графике рис. 2а.

Описанный метод управления предполагает знание целевой функции. В качестве альтернативы может быть рассмотрен подход, не требующий сохранения полной информации о целевой функции: вместо этого фиксируется простая кусочно-постоянная функция, определяемая как пороговая. Если в определенный момент времени скорость изменения наблюдаемого параметра $v(t)$ превышает заданный порог, формируется тормозящий импульс, снижающий ускорение параметра до нуля.

В частности, если для рассматриваемой задачи регуляции АД пороговую функцию $g(t)$ задать следующим образом:

$$g(t) = \begin{cases} 1.5, & t < 10 \\ 2.5, & 10 \le t < 25 \\ 5.5, & 25 \le t < 30 \\ 1000, & t \ge 30 \end{cases},$$

то траектория отклонения АД примет вид нижнего графика на рис. 2б. Интуитивно импульсный метод управления можно ассоциировать с выполнением доведенного до автоматизма навыка опытным субъектом за счет сформированных устойчивых нейронных связей (экспертный уровень). Тогда как пороговый метод управления скорее отражает стратегию поведения на этапе освоения навыка (адаптационный уровень).

Список литературы

[1] Milica M., Sun P., Liu F., Fainman C., Dimsdale J., Mills P.J., Ziegler M.G., “A comparison of pharmacologic and spontaneous baroreflex methods in aging and hypertension.”, *J Hypertens.*, **27**:6 (2009), 1243—1251. DOI: 10.1097/HJH.0b013e32832a6e1b.

[2] Ширинян М.Э., “Влияние неселективных β-андреноблокаторов Фобуфола и Пропранолола на кардиохронотропный ответ депрессорного барорефлекса у нормотензивных крыс”, *Вестник медицинского института им. Меграбяна.*, **10** (2021), 68—73 https://drive.google.com/file/d/1bGNtSfMZzS0SajeOn_a2uNa8yk14jeUB/view.

Статья поступила 8 ноября 2026 г.

On an approach to modeling the regulation of physiological parameters

E. E. Gasanov, M. E. Shirinyan

This article proposes using a horizontal spring-pendulum model with a variable stiffness coefficient to simulate the regulation of an organism's physiological parameters via negative feedback. The system is assumed to be subject to an external force, which triggers a counteracting response from the spring that reduces the amplitude of the system's deviation. A method for controlling the stiffness coefficient is presented, which allows for the regulation of the pendulum's coordinates, keeping them within permissible limits.

Keywords: regulation of physiological parameters, negative feedback, horizontal spring spring-pendulum.

References

[1] Milica M., Sun P., Liu F., Fainman C., Dimsdale J., Mills P.J., Ziegler M.G., "A comparison of pharmacologic and spontaneous baroreflex methods in aging and hypertension.", *J Hypertens.*, **27**:6 (2009), 1243—1251. DOI: 10.1097/HJH.0b013e32832a6e1b.

[2] Shirinyan M.E., "On the impact of the non-selectiv beta-blockers Fobufol and Propranolol on the cardio rate response of the depressor baroreflex in normotensive rats.", *Bulletin of the Medical Institute after Mehrabyan.*, **10** (2021), 68—73 https://drive.google.com/file/d/1bGNtSfMZzSOSajeOn_a2uNa8yk14jeUB/view (in Russian).

Received on November 8, 2026

Гибридные подходы на основе машинного обучения и графовых нейронных сетей для точного предсказания температур плавления органических кристаллов

Н. С. Дубонос*, А. С. Новиков‡, Г. В. Боков§, А. А. Митрофанов¶

Предсказание температур плавления критически важно для химии и фармацевтики, но существующие методы сталкиваются с проблемами точности и вычислительной эффективности. В работе собран кодифицированный набор данных из 117 752 органических кристаллов. Проведено сравнение моделей машинного обучения на молекулярных эмбеддингах и графовых нейронных сетей. Гибридная модель TabM с конкатенированными эмбеддингами ChemBERTa и MoLFormer достигает MAE 26.75 K за 27 минут обучения, обеспечивая оптимальный баланс точности и вычислительных затрат по сравнению с Chemprop (MAE 26.44 K, 45 минут).

Ключевые слова: температура плавления, органические кристаллы, машинное обучение, графовые нейронные сети, ChemBERTa, MoLFormer, TabM, Chemprop.

1. Введение и постановка задачи

Предсказание температур плавления органических кристаллов является критически важной задачей для дизайна материалов и фармацевтики. Су-

Дубонос Николай Сергеевич — студент факультета механики и математики МГУ, e-mail: nikolai.dubonos@math.msu.ru.

Dubonos Nikolai Sergeevich — Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

‡*Новиков Александр Сергеевич* — к.х.н., с.н.с. химического факультета МГУ, e-mail: novikov@radio.chem.msu.ru.

Novikov Alexander Sergeevich — Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher, Faculty of Chemistry, Lomonosov Moscow State University.

§*Боков Григорий Владимирович* — к.ф.-м.н., доцент факультета механики и математики МГУ, e-mail: grigoriy.bokov@math.msu.ru.

Bokov Grigoriy Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University.

¶*Митрофанов Артем Александрович* — к.х.н., с.н.с. Института искусственного интеллекта МГУ, e-mail: a.mitrofanov@iai.msu.ru.

Mitrofanov Artem Alexandrovich — Candidate of Chemical Sciences, Senior Researcher, MSU Institute for Artificial Intelligence.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

ществующие вычислительные подходы можно разделить на три группы: классическое машинное обучение (ML) на основе молекулярных дескрипторов; графовые нейронные сети (GNN), моделирующие топологию молекул; трансформерные архитектуры, обрабатывающие SMILES-строки как последовательности.

Основная проблема заключается в том, что температура плавления – это макроскопическое свойство, зависящее от упаковки кристаллической решетки. Связь между структурой отдельной молекулы и температурой плавления носит разрывный и нелинейный характер. Цель данной работы – разработать гибридный фреймворк, который объединит масштабируемость классического ML и выразительную силу GNN и трансформеров для достижения высокой точности при разумных вычислительных затратах.

2. Подготовка набора данных

Для обучения и тестирования моделей был собран кодифицированный набор данных, объединяющий три открытых источника (Bradley, OPERA и компиляцию Song et al. [1]). В ходе проверки были удалены дубликаты, унифицированы единицы измерения, разрешены конфликты измерений и отфильтрованы соединения с разбросом температур плавления более 5 K. Итоговый набор данных содержит **117 752** уникальных органических кристалла. Анализ сходства Танимото с эталонной базой ChEMBL показал широкое разнообразие химического пространства набора данных.

3. Методы и модели

В работе исследовались четыре типа молекулярных представлений: топологические отпечатки Моргана, 3D-геометрические эмбеддинги Uni-Mol, а также векторы, полученные с помощью предобученных трансформеров ChemBERTa [2] и MoLFormer [3].

Полученные эмбеддинги подавались на вход двум классическим архитектурам для табличных данных: градиентному бустингу **XGBoost** и глубокой нейросети **TabM** [4], эффективно имитирующей ансамбль многослойных перцептронов.

Параллельно была реализована собственная **GNN** на базе сверток GATv2 с механизмом внимания и проведено сравнение с моделями уровня SOTA: **Chemprop** [5], **ALIGNN** и **MEGNet**. Также была выполнена процедура дообучения (fine-tuning) модели MoLFormer.

4. Результаты и обсуждение

Оценка проводилась на фиксированной тестовой выборке (10% данных). Результаты лучших моделей представлены на рис. 1.

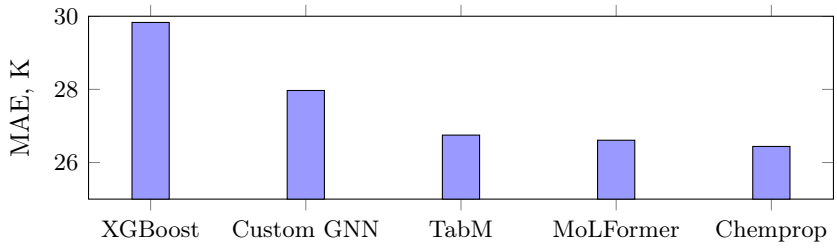


Рис. 1: Сравнение средней абсолютной ошибки (MAE) лучших моделей на тестовой выборке.

Модель XGBoost продемонстрировала высочайшую вычислительную эффективность, но уступила в точности (MAE = 29.83 K). Собственная GNN с механизмом внимания GATv2 улучшила результат до 27.97 K, однако потребовала около 22 часов на обучение.

Наилучшие результаты показали трансформерные и гибридные подходы. Дообученный **MoLFormer** достиг MAE 26.61 K (время обучения 182 мин). Модель **Chemprop** [5] показала самую высокую точность – MAE 26.44 K и RMSE 34.67 K (время обучения 45 мин).

Ключевым результатом работы стало применение гибридного подхода: конкатенация эмбеддингов **ChemBERTa и MoLFormer** с последующей подачей в модель **TabM** [4]. Данная гибридная модель достигла MAE 26.75 K и RMSE 35.36 K. При этом время её обучения составило всего **27 минут**. SHAP-анализ показал, что оба типа эмбеддингов вносят примерно равный вклад в предсказание.

Список литературы

[1] S. Song, Y. Wang, X. Tian, W. Tian, F. Chen, J. Wu, Q. Zhang, “Predicting the Melting Point of Energetic Molecules Using a Learnable Graph Neural Fingerprint Model”, *J. Phys. Chem. A*, **127**:19 (2023), 4328–4337.

[2] W. Ahmad, E. Simon, S. Chithrananda, G. Grand, B. Ramsundar, “ChemBERTa-2: Towards Chemical Foundation Models”, arXiv: 2209.01712.

[3] J. Ross, B. Belgodere, V. Chenthamarakshan, I. Padhi, Y. Mroueh, P. Das, “Large-Scale Chemical Language Representations Capture Molecular Structure and Properties”, arXiv: 2106.09553.

[4] Y. Gorishniy, A. Kotelnikov, A. Babenko, “TabM: Advancing Tabular Deep Learning with Parameter-Efficient Ensembling”, *The Thirteenth International Conference on Learning Representations*, 2025.

[5] E. Heid, K. P. Greenman, Y. Chung, S.-C. Li, D. E. Graff, F. H. Vermeire, H. Wu, W. H. Green, C. J. McGill, “Chemprop: A Machine Learning Package for Chemical Property Prediction”, *J. Chem. Inf. Model.*, **64**:1 (2024), 9–17 .

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Hybrid Machine Learning and Graph Neural Network Approaches for Accurate Melting Point Prediction of Organic Crystals

N. S. Dubonos, A. S. Novikov, G. V. Bokov, A. A. Mitrofanov

Melting point prediction is crucial for chemistry and pharmaceuticals, but current methods face accuracy and efficiency challenges. We curated a harmonized dataset of 117,752 organic crystals. We compared machine learning models using molecular embeddings and graph neural networks. A hybrid TabM model with concatenated ChemBERTa and MoLFormer embeddings achieves MAE of 26.75 K in 27 minutes of training, offering an optimal balance of accuracy and computational cost compared to Chemprop (MAE 26.44 K, 45 minutes).

Keywords: melting point, organic crystals, machine learning, graph neural networks, ChemBERTa, MoLFormer, TabM, Chemprop.

References

[1] S. Song, Y. Wang, X. Tian, W. Tian, F. Chen, J. Wu, Q. Zhang, “Predicting the Melting Point of Energetic Molecules Using a Learnable Graph Neural Fingerprint Model”, *J. Phys. Chem. A*, **127**:19 (2023), 4328–4337.

[2] W. Ahmad, E. Simon, S. Chithrananda, G. Grand, B. Ramsundar, “ChemBERTa-2: Towards Chemical Foundation Models”, arXiv: 2209.01712.

[3] J. Ross, B. Belgodere, V. Chenthamarakshan, I. Padhi, Y. Mroueh, P. Das, “Large-Scale Chemical Language Representations Capture Molecular Structure and Properties”, arXiv: 2106.09553.

[4] Y. Gorishniy, A. Kotelnikov, A. Babenko, “TabM: Advancing Tabular Deep Learning with Parameter-Efficient Ensembling”, *The Thirteenth International Conference on Learning Representations*, 2025.

[5] E. Heid, K. P. Greenman, Y. Chung, S.-C. Li, D. E. Graff, F. H. Vermeire, H. Wu, W. H. Green, C. J. McGill, “Chemprop: A Machine Learning Package for Chemical Property Prediction”, *J. Chem. Inf. Model.*, **64**:1 (2024), 9–17.

Received on October 24, 2026

Параметры среды, влияющие на возможность консолидации слабой неассоциативной памяти в модели на лабораторных мышах

М. Д. Евдокимов*, О. И. Ивашкина‡, К. А. Торопова§, К. В. Анохин¶

Изучали влияние открытого поля (ОП), семидневного содержания в обогащённой среде (ОС) и (R)-CPP на слабую неассоциативную память у мышей. Значимого усиления памяти после ОП не выявлено; после 1 мин обучения индекс подвижности возрастал. ОС значимо снижала индекс после 30 с, но не после 1 мин обучения. При введении (R)-CPP индекс отличался от группы без инъекции, но не от группы с физиологическим раствором.

Ключевые слова: слабая память, пространственная новизна, поведенческое мечение, обогащённая среда, НАПО.

1. Введение

На долговременную память влияет не только обучение, но и опыт до или после него [1]. Согласно гипотезе поведенческого мечения, слабое

* *Евдокимов Михаил Дмитриевич* — студент бакалавриата, РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева; Институт перспективных исследований мозга МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: evdokimov.vom@gmail.com.

Evdokimov Mikhail Dmitrievich — Undergraduate student, Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy; Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University.

‡ *Ивашкина Ольга Игоревна* — младший научный сотрудник, Институт перспективных исследований мозга МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: oivashkina@gmail.com.

Ivashkina Olga Igorevna — Junior Researcher, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University.

§ *Торопова Ксения Александровна* — младший научный сотрудник, Институт перспективных исследований мозга МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: xen.alexander@gmail.com.

Toropova Ksenia Aleksandrovna — Junior Researcher, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University.

¶ *Анохин Константин Владимирович* — директор Института перспективных исследований мозга МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН, e-mail: k.anokhin@gmail.com.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director of Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University, Academician of the Russian Academy of Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

обучение создаёт метку для белков пластичности, синтезируемых при близком по времени исследовании новой среды [1, 2]. Обогащённая среда (ОС) может улучшать память об обстановке и различение контекстов [3]. Цель работы — оценить влияние новизны, ОС и антагониста NMDA-рецепторов (R)-CPP на слабую неассоциативную память об обстановке (НАПО) [4].

2. Материалы и методы

Использовали 285 самцов мышей C57BL/6 (8–14 недель). В НАПО обучение длилось 30 с, 1, 5 или 10 мин. Через сутки проводили 5-минутный тест в той же обстановке. За 1 ч до обучения мыши 10 мин исследовали открытое поле (ОП, $44 \times 44 \times 40$ см). В двухуровневой ОС ($80 \times 50 \times 70$ см, туннели, игрушки, мостики, колёса, два вида наполнителя) мышей содержали 7 суток. (R)-CPP (10 мг/кг) или физиологический раствор вводили внутрибрюшинно за 4,5 ч до 5-минутного обучения. Третья группа была без инъекции.

Индекс подвижности (Motion Index) определяли по изменениям видеокадров в Video Freeze (MED Associates, США). Снижение индекса отражало габитуацию.

Эксперименты одобрены Комиссией по биоэтике МГУ (протокол № 151-д от 20.04.2023 г., заявление № 148-а) и соответствовали Директиве 2010/63/EU и приказу МЗ РФ № 267 от 19.06.2003 г.

В GraphPad Prism 10 проводили однофакторный ANOVA и тест Тьюки (скорректированные p, порог 0,05). В базовой серии сравнивали 30 с, 1 и 5 мин за весь тест. Группа 10 мин — описательно. ОП и ОС анализировали раздельно за первую минуту, (R)-CPP — за 5 мин.

3. Результаты

За 5 мин теста индекс составил 69,21 после 30 с ($n = 64$), 74,97 после 1 мин ($n = 51$), 52,41 после 5 мин ($n = 37$) и 58,26 после 10 мин ($n = 38$). В анализе групп 30 с, 1 и 5 мин получено $F(2, 149) = 6{,}69$, $p = 0{,}0016$. Относительно 5 мин индекс был выше после 30 с ($p = 0{,}0167$) и 1 мин ($p = 0{,}0014$). После этих коротких экспозиций признаков устойчивой НАПО по данному критерию не выявлено.

После 30 с обучения индекс составил: контроль — 74,83 ($n = 64$), ОП — 93,02 ($n = 15$, $p = 0{,}2913$), ОС — 44,81 ($n = 20$, $p = 0{,}0055$). После 1 мин: контроль — 81,48 ($n = 51$), ОП — 121,20 ($n = 15$, $p = 0{,}0013$), ОС — 65,56

($n = 10$, $p = 0{,}5511$). ANOVA для ОП: $F(3, 141) = 7{,}21$, $p = 0{,}0002$. Для ОС: $F(3, 141) = 5{,}56$, $p = 0{,}0012$.

После (R)-CPP индекс составил 47,28 ($n = 12$), после физиологического раствора — 35,10 ($n = 12$), без инъекции — 31,58 ($n = 11$). ANOVA: $F(2, 32) = 3{,}96$, $p = 0{,}0291$. Различие с группой без инъекции значимо ($p = 0{,}0319$), с физиологическим раствором — нет ($p = 0{,}1043$). Между контрольными группами $p = 0{,}8233$.

4. Обсуждение

ОП за 1 ч до обучения не сопровождалось значимым усилением НАПО, несмотря на описанное в других задачах действие новизны [1, 2]. Семидневное содержание в ОС сопровождалось усилением НАПО после 30-секундного обучения, но после 1-минутного значимого улучшения не выявлено. Возможно, длительное взаимодействие со сложной средой облегчает обработку информации об обстановке [3].

При введении (R)-CPP индекс отличался от группы без инъекции, но не от физиологического раствора. Поэтому вывод о нарушении памяти препаратом не подтверждён.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института перспективных исследований мозга Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Список литературы

[1] D. Moncada, H. Viola, “Induction of Long-Term Memory by Exposure to Novelty Requires Protein Synthesis: Evidence for a Behavioral Tagging”, *The Journal of Neuroscience*, **27**:28 (2007), 7476–7481. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1083-07.2007.

[2] F. Ballarini, D. Moncada, M. C. Martinez, N. Alen, H. Viola, “Behavioral Tagging Is a General Mechanism of Long-Term Memory Formation”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **106**:34 (2009), 14599–14604. DOI: 10.1073/pnas.0907078106.

[3] E. A. Woodcock, R. Richardson, “Effects of Environmental Enrichment on Rate of Contextual Processing and Discriminative Ability in Adult Rats”, *Neurobiology of Learning and Memory*, **73**:1 (2000), 1–10. DOI: 10.1006/nlme.1999.3911.

[4] T. Kitamura, R. Okubo-Suzuki, N. Takashima, A. Murayama, T. Hino, H. Nishizono, S. Kida, K. Inokuchi, “Hippocampal function is not required for the precision of remote place memory”, *Molecular Brain*, **5** (2012), 5. DOI: 10.1186/1756-6606-5-5 .

Статья поступила 9 октября 2026 г.

Environmental Parameters Affecting the Consolidation of Weak Non-Associative Memory in a Laboratory Mouse Model

M. D. Evdokimov, O. I. Ivashkina, K. A. Toropova, K. V. Anokhin

We studied the effects of open-field (OF) exploration, seven-day enriched-environment (EE) housing, and (R)-CPP on weak non-associative place memory in mice. No significant memory enhancement was detected after OF; the mobility index increased following 1-min training. EE significantly reduced the index after 30-s, but not 1-min, training. The (R)-CPP group differed from non-injected, but not saline-injected, controls.

Keywords: weak memory, spatial novelty, behavioral tagging, enriched environment, non-associative place memory.

References

[1] D. Moncada, H. Viola, "Induction of Long-Term Memory by Exposure to Novelty Requires Protein Synthesis: Evidence for a Behavioral Tagging", *The Journal of Neuroscience*, **27**:28 (2007), 7476–7481. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1083-07.2007.

[2] F. Ballarini, D. Moncada, M. C. Martinez, N. Alen, H. Viola, "Behavioral Tagging Is a General Mechanism of Long-Term Memory Formation", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **106**:34 (2009), 14599–14604. DOI: 10.1073/pnas.0907078106.

[3] E. A. Woodcock, R. Richardson, "Effects of Environmental Enrichment on Rate of Contextual Processing and Discriminative Ability in Adult Rats", *Neurobiology of Learning and Memory*, **73**:1 (2000), 1–10. DOI: 10.1006/nlme.1999.3911.

[4] T. Kitamura, R. Okubo-Suzuki, N. Takashima, A. Murayama, T. Hino, H. Nishizono, S. Kida, K. Inokuchi, "Hippocampal function is not required for the precision of remote place memory", *Molecular Brain*, **5** (2012), 5. DOI: 10.1186/1756-6606-5-5.

Received on October 9, 2026

Функциональная связанность областей мозга при обучении мышей на комплексный условный стимул как отражение целостного восприятия его компонентов

А. А. Иванова*, О. И. Ивашкина‡, К. А. Торопова§, К. В. Анохин¶

Методами теории графов сопоставлены функциональные сети мозга мышей, построенные по корреляциям Спирмена между уровнями экспрессии c-Fos в 17 областях, при обучении на комплексный зрительно-слуховой условный стимул и на каждый из его компонентов. После обучения на звук и на комплексный стимул теменная ассоциативная кора входила в один модуль с гиппокампом, а сеть комплекса была слабо сходна с сетью зрительного компонента.

Ключевые слова: функциональная связанность, теория графов, c-Fos, комплексный условный стимул, теменная ассоциативная кора, гиппокамп.

1. Введение

Вопрос о том, запоминается ли сочетание признаков разных модальностей как сумма ассоциаций его элементов или как целостная конфигурация, на системном уровне сводится к организации функциональных сетей мозга, построенных по межрегиональным корреляциям экспрессии гена *c-fos* [1]. Ранее мы показали участие поля CA1 гиппокампа в памяти

* *Иванова Анна Андреевна* — лаборант-исследователь, Институт перспективных исследований мозга МГУ имени М. В. Ломоносова (ИПИМ МГУ); автор для переписки, e-mail: anivis33@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2454-1288.

Ivanova Anna Andreevna — Research Assistant, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU); corresponding author.

‡ *Ивашкина Ольга Игоревна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: oivashkina@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1540-7677.

Ivashkina Olga Igorevna — Junior Researcher, IABS MSU.

§ *Торопова Ксения Александровна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: xen.alexander@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3081-2133.

Toropova Ksenia Aleksandrovna — Junior Researcher, IABS MSU.

¶ *Анохин Константин Владимирович* — директор ИПИМ МГУ, д.м.н., академик РАН, e-mail: k.anokhin@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, IABS MSU; DSc (Medicine), Full Member of the Russian Academy of Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

на комплексный сигнал [2], а теменной ассоциативной коры в условно-рефлекторной памяти о страхе [3]. Цель работы состояла в сравнении топологии функциональных сетей мозга мышей при обучении на комплексный зрительно-слуховой стимул и на каждый его компонент.

2. Методы

Мышей C57BL/6 обучали в модели условно-рефлекторного замирания на мигающий свет (5 Гц; группа «Свет», $n = 6$), звук (80 дБ, 9 кГц; «Звук», $n = 7$) или их синхронное сочетание («Комплекс», $n = 10$): семь раз с интервалом 40–60 с предъявляли пять 2-с сигналов через 2 с, сочетая последний с ударом тока (0,75 мА, 2 с); контролем служили комплексный стимул без подкрепления ($n = 9$) и интактные мыши ($n = 6$). Через 90 мин иммуногистохимически определяли плотность c-Fos-позитивных клеток (клеток/мм^2, среднее по трём срезам) в 17 областях: префронтальной (PrL, FrA, Cg), ретросплениальной (RSC), зрительной (V1, V2M, V2L), слуховой (Au1, AuD, AuV) и теменной ассоциативной (PtA) коре, гиппокампе (CA1, CA3, DG) и миндалине (LA, BLA, CE). Плотности клеток каждого животного делили на их среднее. Из-за выбросов у 12 из 38 животных (модифицированный $z > 3{,}5$ по медиане и MAD каждой области внутри группы) использовали ранговую корреляцию Спирмена: ребро графа соответствует ρ при $p < 0{,}05$ (точный тест без поправки на множественные сравнения; рёбра даны для наглядности, выводы от них не зависят). Модули выделяли алгоритмом Лувена [4] по всем положительным корреляциям, их устойчивость оценивали методом складного ножа. Сходство сетей оценивали тестом Мантела по 136 коэффициентам, а связь PtA с гиппокампом по средней корреляции PtA с CA1, CA3 и DG (перестановочный тест: принадлежность животных к группам перемешивали после стандартизации данных внутри групп). ДИ (95%) получали бутстрэпом по животным (BCa); значимые различия сохранялись после поправки Бенджамини–Хохберга.

3. Результаты и обсуждение

На седьмом сочетании замирание составляло 78, 83 и 55% в группах «Свет», «Звук» и «Комплекс» против 5% без подкрепления ($p < 0{,}001$; различия обученных групп незначимы, тест Тьюки). У интактных мышей PtA входила в корковый модуль (рис. 1). В сетях метода складного ножа (по одной на каждое исключённое животное) PtA после обучения попадала в один модуль с полями CA1, CA3 и DG в 97% и 76% случаев в группах «Комплекс» и «Звук», в 39% в группе «Свет» и в 19% в группе

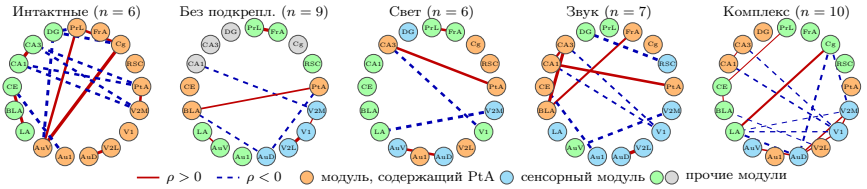


Рис. 1: Функциональные сети мозга через 90 мин после обучения. Рёбра соответствуют корреляциям Спирмена при $p < 0{,}05$.

без подкрепления (в 1000 бутстрэп-выборках животных 78, 74, 47 и 40%), связь PtA с гиппокампом во всех обученных группах была сильнее, чем у интактных мышей ($p = 0{,}008$–$0{,}019$).

Сеть группы «Комплекс» была слабо, но значимо сходна с сетью группы «Свет» ($r = 0{,}26$, 95% ДИ 0,18–0,52, без любого одного животного 0,14–0,29; $p = 0{,}006$), в том числе при исключении вклада сетей групп «Звук» и без подкрепления (частный тест Мантела: $p = 0{,}006$ и 0,010), а значимого сходства с сетью группы «Звук» не выявлено ($r = 0{,}06$, $p = 0{,}21$). С суммой сетей компонентов (объединённые группы «Свет» и «Звук») сходство было таким же ($r = 0{,}26$, $p = 0{,}006$) и не ниже, чем между случайными разбиениями животных трёх групп ($p = 0{,}39$).

Таким образом, при обучении на комплексный стимул теменная ассоциативная кора входит в один модуль с гиппокампом, формирующим конъюнктивные представления одновременно действующих признаков [5], хотя замирание в этой группе было наименьшим, а функциональная сеть слабо сходна с сетью зрительного компонента и значимо не отличается от суммы сетей компонентов. Это совместимо с гипотезой о целостном восприятии комплексного стимула, но не отличает её от поэлементного представления и преобладания зрительного компонента.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-78-00010.

Список литературы

[1] A. L. Wheeler, C. M. Teixeira, A. H. Wang et al., “Identification of a functional connectome for long-term fear memory in mice”, *PLoS Comput. Biol.*, **9**:1 (2013), e1002853. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002853.

[2] O. I. Ivashkina, K. A. Toropova, M. A. Roshchina, K. V. Anokhin, “Formation and retrieval of associative memory for a complex signal in mice: specific involvement of hippocampal field CA1 neurons”, *Neurosci. Behav. Physiol.*, **50**:9 (2020), 1185–1194. DOI: 10.1007/s11055-020-01020-y.

[3] O. I. Ivashkina, A. M. Gruzdeva, M. A. Roshchina et al., “Imaging of c-fos activity in neurons of the mouse parietal association cortex during acquisition and retrieval of associative fear memory”, *Int. J. Mol. Sci.*, **22**:15 (2021), 8244. DOI: 10.3390/ijms22158244.

[4] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte, E. Lefebvre, "Fast unfolding of communities in large networks", *J. Stat. Mech.*, 2008, № 10, P10008. DOI: 10.1088/1742-5468/2008/10/P10008.

[5] R. C. O'Reilly, J. W. Rudy, "Conjunctive representations in learning and memory: principles of cortical and hippocampal function", *Psychol. Rev.*, **108**:2 (2001), 311–345. DOI: 10.1037/0033-295X.108.2.311.

Статья поступила 22 октября 2026 г.

Functional connectivity of brain regions during compound conditioned stimulus learning in mice as a reflection of integrated perception of its components

A. A. Ivanova, O. I. Ivashkina, K. A. Toropova, K. V. Anokhin

Using graph theory, we compared mouse brain functional networks built from Spearman correlations of c-Fos expression in 17 regions after conditioning to a compound visual-auditory stimulus and to each of its components. After sound and compound conditioning, the parietal associative cortex joined the hippocampus in a single module, and the compound network was weakly similar to that of its visual component.

Keywords: functional connectivity, graph theory, c-Fos, compound conditioned stimulus, parietal associative cortex, hippocampus.

References

[1] A. L. Wheeler, C. M. Teixeira, A. H. Wang et al., "Identification of a functional connectome for long-term fear memory in mice", *PLoS Comput. Biol.*, **9**:1 (2013), e1002853. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002853.

[2] O. I. Ivashkina, K. A. Toropova, M. A. Roshchina, K. V. Anokhin, "Formation and retrieval of associative memory for a complex signal in mice: specific involvement of hippocampal field CA1 neurons", *Neurosci. Behav. Physiol.*, **50**:9 (2020), 1185–1194. DOI: 10.1007/s11055-020-01020-y.

[3] O. I. Ivashkina, A. M. Gruzdeva, M. A. Roshchina et al., "Imaging of c-fos activity in neurons of the mouse parietal association cortex during acquisition and retrieval of associative fear memory", *Int. J. Mol. Sci.*, **22**:15 (2021), 8244. DOI: 10.3390/ijms22158244.

[4] V. D. Blondel, J.-L. Guillaume, R. Lambiotte, E. Lefebvre, "Fast unfolding of communities in large networks", *J. Stat. Mech.*, 2008, № 10, P10008. DOI: 10.1088/1742-5468/2008/10/P10008.

[5] R. C. O'Reilly, J. W. Rudy, "Conjunctive representations in learning and memory: principles of cortical and hippocampal function", *Psychol. Rev.*, **108**:2 (2001), 311–345. DOI: 10.1037/0033-295X.108.2.311.

Received on October 22, 2026

Длительность опыта и устойчивость пространственного кода гиппокампа у мышей: подходы к анализу числа и постоянства клеток места

О. И. Ивашкина*, О. С. Рогожникова‡, Н. А. Поспелов§, В. В. Плюснин¶, Н. П. Савельев‖, А. А. Иванова**, К. А. Торопова‡‡, К. В. Анохин§§

Изучено, как длительность ежедневного опыта (10, 30 или 60 мин четыре дня в новой среде) влияет на устойчивость пространственного кода области CA1 гиппокампа мышей. При 10-минутных эпизодах повторяемость клеток места между днями была вдвое ниже, а их доля не росла. Сравнение с повторяемостью, ожидаемой при независимости сессий, показало, что вывод об устойчивости кода зависит от нормировки и нулевой модели; те же меры применимы к единицам искусственных нейросетей при непрерывном обучении.

* *Ивашкина Ольга Игоревна* — м.н.с., Институт перспективных исследований мозга МГУ имени М. В. Ломоносова (ИПИМ МГУ); автор для переписки, e-mail: oivashkina@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1540-7677.

Ivashkina Olga Igorevna — Junior Researcher, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU); corresponding author.

‡ *Рогожникова Ольга Сергеевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: osrogozhnikova@gmail.com.

Rogozhnikova Olga Sergeevna — Research Assistant, IABS MSU.

§ *Поспелов Никита Андреевич* — инженер-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: nik-pos@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6637-2120.

Pospelov Nikita Andreevich — Research Engineer, IABS MSU.

¶ *Плюснин Виктор Владимирович* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: witkax@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9784-8283.

Plusnin Viktor Vladimirovich — Research Assistant, IABS MSU.

‖ *Савельев Никита Павлович* — аспирант; ИПИМ МГУ; биологический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: nksavelev2002@gmail.com, ORCID: 0009-0006-8084-735X.

Savelev Nikita Pavlovich — PhD Student; IABS MSU; Faculty of Biology, Lomonosov Moscow State University.

** *Иванова Анна Андреевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: anivis33@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2454-1288.

Ivanova Anna Andreevna — Research Assistant, IABS MSU.

‡‡ *Торопова Ксения Александровна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: xen.alexander@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3081-2133.

Toropova Ksenia Aleksandrovna — Junior Researcher, IABS MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Ключевые слова: гиппокамп, клетки места, устойчивость представлений, нулевая модель.

Постановка задачи. Баланс пластичности и устойчивости представлений — центральная проблема непрерывного обучения; в гиппокампе он виден в дрейфе представлений: набор нейронов, кодирующих среду, между сессиями сохраняется лишь частично [1]. Пусть для каждого из N нейронов животного, прослеженных в сессиях $d = 1, \ldots, 4$, $s_{i,d} = 1$, если активность нейрона i значимо связана с положением животного (клетка места), иначе $s_{i,d} = 0$, и $\pi(d) = N^{-1} \sum_i s_{i,d}$ — доля клеток места. Устойчивость обычно оценивают повторяемостью — долей клеток места, остающихся ими через Δ дней: $R(\Delta) = \sum_{d=1}^{4-\Delta} \sum_i s_{i,d}\, s_{i,d+\Delta} \big/ \sum_{d=1}^{4-\Delta} \sum_i s_{i,d}$. При независимости сессий $R(\Delta)$ равна средневзвешенной доле $\pi(d+\Delta)$, поэтому сравнение условий с разной π смешивает число клеток места и постоянство их кодирования. Задача — разделить эти составляющие.

Подход. Для каждого животного вычисляем повторяемость при независимом перемешивании меток клеток места в каждой сессии: $R_0(\Delta) = \sum_{d=1}^{4-\Delta} \pi(d)\, \pi(d+\Delta) \big/ \sum_{d=1}^{4-\Delta} \pi(d)$; с ней сравниваем $R(\Delta)$ в относительной шкале $\Lambda(\Delta) = R(\Delta)/R_0(\Delta)$ и абсолютной $R(\Delta) - R_0(\Delta)$, усредняя обе меры по $\Delta = 1, 2, 3$. Если истинная клетка места выявляется с вероятностью q независимо от сессии и своего статуса в других сессиях, а ложных выявлений нет, то R и R_0 умножаются на q, а Λ не меняется; однако $\Lambda \le 1/R_0(\Delta)$, поэтому при малой доле клеток места нужна и абсолютная мера.

Данные. Мыши C57BL/6 обоего пола ($n = 15$, 11 и 9; AAV1.CAG.GCaMP6s в дорсальной CA1, минископ) четыре дня обследовали новую арену 44×44 см с объектами по 10, 30 или 60 мин в день. Нейроны сопоставляли между днями методом CellReg [2] и анализировали прослеженные во всех сессиях (29–524 на животное). Клетки места определяли в пакете INTENSE [3] по взаимной информации сигнала нейрона и координат: двухэтапный тест на циклических сдвигах (100 и 10^4), поправка Холма при $\alpha = 0{,}01$, порог 0,04 бит. Группы сравнивали однофакторным дисперсионным анализом по животным (π и поведение — в первый и четвёртый дни).

Результаты. При 10 мин стоек было вдвое меньше уже в первый день (40 против 78 и 86 за 10 мин; $p < 10^{-5}$) при равной скорости ($p = 0{,}21$), на четвёртый день ниже была и скорость ($p = 0{,}004$). Повторяемость через

§§ *Анохин Константин Владимирович* — директор ИПИМ МГУ, д.м.н., академик РАН, e-mail: k.anokhin@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, IABS MSU; DSc (Medicine), Full Member of the Russian Academy of Sciences.

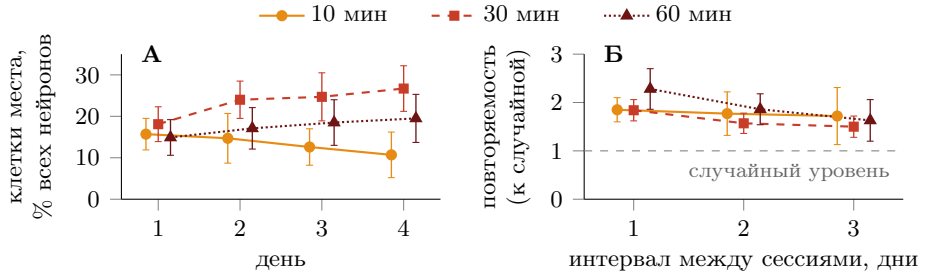


Рис. 1: А — доля клеток места среди прослеженных нейронов; Б — повторяемость клеток места относительно ожидаемой при независимости сессий; среднее по животным ±95 %-й ДИ.

сутки при 10 мин была ниже: $R(1) = 0{,}22$ против 0,45 и 0,39 ($p < 10^{-4}$). Доля клеток места, близкая в первый день (16, 18 и 15 %; $p = 0{,}49$), росла при 30 и 60 мин, но не при 10 мин (на четвёртый день 11 против 27 и 20 %, медиана 11, 35 и 48 клеток на животное; $p = 3 \cdot 10^{-4}$; рис. 1 А). Относительная повторяемость у всех 35 животных была выше случайной, но между группами не различалась ($\Lambda = 1{,}8$, 1,6 и 1,9; $p = 0{,}39$; рис. 1 Б), а абсолютное превышение при 10 мин было вдвое меньше ($R - R_0 =$ 0,07 против 0,15 и 0,15; $p = 4 \cdot 10^{-4}$). Обогащение клеток места во всех четырёх сессиях (наблюдаемое/ожидаемое) составило 9,5, 7,2 и 13 внутри животного и 30, 9,6 и 21 при объединении группы; расхождение отражает не учтённый объединённой моделью разброс π между животными (3–28, 14–34 и 9–28 %).

Обсуждение. При коротких эпизодах животные меньше исследуют среду, пул клеток места меньше и не растёт, а вывод о «менее устойчивом коде» зависит от нормировки и нулевой модели; поэтому меры устойчивости следует приводить вместе с долей клеток места и ожиданием внутри животного. Поведение меняет вероятность выявить клетку места, а Λ от неё не зависит и между группами не различалась. Повторяемость статуса отражает сохранение селективности, а не обязательно положения поля, и отсутствие различий по Λ не доказывает равенства групп. Те же меры применимы к единицам искусственных нейросетей при непрерывном обучении, где селективность единицы — значимая связь её активации с признаком входа.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Некоммерческого Фонда развития науки и образования «Интеллект».

Список литературы

[1] L. N. Driscoll, L. Duncker, C. D. Harvey, "Representational drift: emerging theories for continual learning and experimental future directions", *Current Opinion in Neurobiology*, **76** (2022), 102609. DOI: 10.1016/j.conb.2022.102609.

[2] L. Sheintuch, A. Rubin, N. Brande-Eilat, N. Geva, N. Sadeh, O. Pinchasof, Y. Ziv, "Tracking the same neurons across multiple days in Ca^{2+} imaging data", *Cell Reports*, **21**:4 (2017), 1102–1115. DOI: 10.1016/j.celrep.2017.10.013.

[3] N. Pospelov, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, A. Ivanova, V. Sotskov, K. Toropova, O. Ivashkina, V. Avetisov, K. Anokhin, "INTENSE: Detecting and disentangling neuronal selectivity in calcium imaging data", arXiv: 2603.04622 .

Статья поступила 7 октября 2026 г.

Experience duration and hippocampal spatial code stability in mice: approaches to analysing place-cell number and persistence

O. I. Ivashkina, O. S. Rogozhnikova, N. A. Pospelov, V. V. Plusnin, N. P. Savelev, A. A. Ivanova, K. A. Toropova, K. V. Anokhin

We studied how daily experience duration (10, 30 or 60 min for four days in a novel environment) affects the stability of the spatial code in mouse hippocampal area CA1. With 10-min episodes, place-cell recurrence across days was half as high and the place-cell fraction did not grow. Comparison with the recurrence expected for independent sessions showed that conclusions about code stability depend on normalization and the null model; the same measures apply to units of artificial neural networks in continual learning.

Keywords: hippocampus, place cells, representational stability, null model.

References

[1] L. N. Driscoll, L. Duncker, C. D. Harvey, "Representational drift: emerging theories for continual learning and experimental future directions", *Current Opinion in Neurobiology*, **76** (2022), 102609. DOI: 10.1016/j.conb.2022.102609.

[2] L. Sheintuch, A. Rubin, N. Brande-Eilat, N. Geva, N. Sadeh, O. Pinchasof, Y. Ziv, "Tracking the same neurons across multiple days in Ca^{2+} imaging data", *Cell Reports*, **21**:4 (2017), 1102–1115. DOI: 10.1016/j.celrep.2017.10.013.

[3] N. Pospelov, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, A. Ivanova, V. Sotskov, K. Toropova, O. Ivashkina, V. Avetisov, K. Anokhin, "INTENSE: Detecting and disentangling neuronal selectivity in calcium imaging data", arXiv: 2603.04622.

Received on October 7, 2026

Метод классификации изображений открытых и закрытых глаз на основе выпуклой линейной оболочки над конечным полем

Е. С. Ковалёва*

Предлагается метод классификации открытых и закрытых глаз, основанный на построении выпуклых линейных оболочек конечных множеств точек над полем $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Гранью называется гиперплоскость, содержащая не менее n точек исходного множества, на остальных точках которого соответствующая линейная форма принимает одно и то же ненулевое значение $\lambda_a \in \{1, 2\}$. Принадлежность точки выпуклой линейной оболочке определяется условиями $L_a(x) \in \{0, \lambda_a\}$ для всех её граней.

Ключевые слова: выпуклая линейная оболочка, конечные поля, пространство E_3^n, линейные формы, распознавание образов, классификация изображений.

1. Введение

В работе предложен метод распознавания образов, основанный на построении выпуклых линейных оболочек конечных множеств точек над полем из трёх элементов. Разработан алгоритм построения оболочек и проверки принадлежности им новых точек. Метод применён к распознаванию открытых и закрытых глаз по цифровым изображениям. Точность классификации составила 97.92% и 96.05% соответственно. Рассмотренная прикладная задача является частным случаем применения метода, который также может использоваться для классификации объектов, представленных конечными наборами дискретных признаков.

2. Основные определения

Введём основные определения выпуклой линейной оболочки над конечным полем, предложенные в работе [1].

* *Ковалёва Елена Сергеевна* — аспирант каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: e.kovaleva.msu@yandex.ru, ORCID: 0009-0004-7275-3076.

Kovaleva Elena Sergeevna — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Пусть $E_3 = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ является конечным полем из трёх элементов, а E_3^n — n-мерным линейным пространством над полем E_3.

Определение 1. *Гиперплоскостью в пространстве* E_3^n называется афинная линейная форма $L_a(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}$, где $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in E_3^{n+1}$ и $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, для которой выполняется уравнение $L_a(x) \equiv 0 \pmod 3$. Обозначим через $S_a = \{x = (x_1, ..., x_n) \in E_3^n \mid L_a(x) \equiv 0 \pmod 3\}$ множество точек, принадлежащих гиперплоскости $L_a(x)$.

Определение 2. Пусть $X \subset E_3^n$ — конечное множество точек, $L_a(x)$ — гиперплоскость в пространстве E_3^n, $X \setminus S_a = \{x \in X \mid x \notin S_a\}$. $L_a(x)$ называется *гранью выпуклой линейной оболочки* множества X, если выполняются следующие условия:

1. S_a содержит не менее n точек множества X, то есть $|X \cap S_a| \geqslant n$;
2. если $X \setminus S_a \neq \varnothing$, то существует число $\lambda_a \in \{1, 2\}$ такое, что для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняется $L_a(x) \pmod 3 \in \{0, \lambda_a\}$;
3. если $X \setminus S_a = \varnothing$, то для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ выполняется уравнение $L_a(x) \equiv 0 \pmod 3$.

Пусть точки $z \in E_3^n$. Если $X \setminus S_a \neq \varnothing$, тогда точки z, удовлетворяющие условию $L_a(z) \equiv \lambda_a \pmod 3$ для каждой грани $L_a(x)$ выпуклой линейной оболочки множества X, будем называть *внутренними точками* выпуклой линейной оболочки множества X.

Определение 3. *Выпуклой линейной оболочкой* конечного множества точек $X \subset E_3^n$ называется множество

$$\operatorname{conv}(X) = \{L_a(x) \mid L_a(x) - \text{ грань выпуклой линейной оболочки } \}.$$

Определение 4. Выпуклая линейная оболочка $\operatorname{conv}(X)$ называется *непустой*, если её внутренность непуста. В противном случае выпуклая линейная оболочка называется *пустой*.

3. Вычислительный эксперимент

Для проверки предложенного метода проведён вычислительный эксперимент по распознаванию открытых и закрытых глаз на изображениях из набора данных [2]. Эксперимент включал следующие этапы.

Шаг 1. Формирование признаковых векторов. Обучающие выборки содержали 96 изображений открытых и 93 изображения закрытых глаз. С помощью библиотеки `dlib` [3] определялись характерные точки области глаз. На основе восьми выбранных точек с номерами 38, 39, 41, 42, 44, 45, 47, 48 вычислялись нормированные разности координат $\Delta = (\widetilde{x}_{41} - \widetilde{x}_{37},\ \widetilde{y}_{41} - \widetilde{y}_{37},\ \widetilde{x}_{40} - \widetilde{x}_{38},\ \widetilde{y}_{40} - \widetilde{y}_{38}, \widetilde{x}_{47} - \widetilde{x}_{43},\ \widetilde{y}_{47} - \widetilde{y}_{43},\ \widetilde{x}_{48} - \widetilde{x}_{44},\ \widetilde{y}_{48} - \widetilde{y}_{44})$, которые после дискретизации представлялись в виде векторов в пространстве E_3^8. В результате было получено 13 уникальных векторов для открытых глаз и 11 для закрытых глаз.

Шаг 2. Построение выпуклых линейных оболочек. Для каждого класса перебирались гиперплоскости пространства E_3^8 и проверялись условия, определяющие грани выпуклой линейной оболочки. Получено 57 граней для открытых глаз и 63 для закрытых глаз.

Шаг 3. Проверка непустоты оболочек. Установлено, что среди правильно классифицированных тестовых объектов доля точек, принадлежащих внутренности выпуклой линейной оболочки и не совпадающих с обучающими точками, составляет 55.32% для открытых глаз и 64.38% для закрытых глаз. Таким образом, эксперимент подтверждает, что распознавание основано на принадлежности объектов построенным выпуклым линейным оболочкам, а не только на совпадении с обучающей выборкой.

Шаг 4. Проверка пересечения оболочек. Установлено, что построенные выпуклые линейные оболочки двух классов не содержали общих точек. Случаи, когда объект принадлежит обеим оболочкам или не принадлежит ни одной из них, в настоящей работе рассматривались.

Шаг 5. Оценка качества распознавания. На независимых тестовых выборках правильно распознано 47 из 48 изображений открытых глаз и 73 из 76 изображений закрытых глаз. Точность составила соответственно 97.92% и 96.05%.

4. Выводы

В работе разработан метод классификации на основе выпуклых линейных оболочек конечных множеств точек над полем E_3 и применён к распознаванию открытых и закрытых глаз. Точность распознавания составила 97.92% для открытых глаз и 96.05% для закрытых. Метод не требует большого объема обучающих данных и обучения параметров модели. Вычислительная сложность построения граней оценивается как $O\left((N_o + N_c)n3^{n+1}\right)$, где N_o и N_c — количество различных обучающих векторов двух классов, а n — размерность пространства признаков, равное числу характерных точек глаз.

Список литературы

[1] Е. С. Ковалёва, “Метод распознавания изображений на основе выпуклой линейной оболочки над конечным полем”, *Интеллектуальные системы. Теория и приложения*, **30**:3 (2026), 113–125.

[2] E. Kovaleva, *Faces with Open/Closed Eyes*, набор данных, дата обращения 10.03.2026, `https://www.kaggle.com/datasets/helen647135486/faces-with-open-closed-eyes`.

[3] Davis E. King, *Dlib C++ Library*, документация, дата обращения 10.03.2026, `http://dlib.net/`.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

An Image Classification Method for Open and Closed Eyes Based on the Convex Linear Hull over a Finite Field

E. S. Kovaleva

We propose a method for classifying open and closed eyes based on the construction of convex linear hulls of finite point sets over the field $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. A hyperplane is called a face if it contains at least n points of the original set and the corresponding linear form takes the same nonzero value $\lambda_a \in \{1, 2\}$ at all remaining points of the set. Membership of a point in the convex linear hull is determined by the conditions $L_a(x) \in \{0, \lambda_a\}$ for all its faces.

Keywords: convex linear hull, finite fields, E_3^n space, linear forms, pattern recognition, image classification.

References

[1] E. S. Kovaleva, “A finite-field convex linear hull-based recognition method”, *Intelligent Systems. Theory and Applications*, **30**:3 (2026), 113–125 (In Russian).

[2] E. Kovaleva, *Faces with Open/Closed Eyes*, dataset, accessed 10.03.2026, `https://www.kaggle.com/datasets/helen647135486/faces-with-open-closed-eyes`.

[3] Davis E. King, *Dlib C++ Library*, documentation, accessed 10.03.2026, `http://dlib.net/`.

Received on October 10, 2026

Применение символьной регрессии для модификации формулы Вильсона

Е. В. Колдоба*, А. Д. Говоров‡

С помощью символьной регрессии в формулу Вильсона для констант фазового равновесия (K-values) введено давление схождения. Полученные корреляции хорошо передают фазовое поведение газонефтяного месторождения заданного состава во всём диапазоне давлений.

Ключевые слова: символьная регрессия, формула Вильсона, давление схождения, K-values .

Введение. Нефть и газ содержат сотни компонентов, поэтому при фазовых переходов необходимо учитывать как можно больше количество компонентов – это можно сделать с помощью констант фазового равновесия (K-values). В газонефтяных задачах K-values — не константы, а функции давления, температуры и состава; при высоких давлениях они стремятся к единице при приближении к давлению схождения P_{conv}. При низких давлениях хорошо работает формула Вильсона, при высоких — её модификация Уитсона—Торпа, однако последняя ухудшает точность при низких давлениях. В данной работе с помощью символьной регрессии [1] в формулу Вильсона вводится P_{conv}, чтобы обеспечить корректную работу во всём диапазоне давлений.

Формула Вильсона для K-values имеет вид [2]:

$$K_i^{Wil} = \frac{p_{ci}}{P} \exp\left[5.37\,(1+\omega_i)\left(1-\frac{T_{ci}}{T}\right)\right], \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Согласно этой формуле при заданных давлении P и температуре T каждая функция K_i^{Wil} зависит только от характеристик i-го компонента: критических температуры T_{ci} и давления p_{ci}, ацентрического фактора ω_i, и не зависит от концентраций и взаимодействий с другими компонентами.

* *Колдоба Елена Валентиновна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. вычислительной механики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: elenakoldoba@mail.ru.

Koldoba Elena Valentinovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Computational Mechanics.

‡ *Говоров Александр Дмитриевич* — аспирант, кафедра вычислительной механики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alexandrdg@gmail.com.

Govorov Alexander Dmitrievich — Graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Computational Mechanics.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Известно, что при низких давлениях, когда смесь ещё можно считать идеальной, значения K-values монотонно убывают. При высоких давлениях функции K-values немонотонны и стремятся к единице. И этот предел достигается при некотором давлении схождения P_{conv}: $K_i \to 1$ при $P \to P_{\text{conv}}$ для всех i. Величина P_{conv} зависит от концентраций смеси и от взаимодействия компонентов.

Модификация формулы Вильсона для высоких давлений, предложенная Уитсоном—Торпом имеет вид [2]:

$$K_i^{Tor} = \left(\frac{p_{ci}}{P_{\text{conv}}}\right)^{A-1} \cdot \frac{\exp\left[5.37\,A(1+\omega_i)\left(1-T_{ri}^{-1}\right)\right]}{p_{ri}},\; A = 1 - \left(\frac{P-p_0}{P_{\text{conv}}-p_0}\right)^{\alpha}, \tag{2}$$

где $\alpha = 0.6$, $p_{ri} = P/p_{ci}$, $T_{ri} = T/T_{ci}$, $p_0 = 1$ бар; $A \to 1$ при низких давлениях и $A \to 0$ при $P \to P_{\text{conv}}$.

Символьная регрессия. Дано множество наблюдений:
$\{(P^{(j)}, T^{(j)}, \omega_i^{(j)}, p_{ci}^{(j)}, T_{ci}^{(j)}, P_{\text{conv}}^{(j)}, K_i^{(j)})\}_{j=1}^{M}$.

Требуется найти аналитическое выражение F такое, что

$$K_i^{(j)} \approx F\left(P^{(j)}, T^{(j)}, \omega_i^{(j)}, p_{ci}^{(j)}, T_{ci}^{(j)}, P_{\text{conv}}^{(j)}\right) \quad \text{для всех } j \text{ и } i.$$

Искомая функция F должна удовлетворять предельным переходам:

$$F\left(P \to 1 \text{ бар}\right) \approx K_i^{\text{Wil}}, \quad F\left(P \to P_{\text{conv}}\right) \to 1 \quad \text{для всех } i,$$

а также условиям монотонности: для легких компонентов: $F > 1$, $\frac{\partial F}{\partial P} < 0$ во всем диапазоне P; для всех компонентов $\frac{\partial F}{\partial P} < 0$ при низких давлениях; для тяжелых компонентов $F < 1$, $\frac{\partial F}{\partial P} > 0$ при высоких давлениях.

Символьная регрессия [1] минимизирует функционал:
$\mathcal{L} = \text{MSE}\left(K_i^{\text{pred}}, K_i^{\text{true}}\right) + \lambda\,\mathcal{R}$.

Здесь K_i^{true} — точное значение K_i i-го компонента из t-Navigator; K_i^{pred} — предсказание формулы-кандидата, предлагаемой символьной регрессией на текущем шаге эволюции; $\mathcal{R}$ — штраф за сложность; λ — параметр парсимонии; MSE вычисляется по обучающей выборке.

По завершении поиска формируется фронт Парето, элементы которого характеризуются компромиссом между точностью, сложностью. В пространство поиска входят базовые операторы $+, -, \times, /, \exp, \log, (\cdot)^a$, а также пользовательский оператор $(p_{ci}/P_{\text{conv}})^{A-1}$, где A – подвыражение, которое алгоритм выбирает из пространства поиска.

Выражение для физического штрафа:
$\lambda_{\text{conv}}\, w(P)\left(K_i^{\text{pred}}(P) - 1\right)^2$, $w(P) = \exp\left[-\frac{P_{\text{conv}}-P}{\Delta P}\right]$, где $\Delta P > 0$ — масштаб давления, λ_{conv} — коэффициент штрафа. При $P \to P_{\text{conv}}$ вес $w(P) \to 1$, а при удалении от P_{conv} убывает.

Расчет. Для газоконденсатного месторождения, состав которого представлен в таб.1, по композиционной модели симулятора t-Navigator при разных температурах вычислялись точные значения K_i^{true} и определялись давления схождения P_{conv}. При моделировании использовалось уравнение состояния Пенга-Робинсона, переменные нормировались к порядку $O(1)$.

Таблица 1: Параметры смеси

Компоненты	Концентрации	M_i (г/моль)	P_{ci} (бар)	T_{ci} (K)	ω_i
C1-C2, N_2	0.389665	17.1046	45.976	199.83	0.015
C3-C4	0.080687	51.6441	39.126	397.01	0.171
C5-C6	0.059501	78.2886	32.981	483.39	0.254
C7-C13	0.241202	126.491	27.055	615.45	0.431
C14-C20	0.108817	227.602	16.926	793.73	0.752
C21+	0.120128	473.914	9.171	919.58	1.243

Параметры численного эксперимента: $N = 6$, диапазон давлений $P = 1 \div 150$ бар, диапазон температур $T = 273 \div 800$ K, число точек обучения – 5000, число точек вблизи P_{conv} – 500, $\lambda_{\text{conv}} = 100$, $\lambda = 0.005$, число итераций = 50, число популяций = 25, размер популяции = 50, максимальный размер дерева $\nu = 30$, $\Delta P = 15$ бар. На фронте Парето выбиралась формула, которая имела приемлемую точность и удовлетворяла условиям (3)-(6).

В итоге получена формула следующего вида:

$$K_i = \left(\frac{p_{ci}}{P_{\text{conv}}}\right)^{A-1} \cdot \frac{\exp\left[5.37\, A\,(1+\omega_i)\left(1-T_{ri}^{-1}\right)\right]}{p_{ri}}, \quad A = 1 - \left(\frac{P}{P_{\text{conv}}}\right)^{\alpha},$$

где $\alpha = 0.415$.

На рис. 1 представлены зависимости K-values от давления при $T = 703$ K и $P_{\text{conv}} = 107$ бар, рассчитанные разными способами для легкого (а) и тяжелого(б) компонента. Для рассматриваемого месторождения формула Вильсона дает достаточно большие ошибки. Метод Уитсона-Торпа улучшает зависимость K-values. Расчеты, выполненные с помощью символьной регрессии дают результаты, которые ближе всего к точным значениям.

Заключение. Символьная регрессия позволила ввести P_{conv} в формулу Вильсона и получить зависимость, корректно работающую во всём диапазоне давлений и более близкую к точным значениям, чем модели Вильсона и Уитсона—Торпа.

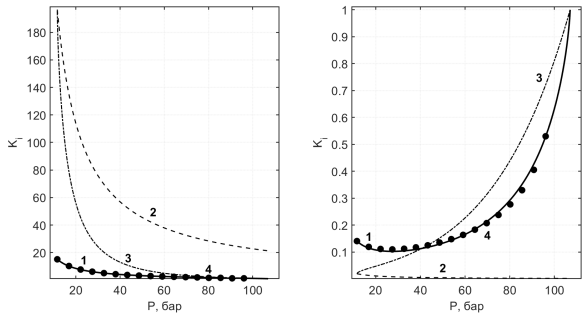


Рис. 1: Значения K-values: 1 — точные, 2 — Вильсон, 3 — Уитсон—Торп, 4 — символьная регрессия.

Список литературы

[1] M. Cranmer, “Interpretable Machine Learning for Science with PySR and SymbolicRegression.jl”, 2023, arXiv: 2305.01582.

[2] T.Ahmed, *Working Guide to Vapor-Liquid Phase Equilibria Calculations*, Gulf Professional Publishing, Amsterdam, 2009, 200 pp.

Статья поступила 6 ноября 2026 г.

Application of symbolic regression for the modification of Wilson’s formula

E. V. Koldoba, A. D. Govorov

Using symbolic regression, the convergence pressure has been incorporated into Wilson’s correlation for phase equilibrium constants (K-values). The resulting correlations accurately represent the phase behavior of an oil-and-gas reservoir with a given composition across the entire pressure range.

Keywords: symbolic regression, Wilson formula, convergence pressure, distribution coefficients .

References

[1] M. Cranmer, “Interpretable Machine Learning for Science with PySR and SymbolicRegression.jl”, 2023, arXiv: 2305.01582.

[2] T.Ahmed, *Working Guide to Vapor-Liquid Phase Equilibria Calculations*, Gulf Professional Publishing, Amsterdam, 2009, 200 pp.

Received on November 6, 2026

Сети глубокого обучения в задаче модельного управления технологическим процессом

И. С. Лазухин*, М. И. Петровский†, И. В. Машечкин§

Традиционные системы управления технологическими процессами требуют сложной экспертной настройки и часто не успевают за дрейфом характеристик оборудования. Настоящая работа направлена на разработку алгоритмов предиктивного управления, функционирующих исключительно на основе накопленных исторических данных, объединяющих сквозную дифференцируемость нейросетевой модели процесса с классическими методами математического программирования. Работоспособность и переносимость разработанных методов оценены на данных симулятора Теннесси Истмана и реального нефтеперерабатывающего комплекса. Результаты демонстрируют эффективное управление процессом и удержание технологических параметров в заданных ограничениях.

Ключевые слова: модели со структурированным пространством состояний, обучение с подкреплением, цифровой двойник.

1. Задача предиктивного управления

В основе предиктивного управления (англ. Model Predictive Control, MPC) лежит принцип скользящего горизонта: динамическая модель объекта прогнозирует траектории контролируемых переменных на заданный горизонт планирования, а оптимизатор находит последовательность управляющих

* *Лазухин Иван Сергеевич* — м.н.с. каф. интеллектуальных информационных технологий ф-та ВМК МГУ, e-mail: ivanlazuhin@mail.ru.

Lazuhin Ivan Sergeevich — Research Assistant at Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Intelligent Information Technologies Department.

† *Петровский Михаил Игоревич* — к.ф-м.н., доцент каф. интеллектуальных информационных технологий ф-та ВМК МГУ, e-mail: michael@cs.msu.ru.

Petrovskiy Mikhail Igorevich — Ph.D., Associate Professor at Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Intelligent Information Technologies Department.

§ *Машечкин Игорь Валерьевич* — д.ф-м.н., профессор, заведующий каф. интеллектуальных информационных технологий ф-та ВМК МГУ, e-mail: mash@cs.msu.ru.

Mashechkin Igor Valeryevich — Ph.D., Professor at Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Head of Intelligent Information Technologies Department.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

воздействий, минимизирующую заданный функционал качества при соблюдении технологических ограничений. На каждом шаге управления из полученной управляющей последовательности отбирается только первый шаг. Классическая парадигма MPC, опирающаяся на знания предметной области, в последние годы переживает сдвиг в сторону предиктивного управления на основе данных [1].

Главной целью данного исследования является разработка алгоритма управления сложными производственными процессами исключительно на основе накопленных исторических данных. Ключевым требованием к предложенному подходу выступает его инвариантность к явным физико-химическим моделям оборудования, что должно обеспечить переносимость алгоритма между различными производственными установками без необходимости их индивидуальной экспертной настройки.

2. Предложенные подходы

Существующие исследования в области либо ограничены системами малой размерности [2], либо жестко привязаны к физико-химическим уравнениям, описывающим конкретный объект [3].

Технологические объекты рассматриваются в виде временных рядов, дискретно дифференцированных для устранения трендов. Исследование опирается на два источника данных: стандартный бенчмарк-симулятор Теннесси Истмана [4] (41 контролируемый датчик – CV и 12 управляющих воздействий – MV) и реальный нефтеперерабатывающий комплекс (35 CV, 7 MV). Для эффективного моделирования многомерных процессов во времени были выбраны модели пространств состояний S4 [5], обеспечивающие эффективное автоматическое дифференцирование на длительных горизонтах (граф не требует развертки) относительно классических рекуррентных сетей. Предложено три класса моделей управления, использующих оптимизатор второго порядка (метод внутренней точки):

1. Прямая одношаговая модель – строит будущие CV по скользящему окну процесса: $\widehat{CV}_{k+1} = P_f(CV_k, CV_{k-1}, \dots, MV_k, MV_{k-1}, \dots)$.
2. Статическая модель – предсказывает траекторию CV непосредственно по последовательности управления: $\widehat{CV}_k, \widehat{CV}_{k-1}, \cdots = P_s(MV_k, MV_{k-1}, \dots)$.
3. Обратная модель – принцип инверсно-ориентированного управления (вводится сдвиг p): $\widehat{MV}_{k-p}, \widehat{MV}_{k-p-1}, \cdots = P_r(CV_k, CV_{k-1}, \dots)$.

Поскольку задача инверсии в условиях немонотонной динамики и шумов является некорректной по Адамару, целевой функционал инверсной оп-

тимизации дополняется регуляризацией, минимизирующей отклонение генерируемого управления от исторического тренда заданного сдвигом p. В качестве альтернативного метода исследована схема обучения с подкреплением, где веса суррогатных моделей используются для инициализации Критика и Актора, что позволяет безопасно развертывать обучение без риска аварийных остановок в рамках среды реального производства.

3. Результаты

Все разработанные подходы продемонстрировали способность устойчиво управлять симулятором в течение длительных интервалов времени (100 минут) без нарушения технологических ограничений. Прямая одношаговая модель и метод на основе обучения с подкреплением показали наилучшие метрики следования заданной траектории стоимости, однако последний продемонстрировал повышенную дисперсию и худшую стабильность по метрикам среднеквадратичного отклонения стоимости. Статическая модель показывает хорошие результаты на симуляторе, но из-за сильного сглаживания оказывается чувствительной к зашумленным реальным данным нефтепереработки.

Наиболее перспективным и стабильным методом для внедрения на реальном производстве показана обратная модель (инверсно-ориентированное управление). За счет перевода сложных нелинейных ограничений на CV в интервальные ограничения на входы оптимизатора и упрощения задачи моделирования процесса, обратный подход обеспечивает более стабильные траектории и надежность поддержания процесса в заданных технологических ограничениях, что подтверждается исследованием производных состояний процесса Теннесси.

Список литературы

[1] M. M. Morato, M. S. Felix, “Data Science and Model Predictive Control: A survey of recent advances on data-driven MPC algorithms”, *Journal of Process Control*, **144**:3 (2024), 103327. DOI: 10.1016/j.jprocont.2024.103327.

[2] M. Zakwan, V. Gupta, A. Karimi, E. Balta, G. Ferrari-Trecate, “Controller design for structured state-space models via contraction theory”, arXiv: 2604.07069.

[3] L. L. Fonseca, L. Böttcher, B. Mehrad, R. C. Laubenbacher, “Surrogate modeling and control of medical digital twins”, arXiv: 2402.05750.

[4] J. J. Downs, E. F. Vogel, "A plant-wide industrial process control problem", *Computers & chemical engineering*, **17**:3 (1993), 245–255. DOI: 10.1016/0098-1354(93)80018-I.

[5] A. Gu, K. Goel, C. Ré, "Efficiently modeling long sequences with structured state spaces", arXiv: 2111.00396.

Статья поступила 25 октября 2026 г.

Deep learning models for predictive control of technological processes

I. S. Lazuhin, M. I. Petrovskiy, I. V. Mashechkin

Traditional control systems for complex technological processes require extensive expert tuning and often fail to adapt to the drift in real equipment characteristics. This study aims to develop purely data-driven predictive control algorithms, combining the end-to-end differentiability of the surrogate model with classical mathematical programming methods. The performance and transferability of the developed methods have been validated using data from the industrial Tennessee Eastman process simulator and a real oil refinery complex. The results demonstrate effective process control and reliable maintenance of technological parameters within specified operational constraints.

Keywords: structured state-space models, reinforcement learning, digital twin.

References

[1] M. M. Morato, M. S. Felix, "Data Science and Model Predictive Control: A survey of recent advances on data-driven MPC algorithms", *Journal of Process Control*, **144**:3 (2024), 103327. DOI: 10.1016/j.jprocont.2024.103327.

[2] M. Zakwan, V. Gupta, A. Karimi, E. Balta, G. Ferrari-Trecate, "Controller design for structured state-space models via contraction theory", arXiv: 2604.07069.

[3] L. L. Fonseca, L. Böttcher, B. Mehrad, R. C. Laubenbacher, "Surrogate modeling and control of medical digital twins", arXiv: 2402.05750.

[4] J. J. Downs, E. F. Vogel, "A plant-wide industrial process control problem", *Computers & chemical engineering*, **17**:3 (1993), 245–255. DOI: 10.1016/0098-1354(93)80018-I.

[5] A. Gu, K. Goel, C. Ré, "Efficiently modeling long sequences with structured state spaces", arXiv: 2111.00396.

Received on October 25, 2026

Двухклассовая классификация тактильного воображения по данным многоканальной ЭЭГ

А. А. Мирошников*, Л. В. Яковлев[x], М. В. Морозова[§], А. Я. Каплан[¶]

В трёх экспериментах проанализированы 3826 эпох тактильного воображения (ТВ) и покоя из 72 записей ЭЭГ, полученных от 60 уникальных испытуемых. Для индивидуальной классификации использовались регуляризованные ковариации и логистическая регрессия. Средняя сбалансированная точность при пятикратной проверке по эпохам составила 76,03–78,42% по наборам; медиана — 80,00%.

Ключевые слова: электроэнцефалография, тактильное воображение, классификация, интерфейс мозг–компьютер.

---

* *Мирошников Андрей Алексеевич* — инженер-лаборант каф. физиологии человека и животных биологического ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: andrej.miroshnikow@gmail.com.

Miroshnikov Andrei Alekseevich — Laboratory Engineer, Department of Human and Animal Physiology, Faculty of Biology, Lomonosov Moscow State University.

x *Яковлев Лев Владимирович* — канд. биол. наук, старший научный сотрудник каф. физиологии человека и животных биологического ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова; старший преподаватель биологического факультета Университета МГУ–ППИ в Шэньчжэне, КНР, e-mail: leojackovlev@gmail.com.

Yakovlev Lev Vladimirovich — Candidate of Biological Sciences, Senior Researcher, Department of Human and Animal Physiology, Faculty of Biology, Lomonosov Moscow State University; Senior Lecturer, Faculty of Biology, Shenzhen MSU-BIT University, China.

§ *Морозова Марина Витальевна* — младший научный сотрудник Центра нейрокогнитивных исследований (МЭГ-центр) Московского государственного психолого-педагогического университета (ФГБОУ ВО МГППУ), e-mail: m.morozova.v@yandex.ru.

Morozova Marina Vitalevna — Junior Researcher, Center for Neurocognitive Research (MEG Center), Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE).

¶ *Каплан Александр Яковлевич* — д-р биол. наук, профессор каф. физиологии человека и животных биологического ф-та МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: akaplan@mail.ru.

Kaplan Alexander Yakovlevich — Doctor of Biological Sciences, Professor, Department of Human and Animal Physiology, Faculty of Biology, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

1. Постановка задачи

Тактильное воображение (ТВ) рассматривается как возможная команда для интерфейса мозг–компьютер [1]. Оценивалась точность различения ТВ и покоя по ЭЭГ в трёх наборах данных.

2. Материал и методы

Исследованы 72 записи ЭЭГ из трёх экспериментов (22, 20 и 30 записей); число уникальных испытуемых составило $N_{\text{исп}} = 60$. Пиктограмма руки служила сигналом к началу мысленного воспроизведения прикосновения к пальцам правой руки; в эпохах покоя предъявлялись многоугольники для мысленного счёта [1]. Проанализированы 2073 эпохи ТВ и 1753 эпохи покоя: по наборам 670/650, 203/203 и 1200/900. ЭЭГ регистрировалась по 127 электродам системы 10–05 при 1000 Гц с общим средним референтом (CAR); эпохи не исключались. Сигнал фильтровался в полосе 6–40 Гц; окно анализа составляло 0,5–3,5 с от начала эпохи.

Для каждой записи обучалась отдельная модель. Ковариация каждой эпохи оценивалась методом Ледуа–Вольфа [2]:

$$C_i = (1 - \lambda_i) S_i + \lambda_i \frac{\operatorname{tr}(S_i)}{127} I. \tag{1}$$

Опорная матрица G — аффинно-инвариантное риманово среднее ковариаций обучающих эпох обоих классов [3]. Признаки получали по формуле

$$\mathbf{x}_i = \operatorname{vec}_{\text{sym}}\left[\log\left(G^{-1/2} C_i G^{-1/2}\right)\right]. \tag{2}$$

Здесь S_i — выборочная ковариация, λ_i — коэффициент регуляризации, $\operatorname{vec}_{\text{sym}}$ — векторизация симметричной матрицы с множителем $\sqrt{2}$ для внедиагональных элементов. Применялась логистическая регрессия с L2-регуляризацией ($C = 1$) и балансировкой классов. При стратифицированной пятикратной проверке по эпохам G и параметры модели вычислялись только на обучающей части. Сбалансированная точность $BA = \frac{1}{2}(TPR + TNR)$, где TPR и TNR — доли верно распознанных эпох ТВ и покоя. Для каждой записи усреднялись 5 значений BA; по полученным индивидуальным оценкам вычислялись среднее и медиана для каждого набора.

3. Результаты

Во всех 72 записях сбалансированная точность превышала 50%; средняя точность по наборам — 76,03–78,42%, медиана по всем записям — 80,00% (табл. 1).

Таблица 1: Сбалансированная точность различения ТВ и покоя, %

Набор	Записей	Среднее	Медиана	Точность > 75%, n (%)
1	22	76,03	78,45	12 (54,5)
2	20	78,42	80,00	11 (55,0)
3	30	77,82	82,29	22 (73,3)
Всего	72	77,44	80,00	45 (62,5)

4. Обсуждение и заключение

Во всех трёх наборах показана возможность индивидуального различения ТВ и покоя по ЭЭГ, что позволяет рассматривать ТВ как команду интерфейса мозг–компьютер. Влияние различий зрительных сигналов и зависимости соседних эпох на оценку точности предстоит уточнить. Также необходима проверка переноса классификатора на независимые записи и его работы в реальном времени.

Список литературы

[1] L. Yakovlev, N. Syrov, A. Miroshnikov, M. Lebedev, A. Kaplan, “Event-Related Desynchronization Induced by Tactile Imagery: an EEG Study”, *eNeuro*, **10**:6 (2023), ENEURO.0455-22.2023. DOI: 10.1523/ENEURO.0455-22.2023.

[2] O. Ledoit, M. Wolf, “A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices”, *Journal of Multivariate Analysis*, **88**:2 (2004), 365–411. DOI: 10.1016/S0047-259X(03)00096-4.

[3] A. Barachant, S. Bonnet, M. Congedo, C. Jutten, “Multiclass Brain–Computer Interface Classification by Riemannian Geometry”, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **59**:4 (2012), 920–928. DOI: 10.1109/TBME.2011.2172210 .

Статья поступила 10 ноября 2026 г.

Binary Classification of Tactile Imagery Using Multichannel EEG

A. A. Miroshnikov, L. V. Yakovlev, M. V. Morozova, A. Y. Kaplan

Across three experiments, 72 EEG recordings from 60 unique participants and all 3,826 tactile imagery (TI) and rest epochs were analyzed. Individual logistic regression models used regularized covariance features. In fivefold epoch-wise cross-validation, mean balanced accuracy ranged from 76.03% to 78.42% across datasets; the median of 72 estimates was 80.00%.

Keywords: electroencephalography, tactile imagery, classification, brain–computer interface.

References

[1] L. Yakovlev, N. Syrov, A. Miroshnikov, M. Lebedev, A. Kaplan, "Event-Related Desynchronization Induced by Tactile Imagery: an EEG Study", *eNeuro*, **10**:6 (2023), ENEURO.0455-22.2023. DOI: 10.1523/ENEURO.0455-22.2023.

[2] O. Ledoit, M. Wolf, "A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices", *Journal of Multivariate Analysis*, **88**:2 (2004), 365–411. DOI: 10.1016/S0047-259X(03)00096-4.

[3] A. Barachant, S. Bonnet, M. Congedo, C. Jutten, "Multiclass Brain–Computer Interface Classification by Riemannian Geometry", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **59**:4 (2012), 920–928. DOI: 10.1109/TBME.2011.2172210.

Received on November 10, 2026

Компактное представление положения в автокодировщиках нейронной активности

М. А. Оробец*, Н. А. Поспелов‡, В. В. Плюснин§, К. В. Анохин¶

Активность нейронных популяций описывают кодом малой размерности, и от метода зависит, что из этого кода удаётся прочитать. На синтетических записях кальциевой активности мы сравнили автокодировщик с линейными методами и методами обучения многообразий. Когда клетки кодируют только положение животного, лучше всех его передаёт UMAP; когда в активности есть и другие сигналы, при 8 измерениях положение точнее всего читается из кода автокодировщика линейным декодером, а когда клеток, кодирующих сигнал, не связанный с поведением, больше, чем клеток места, положение по его коду из 5 измерений предсказывается точнее, чем по кодам остальных методов.

Ключевые слова: автокодировщик, снижение размерности, клетки места, синтетические данные.

Постановка задачи. Активность популяции нейронов описывают кодом малой размерности: линейными методами (PCA, FA, ICA), методами обучения многообразий (Isomap, UMAP) и автокодировщиками. Мы проверили на синтетических записях, где известно, к чему селективна каждая клетка, как преимущество автокодировщика при малом числе измерений зависит от других сигналов в активности.

Данные. 48 синтетических записей по 60 мин (20 кадров/с) построены генератором driada [1]: 3 популяции по 16 записей, 130–1000 клеток. По-

* *Оробец Маргарита Алексеевна* — лаборант, Федеральный центр мозга и нейротехнологий ФМБА России; автор для переписки, e-mail: margaret.orobets@gmail.com, ORCID: 0009-0002-4231-5329.

Orobets Margarita Alekseevna — Lab Assistant, Federal Center for Brain and Neurotechnologies FMBA of Russia; corresponding author.

‡ *Поспелов Никита Андреевич* — инженер-исследователь, Институт перспективных исследований мозга МГУ имени М. В. Ломоносова (ИПИМ МГУ), e-mail: nik-pos@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6637-2120.

Pospelov Nikita Andreevich — Research Engineer, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU).

§ *Плюснин Виктор Владимирович* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: witkax@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9784-8283.

Plusnin Viktor Vladimirovich — Research Assistant, IABS MSU.

¶ *Анохин Константин Владимирович* — директор ИПИМ МГУ, д.м.н., академик РАН, e-mail: k.anokhin@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, IABS MSU; DSc (Medicine), Full Member of the Russian Academy of Sciences.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

пуляции: клетки места (все клетки); смешанная (40 % клеток места, 20 % направления головы, по 10 % скорости, скрытой переменной — медленного нестационарного случайного процесса, не связанного с поведением, клеток с несколькими переменными и молчащих); с преобладанием скрытой переменной (30 % клеток места, 40 % скрытой переменной, 30 % молчащих). Кальциевый сигнал — спайки, свёрнутые с экспонентой (постоянная затухания 2 с), плюс шум.

Методы. Каждый метод строил код размерности 5, 8 и 12 по первым 80 % записи без их последних 30 с; оценочной частью служили последние 20 %. Активность нейронов приводилась к $[0, 1]$; нормировка только по обучающей части меняла среднюю корреляцию не более чем на 0.02. Параметры подбирались на отдельной когорте записей: у Isomap и UMAP 100 и 50 соседей из 15–200, у автокодировщика скрытый слой 64 нейрона, Adam (10^{-3}), до 400 эпох. Мерой качества служила корреляция предсказания переменной по коду (линейной регрессией или методом k ближайших соседей с равными весами, k из 5, 15, 50, 150 выбиралось на проверочной части обучающих данных) с истинной переменной на оценочной части; для положения корреляции с координатами x и y усреднялись. Сравнения парные по 16 записям (критерий Уилкоксона) с поправкой Бонферрони на все 90 сравнений ($p < 0.00056$).

Результаты. Когда клетки кодировали только положение, лучше всех его линейно передавал UMAP (при 5 измерениях 0.87 против 0.69 у автокодировщика; рис. 1, а), а с нелинейным декодером все методы при 5–12 измерениях давали корреляцию 0.93–0.95. В популяциях с другими сигналами UMAP терял положение (при 8 измерениях 0.58 и 0.23; рис. 1, б, в). В смешанной популяции при 8 измерениях автокодировщик передавал положение линейным декодером точнее всех методов без нейросетей (0.72 против 0.66 у PCA и ICA, во всех 16 записях, $p < 0.001$); стандартное отклонение его корреляции между запусками с разной инициализацией составляло в среднем 0.03, меньше этого перевеса. С нелинейным декодером FA достигал того же уровня (0.83 у FA против 0.85 у автокодировщика): положение есть в обоих кодах, но из кода автокодировщика его извлекает уже линейный декодер. Isomap в этой популяции уступал PCA (0.57 против 0.66) из-за переноса вложения на новые кадры: если вложение строилось по всей записи, Isomap давал 0.63. В популяции с преобладанием скрытой переменной при 5 измерениях автокодировщик опережал все методы и с линейным декодером (0.58 против 0.25 у PCA и ICA), и с нелинейным (0.65 против 0.37 у UMAP), во всех 16 записях ($p < 0.001$). При 12 измерениях перевес автокодировщика над FA и PCA становился незначимым.

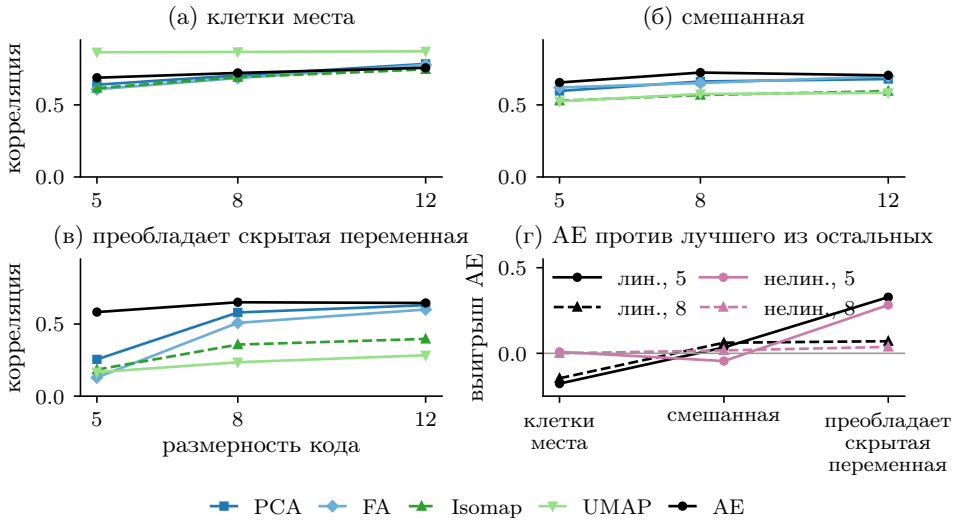


Рис. 1: Корреляция предсказания положения на оценочной части, среднее по 16 записям. (а)–(в) Линейный декодер: (а) клетки места; (б) смешанная популяция; (в) преобладание скрытой переменной. (г) Выигрыш AE (автокодировщика) над лучшим из PCA, FA, Isomap и UMAP при 5 и 8 измерениях, линейный и нелинейный декодер. ICA совпадает с PCA.

Обсуждение. Активность нейронных популяций лежит на многообразиях малой размерности [2, 3]. Выбор метода зависит от того, что ещё есть в активности: если популяция кодирует одну переменную, её многообразие лучше всего восстанавливают методы обучения многообразий. Если в активности есть и другие сигналы, в том числе не связанные с поведением, автокодировщик сохраняет положение в коде малой размерности: линейные методы и UMAP при 8 измерениях передают его линейному декодеру хуже, а при преобладании скрытой переменной и 5 измерениях теряют. Если так же устроены и реальные записи, где закодированные переменные известны не полностью, то отсутствие переменной в коде линейного метода малой размерности ещё не означает её отсутствия в активности популяции.

Список литературы

[1] N. Pospelov, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, A. Ivanova, V. Sotskov, M. Orobets, K. Toropova, O. Ivashkina, V. Avetisov, K. Anokhin, “DRIADA: an open-source Python toolkit for linking single-neuron selectivity and population activity to behavior”, 2026, arXiv: 2607.00851. DOI: 10.48550/arXiv.2607.00851.

[2] J. A. Gallego, M. G. Perich, L. E. Miller, S. A. Solla, "Neural Manifolds for the Control of Movement", *Neuron*, **94**:5 (2017), 978–984. DOI: 10.1016/j.neuron.2017.05.025.

[3] E. Altan, S. A. Solla, L. E. Miller, E. J. Perreault, "Estimating the dimensionality of the manifold underlying multi-electrode neural recordings", *PLOS Computational Biology*, **17**:11 (2021), e1008591. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1008591.

Статья поступила 9 ноября 2026 г.

Compact representation of position in autoencoders of neural activity

M. A. Orobets, N. A. Pospelov, V. V. Plusnin, K. V. Anokhin

Neural population activity is described by low-dimensional codes, and the method decides what can be read from the code. On synthetic calcium imaging recordings we compared an autoencoder with linear and manifold learning methods. When cells encode only the animal's position, UMAP conveys it best; when the activity carries other signals too, position is read most accurately from the autoencoder's code by a linear decoder at 8 dimensions, and when cells encoding a signal unrelated to behavior outnumber place cells, position is predicted more accurately from its 5-dimensional code than from the codes of the other methods.

Keywords: autoencoder, dimensionality reduction, place cells, synthetic data.

References

[1] N. Pospelov, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, A. Ivanova, V. Sotskov, M. Orobets, K. Toropova, O. Ivashkina, V. Avetisov, K. Anokhin, "DRIADA: an open-source Python toolkit for linking single-neuron selectivity and population activity to behavior", 2026, arXiv: 2607.00851. DOI: 10.48550/arXiv.2607.00851.

[2] J. A. Gallego, M. G. Perich, L. E. Miller, S. A. Solla, "Neural Manifolds for the Control of Movement", *Neuron*, **94**:5 (2017), 978–984. DOI: 10.1016/j.neuron.2017.05.025.

[3] E. Altan, S. A. Solla, L. E. Miller, E. J. Perreault, "Estimating the dimensionality of the manifold underlying multi-electrode neural recordings", *PLOS Computational Biology*, **17**:11 (2021), e1008591. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1008591.

Received on November 9, 2026

Робастные методы ускорения сходимости со сложным поведением

Д. В. Парфенов*, Р. Г. Крейнин‡

Рассматривается задача ускорения сходимости числовых последовательностей и рядов при сложном поведении остатка: смене знака, наличии нескольких асимптотических компонент, постепенном снижении точности вычислений. Проводится сравнительный анализ классических и новых нелинейных преобразований (преобразования Левина и их варианты t, u и v, преобразования Левина–Сиди, преобразование Сиди $d^{(m)}$, pJ-преобразование Хомайера, W-преобразование Лубкина, ε-алгоритм Винна, θ-алгоритм Брезински и др.) на широком наборе тестовых последовательностей с точно известным пределом. Вычисления выполняются с регулируемой точностью до 100 значащих десятичных цифр. Показано, что ни одно преобразование не является универсально лучшим; по результатам экспериментов выделены два набора взаимодополняющих методов: быстрый, включающий алгоритм Драммонда, Сиди $d^{(m)}$, ε-алгоритм Винна и высокоточный, включающий θ-алгоритм Брезински, Сиди $d^{(m)}$ и ε-алгоритм Винна. Среди рассмотренных тестовых последовательностей обнаружен особый класс последовательностей с притягивающими и отталкивающими точками, требующий дальнейшего исследования.

Ключевые слова: числовые ряды, ускорение сходимости, преобразование Левина, преобразование Левина–Сиди, pJ-преобразование Хомайера, θ-алгоритм Брезински, арифметика конечной точности, интервальная арифметика.

Ускорение сходимости числовых последовательностей и рядов остаётся актуальной задачей вычислительной математики как в теоретическом, так и в практическом отношении. Даже при существовании соответствующего предела его оценка может требовать вычисления неприемлемо большого числа членов, а поведение частичных сумм нередко осложняется сменой

Парфенов Денис Васильевич — канд. техн. наук, доцент, МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва, e-mail: promasterden@yandex.ru.

Parfenov Denis Vasilyevich — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, MIREA — Russian Technological University, Moscow.

‡*Крейнин Роман Геннадьевич* — студент магистратуры, МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва, e-mail: kreynin.rg@mail.ru, ORCID: 0009-0001-1466-3038.

Kreinin Roman Gennadievich — Master's student, MIREA — Russian Technological University, Moscow.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

знака, несколькими асимптотическими компонентами или значительным постепенным снижением точности при вычислениях.

Пусть числовая последовательность $S_n \to S$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; \forall n \geq N(\varepsilon) : \quad |S_n - S| < \varepsilon. \tag{1}$$

По исходным членам строится преобразованное приближение $A_{n,k} = \mathcal{T}_{n,k}(S_0, \ldots, S_{m-1})$, где k — порядок преобразования, а m — число фактически использованных исходных членов. Классическое условие ускорения при сохранении предела имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n,k} - S}{S_n - S} = 0, \tag{2}$$

если отношение определено для достаточно больших n (фиксированное k) [2, 4]. Для иллюстрации идеи нелинейного ускорения можно рассмотреть преобразование Эйткена:

$$A_n = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}, \quad \Delta S_n = S_{n+1} - S_n, \quad \Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n. \tag{3}$$

В работе рассматриваются наиболее перспективные как новые, так и классические преобразования: Левина [1] и их варианты t, u и v, преобразования Левина–Сиди [2], преобразование Сиди $d^{(m)}$ [2], pJ-преобразование Хомайера, W-преобразование Лубкина, ε-алгоритм Винна [3], θ-алгоритм Брезински [4] и другие. Эти методы опираются на разные модели остатка, по-разному используют информацию о членах последовательности и моделируют их динамику, поэтому их эффективность может существенно различаться в зависимости от класса тестовой задачи.

Для тестов берутся $S_n = S + r_n$ с известным S; в табл. 1 указаны основные модели ускоряемых последовательностей ($p, q > 0$, $\beta > 1$, $|\lambda_j| < 1$).

Для каждого из семи классов рассматривались десять последовательностей с различными параметрами. Вычисления проводились в арифметике двойной точности и с регулируемой точностью до 100 значащих десятичных цифр при одинаковом бюджете $N = 100$ исходных членов.

Для алгоритма $\mathcal{T}$, вернувшего результат A_n, последовательность теста j считалась успешно ускоренной $I_{\mathcal{T}}(j) = 1$, если метод уменьшал абсолютную ошибку в десятичных порядках по отношению к исходной последовательности:

$$I_{\mathcal{T}}(j) = [G_j(\mathcal{T}) > 0], \quad G_j(\mathcal{T}) = \log_{10} \frac{|S^{(j)}_{m_j-1} - S^{(j)}|}{|A^*_{\mathcal{T},j} - S^{(j)}|}, \tag{4}$$

Таблица 1: Классы тестовых последовательностей

Класс	Остаток r_n	Методы
1. Степенная, медленная	$a(n+\beta)^{-p}$ (малое p)	ЧВ, С
2. Логарифмическая	$a[\ln(n+\beta)]^{-p}$	ЛС, Д
3. Знакопеременная	$a(-1)^n(n+\beta)^{-p}$	Лб, Б
4. Осциллирующая	$a\sin(\omega n+\varphi)(n+\beta)^{-p}$	С, Ср
5. Сумма экспонент	$\sum_{j=1}^{r} a_j\lambda_j^n$	Эп, С
6. Смешанная	$a(n+\beta)^{-p}+b(-1)^n(n+\beta)^{-q}$	С, Ср
7. Нерегулярная	$\eta_n(n+\beta)^{-p}$, $\lvert\eta_n\rvert\le 1$	Ср, С

ЛС — Левин–Сиди m; Д — Драммонд; Лб — Лубкин W; Б — Брезински θ; Эп — ε-алгоритм Винна; С — Сиди $d^{(m)}$; Ср — вариант преобразования Сиди $d^{(m)}$ с параметром шага; ЧВ — Чанг–Винн. В последнем столбце приведены методы, показавшие наибольший выигрыш в точности на соответствующих классах при 100 значащих десятичных цифрах (см. $M_c(\mathcal{T})$ в (5)).

где $A^*_{\mathcal{T},j}$ — приближение с наименьшей ошибкой на траектории метода, m_j — число использованных для него исходных членов.

Нулевые и численно опасные знаменатели фиксировались как срывы преобразования; построение траектории прекращалось, а при оценке точности учитывались все корректные приближения, полученные до срыва.

Робастным называем метод, который успешно выполняет ускорение сходимости $G_j(\mathcal{T})>0$ для различных классов, параметров тестов и точности вычислений при отсутствии или минимальном количестве срывов.

Точность метода $\mathcal{T}$ оценивалась по медиане внутриклассовых медиан выигрыша $M(\mathcal{T})$:

$$M_c(\mathcal{T})=\operatorname{med}_{j\in J_c} G_j(\mathcal{T}),\quad M(\mathcal{T})=\operatorname{med}_{c=1,\dots,7} M_c(\mathcal{T}), \tag{5}$$

где J_c — множество индексов тестовых последовательностей класса c, $M_c(\mathcal{T})$ — медианный выигрыш метода внутри класса.

Скорость достижения наилучшей точности оценивалась по числу использованных исходных членов m, соответствующему приближению с минимальной абсолютной ошибкой. Итоговый показатель $N(\mathcal{T})$ определялся как медиана внутриклассовых медиан этих значений: $N(\mathcal{T})=\operatorname{med}_{c=1,\dots,7}\left(\operatorname{med}_{j\in J_c} m^*_j\right)$, где m^*_j соответствует наилучшему приближению для последовательности j. Меньшее значение означает более быстрое достижение наилучшей точности.

Сопоставление проводилось отдельно для арифметики двойной точности и для 100 значащих десятичных цифр. Результаты для 100-значных вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2: Результаты сравнения преобразований на 70 последовательностях

Преобразование	I	Мед. выигрыш M	Число членов N
Сиди $d^{(m)}$	68	17,968	95
Винна ε	67	7,036	100
Брезински θ	66	7,257	100
Драммонд	66	1,947	100

Эксперименты не выявили единого лидирующего преобразования, одинаково эффективного на всех рассмотренных классах. Тем не менее в проведённых испытаниях были выделены два набора взаимодополняющих методов: *быстрый* — включающий алгоритм Драммонда, Сиди $d^{(m)}$, ε-алгоритм Винна; *высокоточный* — θ-алгоритм Брезински, Сиди $d^{(m)}$ и ε-алгоритм Винна. Эти наборы обеспечили ускорение на каждом из семи рассмотренных классов, различаясь глубиной ускорения и числом использованных членов исходных последовательностей.

Среди рассмотренных тестовых последовательностей был обнаружен особый класс последовательностей с притягивающими и отталкивающими точками, характеризующийся сложным поведением в арифметике конечной точности. Это требует как аналитического, так и экспериментального дополнительного исследования с использованием интервальной арифметики, вычислений с адаптивной повышенной точностью и совместным анализом как динамики остатков, так и численной устойчивости.

Список литературы

[1] D. Levin, “Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences”, *Int. J. Comput. Math.*, **3** (1972), 371–388. DOI: 10.1080/00207167308803075.

[2] A. Sidi, *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511546815.

[3] P. Wynn, “On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation”, *Math. Tables Other Aids Comput.*, **10** (1956), 91–96. DOI: 10.2307/2002183.

[4] C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia, *Extrapolation Methods: Theory and Practice*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

Статья поступила 20 октября 2026 г.

Robust methods for accelerating convergence with complex behavior

D. V. Parfenov, R. G. Kreinin

The problem of accelerating the convergence of numerical sequences and series under complex behavior of the remainder is considered: sign changes, multiple asymptotic components, gradual loss of computational accuracy. A comparative analysis of classical and new nonlinear transformations (Levin's transformations and their t, u, v variants, Levin–Sidi transformations, Sidi's $d^{(m)}$-transformation, Homeier's pJ-transformation, Lubkin's W-transformation, Wynn's ε-algorithm, Brezinski's θ-algorithm, etc.) is carried out on a wide set of test sequences with exactly known limits. Computations are performed with adjustable precision up to 100 significant decimal digits. It is shown that no single transformation is universally the best; based on the experimental results, two complementary sets are identified: a fast set comprising Drummond's transformation, Sidi's $d^{(m)}$-transformation, and Wynn's ε-algorithm, and a high-accuracy set comprising Brezinski's θ-algorithm, Sidi's $d^{(m)}$-transformation, and Wynn's ε-algorithm. A special class of sequences with attracting and repelling points is identified among the test sequences, requiring further investigation.

Keywords: numerical series, convergence acceleration, Levin's transformation, Levin–Sidi transformation, Homeier's pJ-transformation, Brezinski's θ-algorithm, finite-precision arithmetic, interval arithmetic.

References

[1] D. Levin, "Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences", *Int. J. Comput. Math.*, **3** (1972), 371–388. DOI: 10.1080/00207167308803075.

[2] A. Sidi, *Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511546815.

[3] P. Wynn, "On a device for computing the $e_m(S_n)$ transformation", *Math. Tables Other Aids Comput.*, **10** (1956), 91–96. DOI: 10.2307/2002183.

[4] C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia, *Extrapolation Methods: Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

Received on October 20, 2026

Стохастическая модель сплайсинга CD44 с переносом и связыванием ESRP1 и ESRP2

А. А. Пирогов*

Построена дискретная стохастическая модель выбора стыков вариабельной области гена CD44. Модель описывает перенос белков ESRP1 и ESRP2 между ядром и цитоплазмой, их связывание с пре-мРНК и последовательное образование стыков с экзонами v8, v9 и v10. Траектории моделируются алгоритмом Гиллеспи. Параметры подбирались по долям стыков в клетках H358 в контроле и после совместного подавления ESRP1/2; независимой проверки на других данных пока не проводилось. В результате подбора получен набор параметров, согласующийся с данными, при котором доля ESRP1 в ядре после подавления возрастает, что может частично компенсировать снижение его общего количества.

Ключевые слова: альтернативный сплайсинг, CD44, РНК-связывающие белки, стохастическая модель, алгоритм Гиллеспи.

1. Введение

Альтернативный сплайсинг гена CD44 формирует изоформы рецептора с разным набором экзонов; изменения их соотношения описаны при опухолях [1]. Вариант CD44v8–v10 связывают с защитой клеток от окислительного стресса [2]. Включение вариабельных экзонов регулируют ESRP1 и ESRP2 [3]; их действие может зависеть от содержания в ядре. Мы моделируем транспорт и связывание этих белков с пре-мРНК и подбираем параметры по данным H358 в контроле и после подавления ESRP1/2.

2. Модель

Модель рассматривает последовательный выбор стыков конститутивного экзона с v8, затем v8–v9 и v9–v10. В каждый момент обрабатывается одна пре-мРНК. Индекс $g = 1, 2$ нумерует белки ESRP1 и ESRP2, через N_g и C_g обозначены числа их свободных молекул в ядре и цитоплазме. На каждом этапе пре-мРНК находится либо в свободном состоянии ($b = 0$), либо в комплексе с одним из белков ($b = g$).

* *Пирогов А. А.* — НИУ ВШЭ; МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: aleksei.pirogov@math.msu.ru, ORCID: 0009-0000-5085-4045.

Pirogov A. A. — HSE University; Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Перенос белков и обратимое связывание задаются переходами

$$\begin{aligned} C_g \to N_g \quad & (k_{\text{in},g} C_g), \quad N_g \to C_g \qquad (k_{\text{out},g} N_g), \\ N_g + U \to B_g \quad & (k_{\text{on},g} N_g), \quad B_g \to N_g + U \qquad (k_{\text{off},g}), \end{aligned}$$

где в скобках указаны интенсивности; U и B_g обозначают свободную и связанную РНК. Переход возможен при наличии исходного состояния. Этап завершается с интенсивностью λ с высвобождением белка. Вероятности выбора стыка для свободной РНК и РНК, связанной с регулятором, равны p_{0j} и p_{bj}, $j = 1, 2, 3$.Вероятность p_{bj} одинакова для ESRP1 и ESRP2. Обе вероятности предполагаются одинаковыми в контроле и после подавления, в то время как при другом исходе обработка прекращается.

Траектории строятся алгоритмом Гиллеспи [4]: время ожидания распределено экспоненциально с параметром $a_0 = \sum_r a_r$, переход r выбирается с вероятностью a_r/a_0. Изначально 80% молекул каждого белка находится в ядре, РНК свободна. Между обработкой молекул распределение белков сохраняется; период установления не задаётся.

3. Данные и подбор параметров

Мы использовали опубликованные данные RNA-seq клеток H358 из работы [3], включающие по три образца в контроле и после совместного подавления ESRP1/2. Для каждого образца вычислены доля первого стыка с v8 среди десяти выбранных стыков того же конститутивного экзона, а также доли стыков v8–v9 и v9–v10 среди доступных стыков, начинающихся соответственно от v8 и v9. Доли стыков приближают доли этапов модели; принадлежность всех стыков одной молекуле не установлена.

В каждом расчёте общее число молекул белка (пула) $R_g = N_g + C_g + \mathbf{1}_{\{b=g\}}$ постоянно: $(R_1, R_2) = (174, 43)$ в контроле и $(28, 24)$ после подавления; его изменение задано по уровням мРНК ESRP1/2. Для обоих белков $k_{\text{on},g} = 0{,}02$, $k_{\text{off},g} = \lambda = 1$; время и числа молекул выражены в условных единицах. Подбирались шесть вероятностей p_{0j}, p_{bj} и восемь констант транспорта для двух условий. Из 6500 случайных наборов 120 лучших пересчитаны по четырём траекториям из 6000 обработанных молекул мРНК CD44 каждая. Контрольные константы импорта и экспорта выбирались логарифмически равномерно из диапазонов $[0{,}008; 0{,}2]$ и $[0{,}002; 0{,}05]$. После подавления каждая константа составляла от 0,25 до 4 её контрольного значения.

4. Результаты

Для полученного набора модельные и наблюдаемые средние частоты стыков составили соответственно: первый стык с v8 — 46,6% и 47,0% в контроле, 37,1% и 35,7% после подавления; v8–v9 — 98,8% и 99,0%, 98,7% и 99,5%; v9–v10 — 97,2% и 97,0%, 97,2% и 96,1%. Подбор проведён по обеим группам, поэтому эти значения характеризуют согласование с использованными данными, а не независимый прогноз.

Для выбранного набора вероятности выбора стыков свободной РНК составили $(p_{01}, p_{02}, p_{03}) = (0{,}2759; 0{,}9895; 0{,}9641)$, а связанной РНК — $(p_{b1}, p_{b2}, p_{b3}) = (0{,}5682; 0{,}9855; 0{,}9792)$.

В таблице 1 приведены транспортные константы для этого набора и доли свободных регуляторов в ядре относительно их общего пула.

Параметр	Контроль	Подавление
$k_{\mathrm{in},1}$ (ESRP1)	0,0371	0,0448
$k_{\mathrm{out},1}$ (ESRP1)	0,0085	0,0042
$k_{\mathrm{in},2}$ (ESRP2)	0,0382	0,0632
$k_{\mathrm{out},2}$ (ESRP2)	0,0037	0,0050
Свободный ESRP1 в ядре, % от общего числа белка	81	91
Свободный ESRP2 в ядре, % от общего числа белка	91	92

Таблица 1. Параметры транспорта и доли свободных белков в ядре.

В этом сценарии после подавления константа импорта ESRP1 возрастает, а константа экспорта уменьшается; доля свободного белка в ядре увеличивается с 81% до 91%. Можно предположить, что это частично компенсирует уменьшение общего пула ESRP1 и поддерживает его доступность для связывания с пре-мРНК.

Список литературы

[1] T. Xu, M. Verhagen, R. Joosten et al., “Alternative splicing downstream of EMT enhances phenotypic plasticity and malignant behavior in colon cancer”, *eLife*, **11** (2022), e82006. DOI: 10.7554/eLife.82006.

[2] M. Yanova, E. Stepanova, D. Maltseva, A. Tonevitsky, “CD44 variant exons induce chemoresistance by modulating cell death pathways”, *Frontiers in Cell and Developmental Biology*, **13** (2025), 1508577. DOI: 10.3389/fcell.2025.1508577.

[3] Y. Yang, J. W. Park, T. W. Bebee et al., “Determination of a comprehensive alternative splicing regulatory network and combinatorial regulation by key

factors during the epithelial-to-mesenchymal transition", *Molecular and Cellular Biology*, **36**:11 (2016), 1704–1719. DOI: 10.1128/MCB.00019-16.

[4] D. T. Gillespie, "Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions", *The Journal of Physical Chemistry*, **81**:25 (1977), 2340–2361. DOI: 10.1021/j100540a008 .

Статья поступила 7 ноября 2026 г.

A stochastic model of CD44 splicing with transport and binding of ESRP1 and ESRP2

A. A. Pirogov

We present a discrete stochastic model of alternative splicing of the CD44 variable region. The model describes the transport of ESRP1 and ESRP2 proteins between the nucleus and cytoplasm, their binding to pre-mRNA, and the sequential formation of splice junctions with exons v8, v9 and v10. Trajectories are simulated with the Gillespie algorithm. Parameters were fitted to junction fractions in H358 cells under control conditions and after combined ESRP1/2 knockdown; no independent validation has been performed. Fitting yielded a parameter set consistent with the data, in which the nuclear fraction of ESRP1 increases after knockdown, which may partially offset the decrease in its total amount.

Keywords: alternative splicing, CD44, RNA-binding proteins, stochastic model, Gillespie algorithm.

References

[1] T. Xu, M. Verhagen, R. Joosten et al., "Alternative splicing downstream of EMT enhances phenotypic plasticity and malignant behavior in colon cancer", *eLife*, **11** (2022), e82006. DOI: 10.7554/eLife.82006.

[2] M. Yanova, E. Stepanova, D. Maltseva, A. Tonevitsky, "CD44 variant exons induce chemoresistance by modulating cell death pathways", *Frontiers in Cell and Developmental Biology*, **13** (2025), 1508577. DOI: 10.3389/fcell.2025.1508577.

[3] Y. Yang, J. W. Park, T. W. Bebee et al., "Determination of a comprehensive alternative splicing regulatory network and combinatorial regulation by key factors during the epithelial-to-mesenchymal transition", *Molecular and Cellular Biology*, **36**:11 (2016), 1704–1719. DOI: 10.1128/MCB.00019-16.

[4] D. T. Gillespie, "Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions", *The Journal of Physical Chemistry*, **81**:25 (1977), 2340–2361. DOI: 10.1021/j100540a008.

Received on November 7, 2026

Детальный анализ поведения разных видов животных: пространственный контекст в обучаемых детекторах поведенческих актов

В. В. Плюснин*, А. А. Иванова‡, О. И. Ивашкина§, Н. А. Поспелов¶, О. С. Рогожникова‖, Н. П. Савельев**, К. А. Торопова‡‡, К. В. Анохин§§

В платформу Sphynx интегрирован обучаемый детектор стоек, использующий кинематические признаки и пространственный контекст арены. На открытом наборе данных при сравнении с консенсусом двух экспертов он достиг покадрового F1 = 0,84 против 0,54 у исходного детектора и 0,85 у третьего эксперта. Признаки пространственного контекста внесли существенный вклад в качество классификации.

Ключевые слова: анализ поведения, оценка позы, аннотация поведения, градиентный бустинг.

---

* *Плюснин Виктор Владимирович* — лаборант-исследователь, Институт перспективных исследований мозга МГУ имени М. В. Ломоносова (ИПИМ МГУ); автор для переписки, e-mail: witkax@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9784-8283.

Plusnin Viktor Vladimirovich — Research Assistant, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU); corresponding author.

‡ *Иванова Анна Андреевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: anivis33@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2454-1288.

Ivanova Anna Andreevna — Research Assistant, IABS MSU.

§ *Ивашкина Ольга Игоревна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: oivashkina@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1540-7677.

Ivashkina Olga Igorevna — Junior Researcher, IABS MSU.

¶ *Поспелов Никита Андреевич* — инженер-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: nik-pos@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6637-2120.

Pospelov Nikita Andreevich — Research Engineer, IABS MSU.

‖ *Рогожникова Ольга Сергеевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: osrogozhnikova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2540-4402.

Rogozhnikova Olga Sergeevna — Research Assistant, IABS MSU.

** *Савельев Никита Павлович* — аспирант; ИПИМ МГУ; биологический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, e-mail: nksavelev2002@gmail.com, ORCID: 0009-0006-8084-735X.

Savelev Nikita Pavlovich — PhD Student; IABS MSU; Faculty of Biology, Lomonosov Moscow State University.

‡‡ *Торопова Ксения Александровна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: xen.alexander@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3081-2133.

Toropova Ksenia Aleksandrovna — Junior Researcher, IABS MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Постановка задачи. Методы оценки позы (DeepLabCut [1]) дают координаты точек тела, но не распознают поведенческие акты. Для их выделения применяют классификаторы на экспертной разметке (SimBA [2]), обучение без учителя (keypoint-MoSeq [3]) и правила на кинематических признаках (BehaviorDEPOT [4]). В Sphynx [5] акты задаются сочетаниями простых правил, но для стоек нужен одновременный учет многих признаков. Стойки с опорой происходят у стены или объекта, а обучаемые детекторы обычно используют признаки позы без учета геометрии арены [6]. Мы встроили в Sphynx обучаемый детектор стоек и проверили вклад пространственных признаков из существующей разметки арены.

Методы. Траектории десяти ключевых точек тела обрабатывали стандартным алгоритмом Sphynx. Кинематические признаки: попарные расстояния между точками, углы между осями головы, тела и задних лап, площадь контура тела и скорости точек. Пространственные признаки: расстояния от носа, центра тела и основания хвоста до ближайшей стены, угла, центра арены и объекта, а также положение тела относительно центра кадра. К каждому признаку добавляли производные до третьего порядка и статистики в окне 1 с, всего 593 признака. Для каждой задачи (все стойки, с опорой, без опоры) обучали отдельный бинарный классификатор градиентным бустингом над деревьями решений (scikit-learn, 500 деревьев, шаг 0,15, до 31 листа, не менее 300 кадров в листе). Вероятности сглаживали медианным фильтром 0,25 с, порог выбирали по F1 во вложенной кросс-валидации по обучающим сессиям, качество оценивали по покадровой F1 на отложенных сессиях.

Данные. Открытый набор данных [6] включал 20 десятиминутных сессий мышей в открытом поле с разметкой стоек с опорой и без опоры тремя экспертами. Эталоном для обучения служило согласие не менее двух экспертов. Для оценки детекторы и каждого эксперта сравнивали с консенсусом двух других экспертов и усредняли по трем экспертам и сессиям. Детектор проверяли с отложением одной сессии, а вклад пространственных признаков оценивали в пятиблочной кросс-валидации по сессиям парным критерием Уилкоксона. Собственные данные: 15 сессий семи мышей с минископом на голове в пяти аренах с различной геометрией, размеченные одним экспертом. Сессии одной мыши могли попадать и в обучение, и в тест. Для проверки переноса открытые видео обработали нашей моделью трекинга.

[§§] *Анохин Константин Владимирович* — директор ИПИМ МГУ, д.м.н., академик РАН, e-mail: k.anokhin@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, IABS MSU; DSc (Medicine), Full Member of the Russian Academy of Sciences.

Результаты. На открытом наборе данных исходный эвристический детектор Sphynx показал F1 = 0,54 (порог подобран по каждой сессии), обучаемый детектор достиг 0,84 для всех стоек, 0,90 для стоек с опорой и 0,63 для стоек без опоры, а третий эксперт 0,85, 0,88 и 0,71. Без пространственных признаков F1 снизился на 0,05, 0,07 и 0,08 (хуже в 20, 20 и 19 сессиях из 20, $p < 0{,}001$ для каждого класса). На записях мышей с минископом детектор, обученный на остальных сессиях, превосходил исходный алгоритм в каждой из 14 сессий со стойками (среднее F1 0,56 против 0,29) и обнаруживал 75 % из 572 размеченных стоек. Детектор, обученный только на открытых данных, дал на наших записях F1 = 0,34, а добавление открытых данных к нашим не улучшило результат (0,56).

Обсуждение. Признаки пространственного контекста из существующей разметки арены внесли существенный вклад в точность детекции, особенно для стоек без опоры. Детектор, обученный на открытых данных, уступает детектору, обученному на собственных записях, поэтому для нового сетапа нужна собственная разметка. Оценка F1 на собственных данных ограничена разметкой одним экспертом. Тот же подход применим к грумингу и обнюхиванию объектов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Некоммерческого Фонда развития науки и образования «Интеллект».

Список литературы

[1] A. Mathis, P. Mamidanna, K. M. Cury, et al., “DeepLabCut: markerless pose estimation of user-defined body parts with deep learning”, *Nature Neuroscience*, **21** (2018), 1281–1289. DOI: 10.1038/s41593-018-0209-y.

[2] N. L. Goodwin, J. J. Choong, S. Hwang, et al., “Simple Behavioral Analysis (SimBA) as a platform for explainable machine learning in behavioral neuroscience”, *Nature Neuroscience*, **27** (2024), 1411–1424. DOI: 10.1038/s41593-024-01649-9.

[3] C. Weinreb, J. E. Pearl, S. Lin, et al., “Keypoint-MoSeq: parsing behavior by linking point tracking to pose dynamics”, *Nature Methods*, **21** (2024), 1329–1339. DOI: 10.1038/s41592-024-02318-2.

[4] C. J. Gabriel, Z. Zeidler, B. Jin, et al., “BehaviorDEPOT is a simple, flexible tool for automated behavioral detection based on markerless pose tracking”, *eLife*, **11** (2022), e74314. DOI: 10.7554/eLife.74314.

[5] V. Plusnin, O. Ivashkina, N. Pospelov, et al., “Sphynx: An Automated Behavioral Analysis Tool for Neuronal Selectivity Identification”, 2024 Sixth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN), 2024, 156–159. DOI: 10.1109/cnn63506.2024.10705840.

[6] O. Sturman, L. von Ziegler, C. Schläppi, et al., “Deep learning-based behavioral analysis reaches human accuracy and is capable of outperforming commercial solutions”, *Neuropsychopharmacology*, **45** (2020), 1942–1952. DOI: 10.1038/s41386-020-0776-y.

Статья поступила 8 октября 2026 г.

Detailed behavioral analysis across animal species: spatial context in trainable detectors of behavioral acts

V. V. Plusnin, A. A. Ivanova, O. I. Ivashkina, N. A. Pospelov, O. S. Rogozhnikova, N. P. Savelev, K. A. Toropova, K. V. Anokhin

We integrated a trainable rearing detector into the Sphynx behavioral-analysis platform, combining kinematic features with spatial information from arena annotation. On a public dataset, against the consensus of two experts, the detector achieved frame-level F1 = 0.84, compared with 0.54 for the original rule-based detector and 0.85 for the third expert. Spatial features contributed substantially to classification performance.

Keywords: behavioral analysis, pose estimation, behavioral annotation, gradient boosting.

References

[1] A. Mathis, P. Mamidanna, K. M. Cury, et al., "DeepLabCut: markerless pose estimation of user-defined body parts with deep learning", *Nature Neuroscience*, **21** (2018), 1281–1289. DOI: 10.1038/s41593-018-0209-y.

[2] N. L. Goodwin, J. J. Choong, S. Hwang, et al., "Simple Behavioral Analysis (SimBA) as a platform for explainable machine learning in behavioral neuroscience", *Nature Neuroscience*, **27** (2024), 1411–1424. DOI: 10.1038/s41593-024-01649-9.

[3] C. Weinreb, J. E. Pearl, S. Lin, et al., "Keypoint-MoSeq: parsing behavior by linking point tracking to pose dynamics", *Nature Methods*, **21** (2024), 1329–1339. DOI: 10.1038/s41592-024-02318-2.

[4] C. J. Gabriel, Z. Zeidler, B. Jin, et al., "BehaviorDEPOT is a simple, flexible tool for automated behavioral detection based on markerless pose tracking", *eLife*, **11** (2022), e74314. DOI: 10.7554/eLife.74314.

[5] V. Plusnin, O. Ivashkina, N. Pospelov, et al., "Sphynx: An Automated Behavioral Analysis Tool for Neuronal Selectivity Identification", 2024 Sixth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN), 2024, 156–159. DOI: 10.1109/cnn63506.2024.10705840.

[6] O. Sturman, L. von Ziegler, C. Schläppi, et al., "Deep learning-based behavioral analysis reaches human accuracy and is capable of outperforming commercial solutions", *Neuropsychopharmacology*, **45** (2020), 1942–1952. DOI: 10.1038/s41386-020-0776-y.

Received on October 8, 2026

Мультимасштабные графовые нейронные сети на SES-поверхности для предсказания сайтов связывания белков

В. С. Половников*

Представлен SES-GNN — мультимасштабная графовая нейронная сеть на поверхности, исключающей растворитель (SES), для предсказания сайтов связывания белков. Вместо однородного графа с фиксированным радиусом рёбер строится трёхмасштабное представление (0–2, 2–4, 4–8 Å) с отбором центроидов через Farthest Point Sampling. Архитектура — 12 слоёв TransformerConv. Мультимасштабный граф даёт прирост +0.015–0.017 ROC-AUC относительно однородного. Метод достигает ROC-AUC = 0.838 на собственном PPI-датасете. Покомпонентный анализ показывает, что признаки вершины несут основную информацию, но реализуются только через графовую структуру: без графа поточечный классификатор на тех же признаках существенно уступает, а топология сама по себе бесполезна.

Ключевые слова: предсказание сайтов связывания белков, SES-поверхность, графовые нейронные сети.

1. Введение

Белок-белковые взаимодействия (PPI) лежат в основе клеточной сигнализации, регуляции и сборки макромолекулярных комплексов, поэтому предсказание их сайтов — одна из центральных задач структурной биоинформатики. Задача: для каждой точки i поверхности белка предсказать бинарную метку $y_i \in \{0, 1\}$ — принадлежит ли точка сайту связывания. Комплементарность впадин и выступов позволяет заряженным и гидрофобным группам сблизиться, поэтому для предсказания важна *геометрия* поверхности, а не только её химия. Геометрическое глубокое обучение на молекулярных поверхностях показало эффективность [1].

* *Половников Владимир Сергеевич* — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, e-mail: polovnikov@intsys.msu.ru, ORCID: 0000-0001-9784-9067.

Polovnikov Vladimir Sergeevich — PhD, Senior Researcher, Department of Mathematical Theory of Intelligent Systems, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Сайт связывания имеет ядро и периферию и требует учёта мелкой геометрии (размер остатка, ∼5 Å) и широкого контекста (форма впадины, ∼20 Å). Используются два представления поверхности. *SAS* — поверхность, которую описывает центр пробной сферы радиуса 1.4 Å при качении по ван-дер-ваальсовой поверхности белка; $\Delta SASA$ — падение её площади при связывании (основа ASA-определений интерфейса). *SES* — поверхность, образуемая обращённой к белку частью пробной сферы при её качении; состоит из контактных, тороидальных и возвратных участков и точнее описывает геометрию впадин.

2. Подход SES-GNN

SES сэмплируется точками с плотностью ~ 1 точка/Å^2 (**10 000–20 000 точек** на цепь, шаг ~ 1 Å — меньше размера остатка); точки выбираются равномерно по площади из аналитически построенной SES. Однородный граф с фиксированным радиусом не может одновременно захватить локальную геометрию и широкий контекст. Мы строим рёбра на трёх масштабах: **локальный** (0–2 Å, все рёбра), **средний** (2–4 Å, до 10 центроидов), **глобальный** (4–8 Å, до 10 центроидов).

Выборка по наиболее удалённым точкам (FPS). Для вершины с соседями в диапазоне $[r_1, r_2]$ выбирается k центроидов: первый — случайно, каждый следующий — максимально удалён от выбранных, что даёт равномерное покрытие окрестности по направлениям. Кандидатов в среднем ∼77 на среднем масштабе и ∼374 на глобальном; FPS ограничен 10 центроидами на масштаб, но не более 32 рёбер на вершину: локальные рёбра (0–2 Å) занимают большую часть бюджета, поэтому выбирается ∼5 центроидов на среднем масштабе и ∼2 на глобальном. Итоговый граф содержит в среднем **27 рёбер на вершину** (∼20 локальных, ∼7 FPS).

Признаки. Вектор вершины $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{14}$: $\mathbf{x}_i = [\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{c}]$, где $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — нормаль; $\mathbf{t} \in \{0,1\}^3$ — one-hot типа SES-участка; $\mathbf{g} \in \{0,1\}^6$ — multihot элементов поддерживающих атомов; $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ — полярность и гидрофобность по Kyte–Doolittle, агрегированные по поддерживающим атомам. Вектор ребра $\mathbf{r}_{ij} \in \mathbb{R}^3$: расстояние $\|p_i - p_j\|$, косинус угла между нормалями $\langle n_i, n_j \rangle$ и штрафующий вес $e^{-\|p_i - p_j\|^2/(2\sigma^2)}(1 + \langle n_i, n_j \rangle)/2$, где $\sigma = 3.0$ Å.

Архитектура. 12 слоёв TransformerConv, hidden = 32 суммарно (по 8 на голову, конкатенация), heads = 4, edge_dim = 3, residual connections, LayerNorm, GELU, dropout 0.1. Глобальные рёбра разрежены (∼2 на вершину), поэтому охват поверхности требует глубины: 12 слоёв оптимальны, 16 не улучшают (0.834 против 0.838). Обучение: AdamW (lr =

10^{-3}, weight decay 10^{-4}), cosine annealing, 150 эпох. Функция потерь — BCEWithLogitsLoss с hard negative mining: в каждом графе выбираются до двух негативов на позитив — с наибольшим текущим логитом; потеря считается только на этой подвыборке. Гиперпараметры одинаковы для всех конфигураций; основные результаты получены без поворотной аугментации, а отдельный эксперимент с поворотами даёт +0.009 val-ROC.

3. Результаты

Собственный PPI-набор: подмножество dMaSIF [1] (training_ppi.txt), сплит 5000/50/412 (train/val/test) комплексов. Определение интерфейса: для пары цепей (A,B) точка $p \in \mathrm{SES}(A)$ интерфейсна относительно цепи B, если $\min_{q \in \mathrm{SES}(B)} \|p - q\| \leq 4$ Å. Пары (A,B) и (B,A) — разные примеры.

Таблица 1: Зависимость ROC-AUC и F1 на тестовом множестве от глубины сети и конфигурации графа.

	Однородный, $R = 3$ Å	Мультимасштабный		
Слоёв	ROC-AUC	ROC-AUC	Δ ROC-AUC	Test-F1
6	0.789	0.806	+0.017	0.531
8	0.806	0.823	+0.017	0.547
10	0.819	0.834	+0.015	0.530
12	—	**0.838**	—	**0.612**
16	—	0.834	—	0.603

F1 — среднее по белкам при пороге, подобранном на валидации.

Мультимасштабный граф даёт **+0.015–0.017 ROC-AUC** над однородным. Покомпонентный анализ (500 train / 50 val, 4 слоя) показывает: основную информацию несут признаки вершин, но реализуются они только в совокупности с графовой структурой. Без графа поточечная логистическая регрессия на тех же 14D-признаках даёт ROC-AUC 0.556 против 0.711 у полной модели; чистая топология без признаков — 0.500, уровень случайного угадывания; вес рёбер добавляет +0.017. Иными словами, топология сама по себе бесполезна, но служит механизмом распространения признаков по поверхности.

4. Заключение

SES-GNN — мультимасштабная графовая нейронная сеть для предсказания сайтов связывания на SES-поверхности. При одинаковой глубине

10 слоёв мультимасштабный граф даёт +0.015 ROC-AUC относительно однородного (0.834 vs 0.819); 12-слойная конфигурация достигает **0.838** и **F1 = 0.612**. Покомпонентный анализ показывает, что SES-GNN использует признаки вершин и графовую структуру совместно: топология без признаков бесполезна, а признаки без графа уступают полной модели.

Список литературы

[1] F. Sverrisson, J. Feydy, B. E. Correia, M. M. Bronstein, "Fast end-to-end learning on protein surfaces", *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2021, 15267–15276. DOI: 10.1109/CVPR46437.2021.01502 .

Статья поступила 10 октября 2026 г.

Multiscale Graph Neural Networks on the SES Surface for Protein Binding Site Prediction

V. S. Polovnikov

We present SES-GNN, a multiscale graph neural network on the solvent-excluded surface (SES) for protein binding site prediction. Instead of a uniform graph with fixed edge radius, a three-scale representation (0–2, 2–4, 4–8 Å) with Farthest Point Sampling centroid selection is built. The architecture uses 12 TransformerConv layers. The multiscale graph gives a +0.015–0.017 ROC-AUC gain over the uniform one. The method achieves ROC-AUC = 0.838 on our own PPI dataset. Ablation shows that vertex features carry the main information but realize it only through the graph structure: a pointwise classifier without message passing falls substantially below the full model, while topology alone is useless.

Keywords: protein binding site prediction, SES surface, graph neural networks.

References

[1] F. Sverrisson, J. Feydy, B. E. Correia, M. M. Bronstein, "Fast end-to-end learning on protein surfaces", *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2021, 15267–15276. DOI: 10.1109/CVPR46437.2021.01502.

Received on October 10, 2026

Целенаправленные подходы в свободном поведении мышей и доля селективных к ним нейронов области CA1 гиппокампа

О. С. Рогожникова*, О. И. Ивашкина‡, А. А. Иванова§, В. В. Плюснин¶, Н. А. Поспелов‖, К. А. Торопова**, К. В. Анохин‡‡

В работе выделены целенаправленные подходы мышей к целевой миске при свободном обследовании пяти арен, а связь активности нейронов области CA1 гиппокампа с этим поведением оценена методом INTENSE. Группы различались по поведению: мыши, знакомые с миской, в первых сессиях подходили к ней чаще контрольных. Нейроны области CA1, селективные к такому подходу, оказались единичными: доля их не превышала 0,1 %, тогда как к стойкам тот же анализ выявлял до 4 % нейронов. Возможно, нейронные корреляты акта лежат в его непрерывных пространственных и кинематических компонентах.

Ключевые слова: целенаправленное поведение, гиппокамп, область CA1, кальциевая активность, минископ, взаимная информация, INTENSE.

* *Рогожникова Ольга Сергеевна* — лаборант-исследователь, Институт перспективных исследований мозга МГУ имени М.В. Ломоносова (ИПИМ МГУ), e-mail: osrogozhnikova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2540-4402.

Rogozhnikova Olga Sergeevna — Research Assistant, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU).

‡ *Ивашкина Ольга Игоревна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: oivashkina@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1540-7677.

Ivashkina Olga Igorevna — Junior Researcher, IABS MSU.

§ *Иванова Анна Андреевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: anivis33@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2454-1288.

Ivanova Anna Andreevna — Research Assistant, IABS MSU.

¶ *Плюснин Виктор Владимирович* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: witkax@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9784-8283.

Plusnin Viktor Vladimirovich — Research Assistant, IABS MSU.

‖ *Поспелов Никита Андреевич* — инженер-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: nik-pos@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6637-2120.

Pospelov Nikita Andreevich — Research Engineer, IABS MSU.

** *Торопова Ксения Александровна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: xen.alexander@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3081-2133.

Toropova Ksenia Aleksandrovna — Junior Researcher, IABS MSU.

‡‡ *Анохин Константин Владимирович* — директор, ИПИМ МГУ, e-mail: k.anokhin@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, IABS MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

Постановка задачи. Значительная часть естественного поведения организована относительно цели, и для гиппокампа описано кодирование направления и расстояния до неё [1]. Миниатюрная кальциевая микроскопия позволяет изучать такие связи в свободном поведении, но результат зависит от того, как задан сам акт. Задачей работы было выделить повторяющиеся подходы мыши к целевой миске и определить, есть ли в области CA1 гиппокампа селективные к ним нейроны.

Методика. Использовали мышей линии C57BL/6 (самцы и самки, 4–6 месяцев). В группе *Экспозиция* ($n = 11$) целевой объект — голубая пластиковая миска — находился в домашней клетке 14 дней до начала тестирования, а животные группы *Контроль* ($n = 14$) с ним ранее не взаимодействовали. Затем в пяти 15-минутных сессиях, разнесённых по дням, мыши обследовали новые арены, различавшиеся геометрией и набором новых объектов. Целевая миска присутствовала во всех аренах, её положение меняли от животного к животному.

Выделение подходов. Координаты частей тела животного выделяли покадрово нейронной сетью, обученной в среде DeepLabCut [2], и по ним восстанавливали траекторию и параметры движения. Целенаправленным подходом считали моменты времени, когда животное двигалось в направлении миски, а скорость сближения его носа с центром миски превышала 10 см/с.

Поведение. Подходы животные обеих групп совершали во всех пяти сессиях, в среднем 11–29 за сессию. Предварительный опыт влиял на их число: в первых двух сессиях животные группы *Экспозиция* целенаправленно подходили к миске чаще контрольных ($p = 0{,}0195$ и $p = 0{,}0287$; двухфакторный дисперсионный анализ, критерий Шидака), в последующих различия сглаживались. Между объектами подходы распределялись неравномерно: в аренах с дополнительными объектами мыши обеих групп подходили к целевой миске чаще, чем к её перевёрнутой копии ($p = 0{,}0110$) и к фигурке из конструктора ($p = 0{,}0027$). Судить по этому об избирательности к знакомому объекту следует осторожно: копия и фигурка могли привлекать мышей меньше из-за формы и размера.

Регистрация активности. Одновременно с поведением регистрировали кальциевую активность нейронов области CA1 гиппокампа миниатюрным микроскопом MiniScope (сенсор GCaMP6s, GRIN-линза $d = 1$ мм). У 25 животных зарегистрировано 4809 нейронов. Пространственные компоненты совмещали между сессиями процедурой CellReg [3], так что во всех пяти сессиях анализировали одни и те же нейроны.

Оценка селективности. Активность каждого нейрона сопоставляли с бинарным временным рядом подхода к миске в пакете INTENSE [4]. Мерой связи служила взаимная информация, вычисленная через энтро-

пию гауссовой копулы (GCMI) [5]. Значимость проверяли сравнением с нулевым распределением, которое строили на 10 000 случайных циклических сдвигах сигнала относительно поведения: сдвиг разрушает их соответствие во времени, но сохраняет автокорреляцию каждого из рядов. Множественность сравнений учитывали последовательной поправкой Холма.

Результаты. В зависимости от сессии и группы 18–31 % нейронов проявляли селективность к положению животного в арене, характеру перемещения (остановки, медленные и быстрые побежки), стойкам и замираниям. Селективность к эпизодам целенаправленного подхода к миске выявлялась лишь у отдельных нейронов (не более 0,1 %), что ограничивало возможности межгруппового сравнения. При этом в тех же записях аналогичный анализ выявлял до 4 % нейронов, селективных к стойкам — также дискретным поведенческим актам (46–66 за сессию). Вероятность хотя бы одного ложноположительного результата в семействе тестов контролировали на уровне 1 % с помощью поправки Холма.

Обсуждение. Группы различались в проявлении целенаправленного поведения, однако заметной популяции нейронов области CA1, селективных к этому акту как к единой бинарной категории, мы не обнаружили. Вероятно, при приближении к цели одновременно меняются координаты, расстояние до объекта, направление и скорость движения, и активность связана не с эпизодом целиком, а с его отдельными компонентами [1]. Эту гипотезу можно проверить методом INTENSE на непрерывных данных — расстоянии до миски, направлении и скорости сближения с ней.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Некоммерческого Фонда развития науки и образования «Интеллект».

Список литературы

[1] A. Sarel, A. Finkelstein, L. Las, N. Ulanovsky, “Vectorial representation of spatial goals in the hippocampus of bats”, *Science*, **355**:6321 (2017), 176–180. DOI: 10.1126/science.aak9589.

[2] A. Mathis, P. Mamidanna, K. M. Cury, T. Abe, V. N. Murthy, M. W. Mathis, M. Bethge, “DeepLabCut: markerless pose estimation of user-defined body parts with deep learning”, *Nature Neuroscience*, **21**:9 (2018), 1281–1289. DOI: 10.1038/s41593-018-0209-y.

[3] L. Sheintuch, A. Rubin, N. Brande-Eilat, N. Geva, N. Sadeh, O. Pinchasof, Y. Ziv, “Tracking the same neurons across multiple days in Ca^{2+} imaging data”, *Cell Reports*, **21**:4 (2017), 1102–1115. DOI: 10.1016/j.celrep.2017.10.013.

[4] N. Pospelov, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, A. Ivanova, V. Sotskov, K. Toropova, O. Ivashkina, V. Avetisov, K. Anokhin, “INTENSE: Detecting and disentangling neuronal selectivity in calcium imaging data”, arXiv: 2603.04622.

[5] R. A. A. Ince, B. L. Giordano, C. Kayser, G. A. Rousselet, J. Gross, P. G. Schyns, "A statistical framework for neuroimaging data analysis based on mutual information estimated via a Gaussian copula", *Human Brain Mapping*, **38**:3 (2017), 1541–1573. DOI: 10.1002/hbm.23471.

Статья поступила 8 октября 2026 г.

Goal-directed approaches in the free behavior of mice and the fraction of hippocampal CA1 neurons selective for them

O. S. Rogozhnikova, O. I. Ivashkina, A. A. Ivanova, V. V. Plusnin, N. A. Pospelov, K. A. Toropova, K. V. Anokhin

We identified goal-directed approaches of mice toward a target bowl during free exploration of five arenas and assessed the association of hippocampal CA1 activity with this behavior using the INTENSE method. The groups differed in behavior: mice familiar with the bowl approached it more often than controls in the first sessions. CA1 neurons selective for such approaches were rare: their fraction was at most 0.1 %, whereas up to 4 % were selective for rearings. Neural correlates of the act may lie in its continuous spatial and kinematic components.

Keywords: goal-directed behavior, hippocampus, CA1, calcium imaging, miniscope, mutual information, INTENSE.

Received on October 8, 2026

Апробация метрики «Средняя разница фактической и оптимальной траекторий движений глаз» при выполнении таблиц Горбова-Шульте

К. М. Рысева*, В. Е. Педашенко‡, А. И. Ковалев§

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки объективных методов выделения когнитивной нагрузки. Целью работы является апробация количественного показателя для оценки когнитивной нагрузки по окулометрическим данным — средняя разница фактической и оптимальной траекторий движений глаз (РФОТ). В исследовании приняли участие 95 респондентов. Стимульный материал включал три таблицы Горбова–Шульте. Движения глаз регистрировались с помощью EyeLink 1000 Plus. Показано, что в экспериментальной группе отклонение РФОТ было в среднем меньше, чем в контрольной. При увеличении внутренней когнитивной нагрузки происходило увеличение РФОТ. Полученные результаты свидетельствуют о чувствительности предложенного показателя к изменениям когнитивной нагрузки и позволяют интерпретировать увеличение РФОТ как вероятный маркер истощения когнитивных ресурсов.

Ключевые слова: зрительный поиск, когнитивная нагрузка, зрительное внимание, айтрекинг.

* *Рысева Ксения Михайловна* — научный сотрудник лаборатории виртуальной реальности и полимодального восприятия, Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных исследований, e-mail: `rysevakm@my.msu.ru`, ORCID: 0009-0000-8258-5177.

Ryseva Ksenia Mikhailovna — researcher at the Laboratory of VR and Polymodal Perception, Federal Scientific Centre of Psychological and Multidisciplinary Research.

‡ *Педашенко Владислав Евгеньевич* — аспирант факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: `pedashenkove@my.msu.ru`, ORCID: 0009-0001-5599-9355.

Pedashenko Vladislav Evgenevich — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics.

§ *Ковалев Артем Иванович* — д.п.н., доцент кафедры психофизиологии Факультета психологии, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, e-mail: `artem.kovalev.msu@mail.ru`, ORCID: 0000-0003-1592-2035.

Kovalev Artem Ivanovich — Doctor of Psychology, associate professor of Psychophysiology Department, Lomonosov Moscow State University.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

1. Введение

Своевременная и точная оценка когнитивной нагрузки позволяет оптимизировать среду, предотвращать перегрузку, проектировать рабочую среду оператора в зависимости от его индивидуальных характеристик. Анализ параметров движений глаз при этом позволяет зафиксировать распределение внимания, глубину переработки информации и момент возникновения перегрузки в реальном времени [1].

2. Средняя разница фактической и оптимальной траекторий (РФОТ)

Был разработан показатель РФОТ - средняя разница между фактической и оптимальной траекторией движения глаз между посещенными зонами интереса в пикселях, который вычислялся по формуле: $\frac{D_{fact}-D_{opt}}{n-1}$, где n - количество кликов, которое совершил респондент, D_{fact} - длина траектории движении глаза, D_{opt} - наименьшая длина траектории, проходящей через середины зон интереса, на которые кликнул респондент, строится в порядке кликов испытуемого. D_{fact} рассчитывается по исходным отсчётам с частотой 500 Гц.

3. Методика и выборка исследования

В исследовании приняли участие 95 респондентов: средний возраст 22,3 года (SD = 5,68). Среди них были 22 мужчины и 73 женщины. Испытуемые были случайно распределены в экспериментальную (48 человек) и контрольную (47 человек) группы.

3.1. Описание использованной стимуляции

Респондентам были представлены три таблицы Горбова-Шульте, размер 7x7 клеток. Каждый квадрат был обозначен как зона интереса со стороной 150 пикселей. Экспериментальная группа выполняла задания под метроном 60 уд./мин и с псевдо-ограничением времени, что увеличивало внешнюю когнитивную нагрузку. Испытуемые нажимали на числа в черных квадратах в 1-й таблице в порядке возрастания, на числа в красных квадратах во 2-й таблице в порядке убывания и в 3-й таблице, чередуя черные (возрастание) и красные (убывание) цифры в квадратах - увеличение внутренней когнитивной нагрузки.

3.2. Используемое оборудование

Движения левого глаза респондента регистрировались с помощью айтрекера SR Research Eye Link 1000 Plus (частота-500 ГЦ) монокулярно.

4. Результаты апробации

Однофакторный дисперсионный анализ Уэлча по среднему значению трех таблиц показал, что в экспериментальной группе значения РФОТ были меньше, чем в контрольной (F=4.74, p=0.032, df1=1, df2=87.3). Дисперсионный анализ «группа × таблица» с повторными измерениями показал, что контрольная группа при выполнении таблицы 3 показала большие показатели РФОТ, чем в 1-й (t=15.2, $p < .001$, df=93.0) и во 2-й (t=15.4, $p < .001$, df=93.0) таблицах. Экспериментальная группа при выполнении 3-ей таблицы показала большие показатели РФОТ, чем в 1-й (t=12.7, $p < .001$, df=93.0) и во 2-й (t=13.6, $p < .001$, df=93.0) таблицах. Средние значения и стандартные отклонения РФОТ, правильности ответов и времени выполнения[1].

5. Обсуждение и заключение

Наибольшая внешняя когнитивная нагрузка (метроном) экспериментальной группы привела к мобилизации когнитивных ресурсов и выбору более оптимального пути сканирования, при этом добавление внутренней когнитивной и перцептивной нагрузок (условия задачи в таблице 3), вероятно, привело к истощению ресурсов и последующему увеличению отклонения от оптимальной траектории [2]. Различие между группами может отражать скорость выполнения, и вопрос о том, что показатель даёт сверх времени, остаётся для дальнейшей работы.

[1]Средние и стандартные отклонения РФОТ, (контрольная / экспериментальная):

Контр./эксп.	T1 M 3871/3601	T1 SD 1367/1173	T2 M 3876/3370	T2 SD 1493/1183	T3 M 8954/7801	T3 SD 2880/2212

Правильность ответов, (контрольная / экспериментальная):

Контр./эксп.	T1 M 0.980/0.981	T1 SD 0.0332/0.0330	T2 M 0.969/0.967	T2 SD 0.144/0.144	T3 M 0.810/0.759	T3 SD 0.183/0.209

Длительность, (контрольная / экспериментальная):

Контр./эксп.	T1 M 59191/55551	T1 SD 16870/14576	T2 M 58723/52358	T2 SD 19346/15208	T3 M 232880/207767	T3 SD 56444/55656

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках Соглашения № 075-15-2024-526.

Список литературы

[1] Xiaoxiao, L., Ying, C., "Eye tracking technology for examining cognitive processes in education: A systematic review", *Comput. Educ.*, **229** (2025. DOI: 10.1016/j.compedu.2025.105263).

[2] Dewhurst, R., Foulsham, T., Jarodzka, H., Johansson, R., Holmqvist, K., Nyström, M., "How Task Demands Influence Scanpath Similarity in a Sequential Number-Search Task", Vision research, **149** (2018), 9–23.. DOI: 10.1016/j.visres.2018.05.006 .

Статья поступила 12 октября 2026 г.

Testing the metric "Average Difference between Actual and Optimal Trajectories of Eye Movements" during completion of the Gorbov–Schulte tables

K. M. Ryseva, V. E. Pedashenko, A. I. Kovalev

The relevance of this study stems from the need to develop objective methods for identifying cognitive load. The aim of the work is to validate a quantitative indicator for assessing cognitive load based on oculomotor data — the average difference between the actual and optimal eye movement trajectories (RFOT). The study involved 95 participants. The stimulus material included three Gorbov–Schulte tables. Eye movements were recorded using an EyeLink 1000 Plus. It was shown that in the experimental group the deviation of the actual oculomotor trajectory from the optimal one was significantly smaller than in the control group. An increase in intrinsic cognitive load led to an increase in RFOT. The obtained results indicate that the proposed indicator is sensitive to changes in cognitive load and allow the increase in RFOT to be interpreted as a marker of cognitive resource depletion.

Keywords: visual search, cognitive load, visual attention, eye tracking.

Received on October 12, 2026

Поведение мышей и селективность нейронов гиппокампа после разных режимов обследования новой среды

Н. П. Савельев*, А. А. Иванова‡, О. И. Ивашкина§, В. В. Плюснин¶, Н. А. Поспелов‖, О. С. Рогожникова**, К. А. Торопова‡‡, К. В. Анохин§§

Сравнивали поведение мышей и селективность нейронов поля CA1 гиппокампа к поведенческим переменным через сутки после однократного, массированного и расставленного обследования открытого поля равной длительности. Значимых различий между режимами в структуре поведения и в долях селективных к поведенческим переменным нейронов не выявлено.

Ключевые слова: интервальное обучение, гиппокамп, селективность нейронов.

Постановка задачи. Распределение опыта во времени влияет на его запоминание: повторения, разнесенные интервалами, как правило,

* *Савельев Никита Павлович* — аспирант, Институт перспективных исследований мозга МГУ имени М. В. Ломоносова (ИПИМ МГУ); биологический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова; автор для переписки, e-mail: nksavelev2002@gmail.com, ORCID: 0009-0006-8084-735X.

Savelev Nikita Pavlovich — PhD Student, Institute for Advanced Brain Studies, Lomonosov Moscow State University (IABS MSU); Faculty of Biology, Lomonosov Moscow State University; corresponding author.

‡ *Иванова Анна Андреевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: anivis33@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2454-1288.

Ivanova Anna Andreevna — Research Assistant, IABS MSU.

§ *Ивашкина Ольга Игоревна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: oivashkina@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1540-7677.

Ivashkina Olga Igorevna — Junior Researcher, IABS MSU.

¶ *Плюснин Виктор Владимирович* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: witkax@mail.ru, ORCID: 0000-0001-9784-8283.

Plusnin Viktor Vladimirovich — Research Assistant, IABS MSU.

‖ *Поспелов Никита Андреевич* — инженер-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: nik-pos@yandex.ru, ORCID: 0000-0001-6637-2120.

Pospelov Nikita Andreevich — Research Engineer, IABS MSU.

** *Рогожникова Ольга Сергеевна* — лаборант-исследователь, ИПИМ МГУ, e-mail: osrogozhnikova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2540-4402.

Rogozhnikova Olga Sergeevna — Research Assistant, IABS MSU.

‡‡ *Торопова Ксения Александровна* — м.н.с., ИПИМ МГУ, e-mail: xen.alexander@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3081-2133.

Toropova Ksenia Aleksandrovna — Junior Researcher, IABS MSU.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

обеспечивают более прочную память, чем то же число повторений подряд (эффект интервала) [1]. Этот эффект хорошо описан для задач с подкреплением, однако мало известно, как временной режим влияет на поведение и активность нейронов при свободном обследовании новой среды, где животное не получает награды. Ключевую роль в формировании представления о новой среде играет гиппокамп, причем активность его нейронов связана не только с положением животного, но и с другими поведенческими переменными. Мы проверили, различаются ли структура исследовательского поведения мышей и селективность нейронов поля CA1 к поведенческим переменным после трех режимов обследования открытого поля с одинаковой суммарной длительностью: однократного, массированного и расставленного.

Методы. Поведение регистрировали камерой, расположенной над ареной (30 кадров/с). Координаты 13 точек тела (нос, голова, уши, центр тела, две точки по бокам туловища, передние и задние конечности, основание хвоста, светодиод минископа) были определены с помощью модели архитектуры ResNet-152, обученной в пакете DeepLabCut [2]. Точки с правдоподобием ниже 0,95 интерполировали по соседним кадрам. Поведенческие акты были выделены в пакете Sphynx [3]. По абсолютной скорости центра тела v выделяли остановки ($v \leq 1$ см/с), медленные ($1 < v \leq 5$ см/с) и быстрые ($v > 5$ см/с) побежки; замиранием считали эпизоды, когда скорость и центра тела, и головы была ниже 1 см/с. Минимальная длительность эпизода составляла 0,25 с. Для каждого акта определяли число эпизодов и долю от времени сессии, а также число заходов в центр, зону углов и пристеночную зону. Активность нейронов CA1, экспрессирующих кальциевый сенсор GCaMP6s, регистрировали минископом MiniScope v4.4 (30 кадров/с) через имплантированную GRIN-линзу синхронно с видео поведения (Bonsai). Нейроны выделяли методом CNMF-E с экспертной инспекцией компонент, кальциевые события извлекали из сигнала $\Delta F/F$ непрерывным вейвлет-преобразованием (вейвлет Морзе). Селективность нейронов к поведенческим переменным (положение, скорость, поведенческие акты, направление тела и головы) определяли по взаимной информации в пакете INTENSE [4] с проверкой значимости циклическими сдвигами. Доли селективных нейронов и показатели поведения сравнивали между группами однофакторным дисперсионным анализом с поправкой на множественные попарные сравнения.

§§ *Анохин Константин Владимирович* — директор ИПИМ МГУ, д.м.н., академик РАН, e-mail: k.anokhin@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4437-6002.

Anokhin Konstantin Vladimirovich — Director, IABS MSU; DSc (Medicine), Full Member of the Russian Academy of Sciences.

Данные. Использовали 22 мыши C57BL/6 (9 самок и 13 самцов, 10–13 месяцев). Группа однократного обучения ($n = 8$) обследовала арену 10 мин, массированного ($n = 7$) - 5 сессий по 2 мин в один день с перерывами в 10 мин в домашней клетке, расставленного ($n = 7$) - по 2 мин в день пять последовательных дней. Тест длительностью 10 мин проводили через 24 ч после последней экспозиции. В качестве арены использовали серое открытое поле 44×44 см с визуальными ориентирами. Протокол одобрен Комиссией по биоэтике МГУ (заявка № 178-а, заседание № 162-д от 16.05.2024).

Результаты. В тесте через сутки около половины времени занимали остановки (43–52%), 36–46% — медленные и 11–13% — быстрые побежки; ни доля и число этих актов, ни число заходов в углы, пристеночную зону и центр между группами значимо не различались (все $p > 0{,}14$). В анализ вошли в среднем 305 ± 215, 192 ± 108 и 176 ± 100 нейронов на животное (однократная, расставленная и массированная группы) со средней частотой 0,9–1,2 кальциевых событий в минуту. Нейроны CA1, селективные к поведенческим переменным, составляли единицы процентов. Чаще всего встречались нейроны, кодирующие положение в арене (около 7–8% во всех группах) и направление тела (3–5%); к отдельным зонам арены были селективны 1–2% нейронов, к медленным и быстрым побежкам — до 4%, к скорости и направлению головы — менее 1%. Хотя остановки занимали наибольшую долю времени, нейроны, селективные к остановкам и замиранию, составляли менее 0,5%. Ни по одной переменной доли селективных нейронов между группами значимо не различались (все $p > 0{,}13$; $\eta^2 = 0{,}004$–$0{,}19$), в том числе с поправкой Холма на число переменных.

Обсуждение. При одинаковой суммарной экспозиции значимых различий в структуре поведения мышей в тесте через сутки между режимами обследования не выявлено; не различались и доли нейронов CA1, селективных к поведенческим переменным. Такие нейроны немногочисленны и составляют единицы процентов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Некоммерческого Фонда развития науки и образования «Интеллект».

Список литературы

[1] N. J. Cepeda, H. Pashler, E. Vul, et al., “Distributed practice in verbal recall tasks: a review and quantitative synthesis”, *Psychological Bulletin*, **132** (2006), 354–380. DOI: 10.1037/0033-2909.132.3.354.

[2] A. Mathis, P. Mamidanna, K. M. Cury, et al., “DeepLabCut: markerless pose estimation of user-defined body parts with deep learning”, *Nature Neuroscience*,

21 (2018), 1281–1289. DOI: 10.1038/s41593-018-0209-y.

[3] V. Plusnin, O. Ivashkina, N. Pospelov, et al., "Sphynx: An Automated Behavioral Analysis Tool for Neuronal Selectivity Identification", *2024 Sixth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN)*, 2024, 156–159. DOI: 10.1109/cnn63506.2024.10705840.

[4] N. Pospelov, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, et al., "INTENSE: Detecting and disentangling neuronal selectivity in calcium imaging data", arXiv: 2603.04622.

Статья поступила 24 октября 2026 г.

Mouse behavior and selectivity of hippocampal neurons after different schedules of exploring a novel environment

N. P. Savelev, A. A. Ivanova, O. I. Ivashkina, V. V. Plusnin, N. A. Pospelov, O. S. Rogozhnikova, K. A. Toropova, K. V. Anokhin

We compared mouse behavior and the selectivity of hippocampal CA1 neurons to behavioral variables one day after single, massed and spaced exploration of an open field with equal total exposure. No significant differences between schedules were found in the structure of behavior or in the proportions of neurons selective to behavioral variables.

Keywords: spaced learning, hippocampus, neuronal selectivity.

References

[1] N. J. Cepeda, H. Pashler, E. Vul, et al., "Distributed practice in verbal recall tasks: a review and quantitative synthesis", *Psychological Bulletin*, **132** (2006), 354–380. DOI: 10.1037/0033-2909.132.3.354.

[2] A. Mathis, P. Mamidanna, K. M. Cury, et al., "DeepLabCut: markerless pose estimation of user-defined body parts with deep learning", *Nature Neuroscience*, **21** (2018), 1281–1289. DOI: 10.1038/s41593-018-0209-y.

[3] V. Plusnin, O. Ivashkina, N. Pospelov, et al., "Sphynx: An Automated Behavioral Analysis Tool for Neuronal Selectivity Identification", *2024 Sixth International Conference Neurotechnologies and Neurointerfaces (CNN)*, 2024, 156–159. DOI: 10.1109/cnn63506.2024.10705840.

[4] N. Pospelov, V. Plusnin, O. Rogozhnikova, et al., "INTENSE: Detecting and disentangling neuronal selectivity in calcium imaging data", arXiv: 2603.04622.

Received on October 24, 2026

Анализ и контроль биомеханики движений человека на основе нечёткой логики

И. А. Шергин*, А. П. Рыжов‡

Предлагается метод анализа и контроля техники выполнения физических упражнений по видеопотоку с одной камеры: модель оценки позы переводит кадры в координаты ключевых точек тела, признаковое пространство — в биомеханически интерпретируемые характеристики, а нечёткий вывод по базе правил эксперта-тренера формирует голосовые корректировки в реальном времени.

Ключевые слова: оценка позы человека, нечёткая логика, киберфизические системы, биомеханика движений.

1. Введение

По данным Всемирной Организации Здравоохранения, недостаточная физическая активность охватывает около 31% взрослого населения мира [1], для восполнения этого нужно заниматься физическими упражнениями, оздоровительный эффект которых достигается лишь при правильной технике выполнения, в массовом случае это достигается под контролем эксперта-тренера, чей ресурс ограничен. Безмаркерная оценка позы человека (human pose estimation, HPE) по видео с одной камеры создала основу для автоматизации контроля. В статье представлен метод, закрывающий этот разрыв — от монокулярной оценки позы до адресных голосовых корректировок — как киберфизическая система (КФС) с человеком в контуре; составляющие метода опубликованы в [3, 4].

Шергин Иван Андреевич — аспирант каф. интеллектуальных информационных технологий ф-та ВМК МГУ, e-mail: i.a.shergin@gmail.com.

Shergin Ivan Andreevich — PhD student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Intelligent Information Technologies.

‡*Рыжов Александр Павлович* — профессор, д.т.н. каф. интеллектуальных информационных технологий ф-та ВМК МГУ, e-mail: alexander.ryjov@gmail.com.

Ryzhov Alexander Pavlovich — Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Department of Intelligent Information Technologies.

Опубликовано на условиях лицензии CC-BY 4.0
Published under CC-BY 4.0

2. Постановка задачи

Выполнение упражнения представляется набором кадров $Exercise = \{frame_t \mid t = 1, \ldots, T\}$, модель оценки позы — отображением

$$M\colon frame_t \mapsto \{\, keypoint_i^t = (x_i^t, y_i^t, z_i^t, v_i^t) \mid i = 1, \ldots, N_p \,\},$$

где $N_p = 33$ — число ключевых точек, $v_i^t \in [0, 1]$ — степень видимости точки. Знания тренера моделируются базой нечётких правил [2]: для каждого признака f совместно с экспертом задаются терм-множество $A_f = \{A_f^j\}$ и функции принадлежности, а правила связывают термы признаков с корректировками.

Задача: по видеопотоку и конфигурации упражнения (референсные позы, терм-множества, база правил $Rules_{fuzzy}$, корректировки $Corrections_{fuzzy}$) построить работающий в реальном времени оператор нечёткого вывода

$$\gamma\colon Rules_{fuzzy} \times F_t^{fuzzy} \to Corrections_{fuzzy},$$

где F_t^{fuzzy} — фаззифицированный вектор признаков в момент t, так, чтобы занимающийся получал корректировки, а контур управления замыкался через изменение его движения. Требования к оператору γ в статье не рассматриваются.

3. Метод

Метод организован как конвейер: захват видео → оценка позы → анализ ключевых точек → вычисление признаков → сегментация выполнения → нечёткий вывод → голосовая корректировка; в терминах КФС конвейер замыкает контур управления движением человека. Более подробное описание архитекетуры метода представлено в работе [3].

Признаковое пространство. В общем случае признаковое пространство вводится как $F_t = FBase_t \cup FAgg_t$, $|FBase_t| = N_1$, $|FAgg_t| = N_2$, и переводит координаты в термины тренера, устраняя зависимость от положения в кадре, расстояния до камеры и антропометрии, где $FBase_t$ - множество базовых признаков (вычисляются на основе ключевых точек), а $FAgg_t$ - множество агрегационных признаков (вычисляются на основе базовых признаков). N_1 и N_2 зависят от конкретного упражнения. Примеры признаков: углы между частями тела и углы относительно вертикали/горизонтали; расстояния между частями тела, калиброванные по росту пользователя; скорости движения частей тела.

Упражнение задается как последовательность референсных поз, которые необходимо выполнить человеку. Вводится метрика сравнения произвольной позы $user$ и референсной ref: $\mu_A(user, ref) = \sum_{i \in A}(a^i_{user} - a^i_{ref})^2$, где a^i - значение угла в градусах i-ой части тела, а A - верхняя или нижняя половина тела человека. Полученное значение нормируется наибольшей достижимой разницей до референсной позы $\mu_A^{\max}(ref)$ (макс. 180°). Благодаря чему можно получить нормированное значение метрики сравнение поз:

$$\mu_{pc}^{norm}(user, ref) = \sqrt{\frac{\sum_A \alpha_A \, \mu_A(user, ref)/\mu_A^{\max}(ref)}{\sum_A \alpha_A}} \in [0, 1],$$

где $\alpha_A \in \mathbb{R}_+$ — веса важности. Переход к действию k фиксируется, когда поза становится ближе к референсной позе ref_k, чем к ref_{k-1}, в смысле μ_{pc}^{norm}; из моментов переходов получаются длительности действий и повторов, а на их основе – оценки интенсивности и выносливости темпа выполнения. Пространство дополняют симметрия позы и синхронность движения частей тела.

Более подробное описание представлена в работе [4].

Принятие решений. База правил организована иерархически: на нижнем уровне вычисляются частные лингвистические оценки аспектов техники (положение, темп, симметрия, синхронность), на верхнем — агрегирование и приоритезация корректировок. Вывод Мамдани с пороговым выбором команд предъявляет одну команду согласно приоритетам классов ошибок; команда прослеживается до сработавших правил (объяснимость), а персонализация адаптирует функции принадлежности и состав правил к возможностям пользователя.

Список литературы

[1] World Health Organization, “Nearly 1.8 billion adults at risk of disease from not doing enough physical activity”, электронный ресурс, https://www.who.int/news/item/26-06-2024-nearly-1.8-billion-adults-at-risk-of-disease-from-not-doing-enough-physical-activity, 2024.

[2] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, **8**, 1965, 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

[3] I. A. Shergin, A. P. Ryjov , N. K. Novikova, N. M. Akhmedzhanov, “Exercise performance monitoring system by Hybrid Intelligence tools: Architecture”, *Moscow University Journal. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics*, 2026, 79–86.

[4] I. A. Shergin, A. P. Ryjov, “Exercise performance monitoring system by Hybrid Intelligence tools: Feature space”, *Moscow University Journal. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics*, 2026, 71–83.

Статья поступила 10 октября 2026 г.

Analysis and control of human movement biomechanics based on fuzzy logic

I. A. Shergin, A. P. Ryzhov

We propose a method for analyzing and controlling exercise technique from a single camera video stream: a pose estimation model converts frames into body keypoint coordinates, a feature space maps them into biomechanically interpretable characteristics, and fuzzy inference over an expert trainer’s rule base generates voice corrections in real time.

Keywords: human pose estimation, fuzzy logic, cyber-physical systems, movement biomechanics.

References

[1] World Health Organization, “Nearly 1.8 billion adults at risk of disease from not doing enough physical activity”, electronic resource, https://www.who.int/news/item/26-06-2024-nearly-1.8-billion-adults-at-risk-of-disease-from-not-doing-enough-physical-activity, 2024.

[2] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, **8**, 1965, 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

[3] I. A. Shergin, A. P. Ryjov , N. K. Novikova, N. M. Akhmedzhanov, “Exercise performance monitoring system by Hybrid Intelligence tools: Architecture”, *Moscow University Journal. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics*, 2026, 79–86.

[4] I. A. Shergin, A. P. Ryjov, “Exercise performance monitoring system by Hybrid Intelligence tools: Feature space”, *Moscow University Journal. Series 15. Computational Mathematics and Cybernetics*, 2026, 71–83.

Received on October 10, 2026

К сведению авторов публикаций в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения»

В соответствии с требованиями ВАК РФ к изданиям, входящим в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук, статьи в журнал «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» предоставляются авторами в следующей форме:

1. Статьи, набранные в пакете LaTeX, предоставляются к загрузке через WEB-форму https://intsysmagazine.ru/submit .
2. В преамбуле статьи должны содержаться название статьи на русском и английском языках, аннотация на русском и английском языках (не более 150 слов), список ключевых слов на русском и английском языках (не более 12 слов), информация об авторах: Ф.И.О. полностью, место работы, должность, ученая степень и/или звание (если имеется), для аспирантов ФИО научного руководителя, e-mail, ORCID.
3. Список литературы оформляется в едином формате, установленном системой Российского индекса научного цитирования. Списки на русском и английском языках приводятся в конце файла с текстом статьи, и должны быть оформлены с помощью пакета `amsbib`.
4. За публикацию статей в журнале «Интеллектуальные системы. Теория и приложения» с авторов (в том числе аспирантов высших учебных заведений) статей, рекомендованных к публикации, плата не взимается. Авторам бесплатно предоставляется номер журнала, в котором вышла статья. Журнал распространяется по подписке, экземпляры журнала рассылаются подписчикам наложенным платежом. Условия подписки публикуются в каталоге НТИ «Роспечать», индекс журнала 64559.
5. Электронная версия журнала находится в открытом доступе. Все материалы распространяются на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0). Электронные версии всех выпущенных номеров размещаются на сайте

https://intsysmagazine.ru

и доступны для свободного чтения и скачивания. Авторы сохраняют авторские права на свои статьи.

Подписано в печать: 12.11.2026
Дата выхода: 27.11.2026
Тираж: 200 экз.
Цена свободная
Свидетельство о регистрации СМИ: ПИ № ФС77–58444 от 25 июня 2014 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).